MARCELO ARIEL MARTINEZ

# Mecánica de los fluidos


**Victor L. Streeter**

*Professor of Hydraulics, University of Michigan*






**Ha colaborado en la revisión**

***Walter R. Debler, Associate Professor of Engineering Mechanics, University of Michigan***

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN DE LA CUARTA EDICIÓN EN INGLÉS

EMILIO ROMERO ROS

*Ingeniero Industrial*
*Jefe de Laboratorio de Hidráulica de E. T. S. I. I.*

JAIME MONEVA MONEVA

*Licenciado en Ciencias Matemáticas*
*Ingeniero de Armamento*
*Profesor de Mecánica de Fluido de la Escuela Politécnica Superior*
*Madrid*



**LIBROS McGRAW-HILL**

MEXICO PANAMA BOGOTA SÃO PAULO NUEVA YORK
LONDRES TORONTO SIDNEY JOHANNESBURG
DUSSELDORF SINGAPUR

LIBROS McGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. DE C. V.,
Atlacomulco, 499-501. Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial – Reg. No. 465

62182

Traducido de la cuarta edición del original publicado en inglés

4567890123 LEOSA-70 098765432

*Impreso en México* *Printed in Mexico*

Esta obra se terminó de imprimir el día 26 de mayo de 1972, en los talleres de *LITO EDICIONES OLIMPIA, S. A.*, Sevilla, 109. México 13, D. F.

La edición consta de 1,500 ejemplares.

# *Prólogo*

*Los cambios principales efectuados en esta obra son la ampliación de las deducciones, la adición de material sobre medidas electrónicas del fluido y sobre servocontroles neumáticos, un nuevo capítulo sobre flujo no permanente y la inclusión de aplicaciones del calculador digital.*

*El capítulo dedicado a los conceptos y ecuaciones fundamentales del flujo de fluidos se ha revisado totalmente y ampliado con la inclusión del volumen de control para la deducción de ecuaciones de continuidad, energía y cantidad de movimiento. Se han introducido las pérdidas a partir del segundo principio de la termodinámica; la ecuación de Bernoulli se ha reservado exclusivamente para los casos de flujo de fluidos ideales. Se ha extendido el capítulo dedicado al análisis dimensional y la semejanza dinámica; y el de medidas de flujo se ha reescrito para darle mayor énfasis, e incluye conceptos de servocontrol. También incluye los modernos transductores electrónicos de presión y los aparatos nuevos de medida de flujo. Se presenta el amplificador de fluido como un ejemplo de un nuevo y prometedor campo de aplicación.*

*Dentro de la Parte segunda se dan, donde corresponden, aplicaciones y ejemplos del calculador digital. No son necesarias para el entendimiento del tema, pero lleva al lector al conocimiento de las técnicas actuales para la solución de los problemas de diseños hidráulicos. El flujo no permanente se ha estudiado con mucha mayor extensión con lo que se ocupa un capítulo nuevo.*

*Los problemas se han vuelto a examinar y se han modificado considerablemente en la Parte primera. Los problemas objetivos se han conservado debido a su utilidad para comprobar el entendimiento de la teoría.*

*De nuevo se hace notar que este libro abarca mucho más material que el necesario para un primer curso normal de mecánica de fluidos.*

*El autor desea reconocer la gran ayuda que ha recibido de los revisores de esta edición. El profesor Walter R. Debler ha revisado los problemas y ha ayudado en la revisión del texto. Evelyn Streeter ha ayudado en la lectura de las pruebas. El autor les está profundamente agradecido por su ayuda.*

*Victor L. Streeter*

# Tabla de materias

*Prólogo* 5

## *Parte primera* *Fundamentos de la mecánica de los fluidos* 11

*Capítulo 1* ***Propiedades de los fluidos y definiciones*** 13

*1.1* Definición de un fluido. *1.2* Unidades de fuerza y masa. *1.3* Viscosidad. *1.4* El continuo. *1.5* Densidad, volumen específico, peso específico, densidad relativa, presión. *1.6* Gas perfecto. *1.7* Módulo de elasticidad volumétrico. *1.8* Presión de vapor. *1.9* Tensión superficial. Capilaridad.

*Capítulo 2* ***Estática de los fluidos*** 37

*2.1* Presión en un punto. *2.2* Variaciones de la presión en un fluido en reposo. *2.3* Unidades y escalas de medida de la presión. *2.4* Manómetros. *2.5* Fuerzas sobre áreas planas. *2.6* Componentes de las fuerzas debidas a las presiones sobre superficies curvas. *2.7* Empuje. *2.8* Estabilidad de flotación y cuerpos sumergidos. *2.9* Equilibrio relativo.

*Capítulo 3* ***Conceptos y ecuaciones fundamentales del movimiento de los fluidos*** 109

*3.1* Conceptos de sistema y de volumen de control. *3.2* Reversibilidad, irreversibilidad y pérdidas. *3.3* Tipos de flujo. *3.4* Definiciones. *3.5* Ecuación de continuidad. *3.6* Ecuación del movimiento de Euler a lo largo de una línea de corriente. *3.7* Ecuación de Bernoulli. *3.8* Ecuación de la energía. Primer principio de la termodinámica. *3.9* Relaciones mutuas entre las ecuaciones de Euler y relaciones termodinámicas. *3.10* Aplicación de las ecuaciones de Bernoulli y de la energía a flujo permanente de fluidos. *3.11* Ecuación de la cantidad de movimiento. *3.12* Aplicaciones de las ecuaciones de la cantidad de movimiento. *3.13* Ecuaciones del momento de la cantidad de movimiento.

*Capítulo 4* ***Análisis dimensional y semejanza dinámica*** 200

*4.1* Homogeneidad dimensional y relaciones adimensionales. *4.2* Dimensiones y unidades. *4.3* El teorema de Π. *4.4* Estudio de los parámetros adimensionales. *4.5* Semejanza. Estudio sobre modelos.

Capítulo 5 **Efecto de la viscosidad: resistencia fluida** 229

*5.1* Flujo laminar incompresible entre placas paralelas. *5.2* Flujo laminar a través de tubos circulares y anillos circulares. *5.3* Número de Reynolds. *5.4* Longitud de mezcla de Prandtl. Distribución de velocidades en flujo turbulento. *5.5* Procesos de flujo. *5.6* Definición de la capa límite. *5.7* Resistencia sobre cuerpos sumergidos. *5.8* Resistencia al flujo turbulento en conductos abiertos y cerrados. *5.9* Movimiento permanente uniforme en canales abiertos. *5.10* Movimiento permanente e incompresible a través de tuberías simples. *5.11* Mecánica de la lubricación.

Capítulo 6 **Flujo compresible** 313

*6.1* Relaciones de los gases perfectos. *6.2* Velocidad de una onda sonora. Número de Mach. *6.3* Flujo isoentrópico. *6.4* Ondas de choque. *6.5* Líneas de Fauno y Rayleigh. *6.6* Flujo adiabático con rozamiento en conductos. *6.7* Flujo sin rozamiento a través de conductos con transferencia de calor. *6.8* Flujo isotérmico permanente en tuberías largas. *6.9* Vuelo a gran velocidad. *6.10* Analogía de las ondas de choque con las ondas en canales abiertos.

Capítulo 7 **Flujo de un fluido ideal** 372

*7.1* Requisitos para el flujo de un fluido ideal. *7.2* El operador vectorial ∇. *7.3* Ecuación de Euler del movimiento. *7.4* Flujo irrotacional. Potencial de velocidad. *7.5* Integración de las ecuaciones de Euler. Ecuación de Bernoulli. *7.6* Funciones de corriente. Condiciones de contorno. *7.7* La red de corriente. *7.8* Casos de flujo tridimensional. *7.9* Casos de flujo bidimensional.

## Parte segunda Aplicaciones de la mecánica de los fluidos 425

Capítulo 8 **Medidas y control en el flujo fluido** 427

*8.1* Medida de la presión. *8.2* Medida de la velocidad. *8.3* Medidas de fuerza. *8.4* Medidas ópticas de flujo. *8.5* Medidores de desplazamiento positivo. *8.6* Medidores de caudal. *8.7* Aparatos electromagnéticos de flujo. *8.8* Medida del caudal de un río. *8.9* Medida de la turbulencia. *8.10* Medida de la viscosidad. *8.11* Amplificadores de fluido. *8.12* Principios de control de la presión y de flujo.

Capítulo 9 **Turbomaquinaria** 498

*9.1* Unidades homólogas. Velocidad específica. *9.2* Teoría elemental de la cascada. *9.3* Teoría de las turbomáquinas. *9.4* Turbinas de impulsión. *9.5* Turbinas de reacción. *9.6* Bombas y turbocompresores. *9.7* Compresores centrífugos. *9.8* Acoplamientos fluidos y convertidores de par fluidos. *9.9* Cavitación.



Capítulo 10 **Flujo permanente en conductos cerrados** 548

*10.1* Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales. *10.2* El sifón. *10.3* Tuberías en serie. *10.4* Tuberías en paralelo. *10.5* Tuberías ramificadas. *10.6* Red de tuberías. *10.7* Conductos de sección no circular. *10.8* Envejecimiento de las tuberías.

Capítulo 11 **Flujo permanente en canales abiertos** 579

*11.1* Clasificación de flujo. *11.2* Sección hidráulica óptima de un canal. *11.3* Flujo permanente uniforme en un aliviadero de crecida. *11.4* Resalto hidráulico. Cuencos protectores. *11.5* Energía específica, profundidad crítica. *11.6* Flujo gradualmente no uniforme. *11.7* Cálculo mediante un calculador del flujo gradualmente variado. *11.8* Clasificación de los perfiles superficiales. *11.9* Secciones de control. *11.10* Transiciones.

Capítulo 12 **Flujo no permanente** 617

*Flujo en conductos cerrados*

*12.1* Oscilación de un líquido en un tubo en U. *12.2* Establecimiento de una corriente. *12.3* Control de las olas. *12.4* Descripción del fenómeno del golpe de ariete. *12.5* Ecuaciones diferenciales para el cálculo del golpe de ariete. *12.6* El método de solución de las características. *12.7* Solución gráfica de los casos sencillos del golpe de ariete. *12.8* Golpe de ariete algebraico.

*Flujo en canales abiertos*

*12.9* Onda positiva sin rozamiento en un canal rectangular. *12.10* Ondas negativas sin rozamiento en un canal rectangular. *12.11* Control de inundaciones en canales prismáticos. *12.12* Mecánica de las relaciones lluvia-desagüe para áreas planas inclinadas.

## Apéndices 699

*A.* **Sistema de fuerza, momentos y controles** 701

*B.* **Derivadas parciales y diferenciales totales** 705

*C.* **Propiedades físicas de los fluidos** 710

*D.* **Anotación** 713

*E.* **Ayudas para la programación de computadores** 717

*E.1* Lenguaje MAD. *E.2* Cuadraturas, integración numérica y regla de Simpson. *E.3* Interpolación parabólica. *E.4* Solución de ecuaciones algebraicas por el método de bisección. *E.5* Solución de Runge-Kutta de ecuaciones diferenciales.

*Soluciones de los problemas pares* 731

*Indice* 739

*Parte primera*

# *Fundamentos de la mecánica de los fluidos*

En los tres primeros capítulos de la Parte primera se estudian las propiedades de los fluidos, la estática de los fluidos y el conjunto correspondiente de conceptos, definiciones y ecuaciones fundamentales para la dinámica de los fluidos. A continuación se introducen los grupos adimensionales, incluyendo el análisis dimensional y la semejanza dinámica. El Capítulo 5 trata de los fluidos reales y la introducción de los datos experimentales en los cálculos del flujo de fluidos. Después se estudia el flujo compresible, tanto en fluidos reales, como en fluidos sin rozamiento. El último capítulo de los fundamentos se refiere al flujo bi y tridimensional del fluido ideal. En toda la Parte primera se ha ilustrado la teoría con aplicaciones elementales.

# 1

# *Propiedades de los fluidos y definiciones*

La mecánica de los fluidos es una de las ciencias que forman la base de toda técnica. Esta ciencia se ramifica en varias especialidades tales como aerodinámica, hidráulica, ingeniería naval, dinámica de gases y procesos de flujo. Tiene relación con la estática, cinemática y dinámica de los fluidos, ya que el movimiento de un fluido se produce debido al desequilibrio de las fuerzas que actúan sobre él. Se van obteniendo los métodos útiles de análisis de la aplicación de los principios, conceptos y leyes siguientes: principio de Newton del movimiento, primer y segundo principios de la termodinámica, principio de conservación de la masa, ecuaciones de estado que relacionan las propiedades del fluido, ley de Newton de la viscosidad, conceptos de longitud de mezcla y las condiciones motivadas por la presencia de los contornos.

En los cálculos de movimiento de fluidos, la viscosidad y la densidad son las propiedades del fluido que con más generalidad se utilizan; desempeñan los papeles principales en el movimiento en canales abiertos y cerrados y en el movimiento alrededor de los cuerpos sumergidos. Los efectos de la tensión superficial tienen importancia en la formación de gotitas en el movimiento de chorros pequeños y en estados donde se presentan superficies de contacto líquido-gas-sólido o líquido-líquido-sólido, tanto como en la formación de ondas capilares. La propiedad de presión de vapor, determinante del cambio de fase líquida a gaseosa, llega a ser importante cuando se alcanzan presiones pequeñas.

Un sistema de inyección de combustible líquido es un ejemplo de problema técnico en el que el rendimiento del resultado viene afectado de una manera significativa por las propiedades del fluido que se maneja. El combustible se bombea desde un tanque cisterna a través de una serie de tuberías de alimentación de combustible y boquillas de inyeccion. El proceso es intermitente y se realiza a gran velocidad. Parece razonable esperar que se necesita menos fuerza y menos potencia para bombear un combustible de calidad ligera, o «delgado», que un combustible de calidad pesada, o «grueso». Los términos «ligero» y «pesado» son tér-

minos cualitativos que indican la mayor o menor facilidad para moverse del combustible. Hay una manera cuantitativa de especificar esta propiedad de fluidez, y más adelante, en este capítulo, se describirá. Desde luego será necesario definir un fluido de una manera rigurosa y ver cómo nuestro combustible cumple esta definición.

La manera en la que el combustible saldrá de la boquilla vendrá afectada por el modo en que la tensión superficial determine la formación de gotas. El diseño real del perfil de la boquilla estará influenciado por otras propiedades del líquido.

El movimiento en las tuberías de alimentación es intermitente porque el combustible solo se suministra a las boquillas de inyección en instantes específicos durante el ciclo de trabajo de la máquina. En consecuencia, hay pulsaciones de presión en el sistema. Estas presiones pueden ser muy elevadas e, inesperadamente, también muy bajas. Es posible que cuando la presión baja lo suficiente, momentáneamente puede vaporizarse el combustible e impedir que se logre el rendimiento esperado del sistema. Las pulsaciones de la presión se transmiten a lo largo de la columna de líquido en las tuberías de alimentación de combustible de manera análoga a las ondas sonoras en el aire. Estas ondas de presión pueden estar en una relación de fase tal que las ondas den como resultado presiones punta momentáneas, que son muchas veces mayores que las presiones esperadas en el sistema. La velocidad de las ondas de presión depende de una propiedad llamada módulo volumétrico.

Las secciones que siguen ponen de manifiesto la importancia de las propiedades físicas del líquido o del gas. También se incluyen unas cuantas definiciones de modo que se puede especificar acerca de la propiedad, cantidad o hipótesis que se considere.

## 1.1 *Definición de un fluido*

Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a una tensión de cortadura, por muy pequeña que ésta sea. Una fuerza cortante es la componente tangente a la superficie de la fuerza y esta fuerza, dividida por el área de la superficie, es la tensión de cortadura media sobre el área considerada. La tensión de cortadura en un punto es el límite del cociente de la fuerza cortante por el área cuando el área se reduce a cero en el punto.

En la Fig. 1.1 se representa una sustancia que se ha colocado entre dos placas paralelas muy próximas lo suficientemente largas para que puedan despreciarse las condiciones en los bordes. La placa inferior está quieta y sobre la superior se aplica una fuerza $F$, que origina una tensión de cortadura $F/A$ en la sustancia colocada entre las placas ($A$ es el área de la placa superior). Cuando esta fuerza $F$, por muy pequeña que sea, hace mover a la lámina superior con una velocidad constante (no



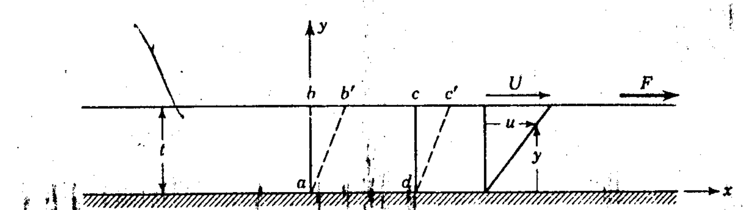



*Fig. 1.1* *Deformación resultante de la aplicación de una fuerza de cortadura constante.*

nula), se puede concluir que la sustancia situada entre las láminas es un fluido.

El fluido en inmediato contacto con la pared sólida tiene la misma velocidad que la pared, es decir, no hay ningún deslizamiento del fluido sobre la pared†. Es un hecho experimental que se ha comprobado en innumerables ensayos con varios tipos de fluidos y materiales de la pared. El fluido del área $abcd$ se mueve hasta ocupar una nueva posición $ab'c'd$, de manera que cada partícula fluida se mueve paralelamente a la lámina y la velocidad $u$ varía uniformemente desde cero en la placa en reposo hasta $U$ en la lámina superior. La experiencia demuestra que si las otras magnitudes se mantienen constantes, $F$ es directamente proporcional a $A$ y a $U$ e inversamente proporcional a $t$, de manera que

$$F = \mu \frac{AU}{t}$$

siendo $\mu$ el factor de proporcionalidad que hace intervenir el efecto del fluido de que se trate. Como la tensión de cortadura es $\tau = F/A$, resulta

$$\tau = \mu \frac{U}{t}$$

La relación $U/t$ es la velocidad angular de la línea $ab$, o la *velocidad angular de deformación* del fluido, es decir, la disminución del ángulo $bad$ en la unidad de tiempo. La velocidad angular puede también escribirse $du/dy$ y ambas, $U/t$ y $du/dy$, expresan la variación de velocidad dividida por la distancia en la que se produce dicha variación. Sin embargo, $du/dy$ es más general y sirve en todos los casos, aun en aquellos en que la velocidad angular y la tensión de cortadura varían. El gradiente de velocidad $du/dy$ puede también ser considerado como el cociente de la ve-

† S. Goldstein, «Modern Developments in Fluid Dynamics», vol. II, págs. 676-680, Oxford University Press, Londres, 1938.

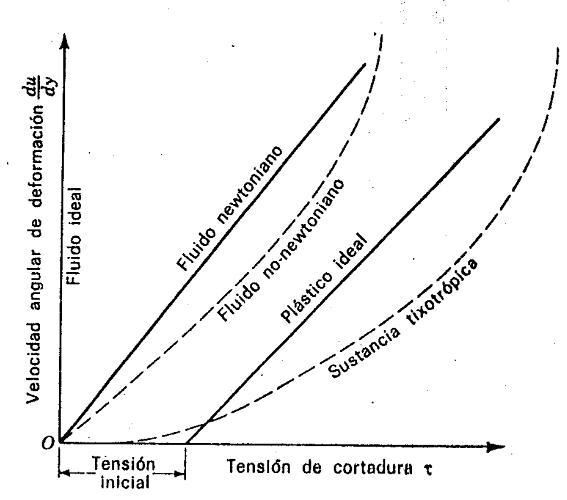



*Fig. 1.2 Diagrama reológico.*

locidad con que una capa del fluido se mueve en relación con la capa adyacente. En forma diferencial puede escribirse

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (1.1.1)$$

es decir, existe una proporcionalidad entre la tensión de cortadura y la velocidad de deformación angular de un movimiento unidimensional de un fluido. El factor de proporcionalidad se llama *viscosidad* del fluido, y la Ec. (1.1.1) es la *ley de Newton de la viscosidad.* En el segundo libro de su «Principia», Newton consideraba el movimiento circular de los fluidos como parte de sus estudios de los planetas y escribía

«*Hipótesis*

La resistencia que se observa debida a la falta de lubricación en las partes de un fluido es, siendo iguales las demás cosas, proporcional a la velocidad con que se separan una de otra las partes de un fluido.»

Una sustancia plástica no cumple la definición de fluido porque para producir en ella una deformación continua debe sobrepasarse una cierta tensión de cortadura inicial. Una sustancia elástica situada entre las dos láminas anteriormente consideradas se deforma en una *cantidad* proporcional a la fuerza, pero no de forma continua. Si existiese el vacío entre las dos láminas no resultaría una velocidad de deformación constante, sino que sería constantemente creciente. Si se colocase arena entre las láminas, por el rozamiento seco se necesitaría una fuerza *finita* para con-



seguir un movimiento continuo. Por consiguiente, la arena tampoco satisface la definición de fluido.

Los fluidos pueden clasificarse en newtonianos y no newtonianos. En los primeros existe una relación lineal entre la tensión de cortadura aplicada y la velocidad de deformación resultante [$\mu$ constante en la Ec. (1.1.1)] como se observa en el gráfico de la Fig. 1.2. En los segundos no existe tal relación lineal. Un *plástico ideal* tiene una cierta tensión de cortadura inicial y por encima de ella existe una relación lineal constante entre $\tau$ y $du/dy$. Una sustancia *thixotrópica*, tal como la tinta de imprenta, tiene una viscosidad que depende de la deformación angular inmediatamente anterior y tiende a un cierto valor cuando la sustancia está en reposo.

Los gases y los líquidos ligeros se aproximan a los fluidos newtonianos, mientras que los líquidos pesados y los gases en las cercanías de sus puntos críticos son no newtonianos.

Para facilitar el estudio, frecuentemente se supone que el fluido no es viscoso. Con viscosidad nula la tensión de cortadura es también nula cualquiera que sea el movimiento del fluido. A un fluido de viscosidad nula é incompresible, se le llama fluido *ideal* y vendrá representado por el eje de ordenadas de la Figura 1.2.

### 1.2 Unidades de fuerza y masa

La unidad de fuerza adoptada en este texto es el kilogramo fuerza (kilopondio) (kg). Como unidad de masa usaremos el kilogramo masa ($kg_m$) y la unidad técnica de masa (UTM). Como las propiedades termodinámicas se expresan generalmente en la base del kilogramo masa, se representan de acuerdo con esta unidad, pero los problemas de los ejemplos están resueltos en unidades técnicas de masa.

El kilogramo fuerza se define como la atracción que ejerce la gravedad, en un lugar determinado (normal), sobre una masa dada de platino. Bajo la gravedad normal, $g = 9{,}80665$ m/seg², el cuerpo que experimenta una atracción de un kilogramo fuerza tiene una masa de un kilogramo masa. Escribiendo el segundo principio de Newton del movimiento en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{m}{g_0}\mathbf{a} \qquad (1.2.1)$$

y aplicándola a un cuerpo que cae libremente en el vacío en condiciones normales

$$1 \text{ kg} = 1 \frac{kg_m}{g_0} 32{,}174 \frac{m}{seg^2}$$

m ← ft (pie)

es evidente que

$$g_0 \equiv 32{,}174 \frac{\text{kg}_m\text{-m}}{\text{kg-seg}^2} \tag{1.2.2}$$

Siempre que utilicemos en este libro el kilogramo masa, le representaremos mediante $\text{kg}_m$. El kilogramo fuerza le representaremos mediante kg. El número $g_0$ es una constante, independiente del lugar de aplicación del principio de Newton y dependiente solo de las unidades kilogramo, kilogramo masa, metro y segundo. En cualquier otro lugar distinto del de gravedad normal, la masa de un cuerpo permanece constante, pero el peso (fuerza o atracción de la gravedad) varía:

$$W = M\,(\text{kg}_m)\,\frac{g}{g_0} \tag{1.2.3}$$

Por ejemplo, donde $g = 9{,}7$ m/seg²

$$5\ \text{kg}_m \text{ pesan } 9{,}7 \times \frac{5}{9{,}80665} = 4{,}948 \text{ kg}$$

La unidad técnica de masa es una unidad de masa derivada, definida como la cantidad de masa que se acelera un metro por segundo en cada segundo bajo la acción de una fuerza de un kilogramo. Con estas unidades la constante $g_0$ es la unidad, es decir, 1 UTM-m/kg-seg². Como la mecánica de los fluidos está tan íntimamente ligada al segundo principio de Newton, la UTM se define como

$$1 \text{ UTM} \equiv 1 \frac{\text{kg-seg}^2}{\text{m}} \tag{1.2.4}$$

y se puede utilizar el sistema acorde de unidades UTM, kg, m, seg sin constante dimensional $g_0$.

En el desarrollo de las ecuaciones en este texto se supone que las unidades son acordes o coherentes y las ecuaciones aparecen sin la constante $g_0$. Si se utiliza el kilogramo masa en las ecuaciones de la dinámica, entonces se debe introducir $g_0$.

## 1.3 Viscosidad

De todas las propiedades del fluido es ésta la que requiere mayor atención en el estudio del movimiento del fluido. La naturaleza y características de la viscosidad se estudian en este número, así como sus dimensiones y los factores de conversión de viscosidades absolutas y cine-



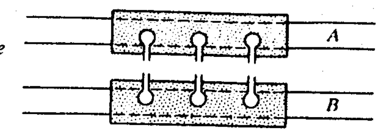



*Fig. 1.3 Modelo para ilustrar el intercambio de la cantidad de movimiento.*

máticas de unas unidades a otras. La viscosidad es la propiedad del fluido en virtud de la cual éste ofrece resistencia a las tensiones de cortadura. La ley de la viscosidad de Newton [Ec. (1.1.1)] establece que para una velocidad angular de deformación dada del fluido la tensión de cortadura es directamente proporcional a la viscosidad. Las melazas y el alquitrán son ejemplos de líquidos muy viscosos, el agua y el aire son fluidos poco viscosos.

La viscosidad de un gas aumenta con la temperatura, mientras que la viscosidad de un líquido disminuye con la temperatura. Este distinto comportamiento con las variaciones de temperatura puede explicarse examinando las causas de la viscosidad. La resistencia de un fluido a la tensión de cortadura depende de su cohesión y del grado de transferencia de cantidades de movimiento de sus moléculas. Un líquido, con moléculas mucho más cercanas que un gas, tiene unas fuerzas de cohesión mayores que éste. La cohesión parece ser la causa predominante de la viscosidad en un líquido, y como la cohesión disminuye con la temperatura, a la viscosidad le sucederá lo mismo. Por otro lado, un gas tiene fuerzas cohesivas muy pequeñas. La mayor parte de su resistencia a la tensión de cortadura es el resultado de la transferencia de cantidades de movimientos moleculares.

Como un modelo grosero de la manera como la transferencia de cantidades de movimiento da lugar a un aumento de la tensión de cortadura aparente, consideremos dos vagonetas cargadas con esponjas en dos vías paralelas, como muestra la Fig. 1.3. Supongamos que cada vagoneta tiene un tanque de agua y una bomba que lanza chorros de agua por toberas situadas a ángulos rectos de las vías. Consideremos previamente *A* quieta y *B* moviéndose hacia la derecha con sus chorros de agua dirigidos hacia *A* y absorbidos por las esponjas de *A*. La vagoneta *A* se pondrá en movimiento por las componentes de las cantidades de movimiento de los chorros paralelas a la vía, dando lugar a una aparente tensión de cortadura entre *A* y *B*. Ahora, si *A* bombea agua hacia *B* en la misma cantidad, su acción tiende a parar a *B* y resulta igual y opuesta tensión de cortadura aparente. Cuando *A* y *B* están ambas quietas o tienen las mismas velocidades, los chorros de agua de cada vagoneta no ejercen ninguna tensión de cortadura aparente sobre la otra vagoneta.

En un fluido hay siempre una transferencia de moléculas a través de cualquier superficie ficticia que se trace en él. Cuando una capa se mueve en relación con otra adyacente, la transferencia de moléculas de una capa a otra da lugar a cambios de cantidades de movimiento de un lado

al otro, de tal manera que surge una tensión de cortadura aparente que resiste al movimiento relativo y tiende a igualar las velocidades de las capas adyacentes de manera análoga a lo que sucede en la Fig. 1.3. La medida del movimiento de una capa en relación con otra adyacente es $du/dy$.

Los movimientos moleculares en los gases dan lugar a una tensión de cortadura aparente que es más importante que las fuerzas cohesivas, y como los movimientos moleculares se incrementan con la temperatura, la viscosidad de un gas aumenta con la temperatura.

Para presiones ordinarias, la viscosidad es independiente de la presión y depende únicamente de la temperatura. Para grandes presiones, algunos aceites tienen variaciones erráticas de la viscosidad con la presión.

En un fluido en reposo, o con movimiento tal que no existe movimiento relativo de una capa con relación a su adyacente, no habrá tensiones de cortadura aparentes y estará desprovisto de viscosidad porque $du/dy$ es cero en todo fluido. De aquí que en el estudio de la *estática de fluidos* no hay que considerar fuerzas cortantes porque no existen en un fluido en reposo, y las únicas tensiones que quedan son las normales o presiones. Esto simplifica enormemente el estudio de la estática de los fluidos, ya que en una porción del fluido solo puede haber fuerzas debidas al peso y fuerzas normales a la superficie de dicha porción.

Las dimensiones de la viscosidad se determinan por la ley de Newton de la viscosidad [Ec. (1.1.1)]. Despejando la viscosidad $\mu$

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy}$$

Poniendo las dimensiones $F$, $L$, $T$ para fuerza, longitud y tiempo,

$$\tau : FL^{-2} \qquad u : LT^{-1} \qquad y : L$$

$\mu$ tiene las dimensiones $FL^{-2}T$. Si se ponen las dimensiones de la fuerza en términos de la masa usando el segundo principio de Newton del movimiento $F = MLT^{-2}$, las dimensiones de la viscosidad pueden expresarse como $ML^{-1}T^{-1}$.

En el sistema técnico de unidades, la unidad de viscosidad (que no tiene nombre especial) es 1 kg seg/m². En el sistema cgs, la unidad de viscosidad† se llama el *poise* y es 1 dina seg/cm² o 1 g/cm seg. El *centipoise* es la centésima parte del poise. El agua a 20° C tiene una viscosidad de 1,002 centipoises.

† Para convertir unidades técnicas de masa en poises basta tener en cuenta que

$$1\ \text{UTM} = \frac{1.000 \times 980}{10^4}\ \text{dina seg/cm}^2 = 98\ \text{poise}$$



*Viscosidad cinemática*

La viscosidad $\mu$ suele llamarse viscosidad *absoluta* o *dinámica* para evitar confundirla con la viscosidad *cinemática* $\nu$, que es el cociente de la viscosidad por la densidad

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (1.3.1)$$

La viscosidad cinemática interviene en muchas aplicaciones, como, por ejemplo, en el número de Reynolds, que es $VD/\nu$. Las dimensiones de $\nu$ son $L^2T^{-1}$. La unidad técnica, 1 m²/seg, no tiene nombre especial; la unidad cegesimal se llama *stoke* y es 1 cm²/seg†.

Para convertir en el sistema técnico la unidad de viscosidad cinemática en la unidad de viscosidad, hay que multiplicar por la densidad expresada en UTM por m³. Para pasar del poise al stoke hay que multiplicar por la densidad en $g_m$/cm³, que es numéricamente igual al peso específico.

***Ejemplo 1.1*** Un líquido tiene una viscosidad de 0,05 poises y una densidad relativa de 0,85. Calcular (*a*) la viscosidad en unidades técnicas; (*b*) la viscosidad cinemática en stokes, y (*c*) la viscosidad cinemática en unidades técnicas.

(*a*) $\mu = 0{,}05$ poises $= (0{,}05/98)$ kg seg/m² $= 0{,}000510$ kg seg/m².

(*b*) como $\rho = 0{,}85 \times 1$ g/cm³ será $\nu = \mu/\rho = 0{,}05/0{,}85$ cm²/seg $= 0{,}0589$ stokes.

(*c*) $\nu = \dfrac{0{,}0589}{10^4}$ m²/seg $= 0{,}00000589$ m²/seg y también

$$\nu = \frac{0{,}00051}{0{,}85 \times \dfrac{1000}{9{,}81}} = 0{,}00000589\ \text{m}^2/\text{seg}.$$

La viscosidad es prácticamente independiente de la presión y depende únicamente de la temperatura. La viscosidad cinemática de líquidos y de gases a una presión dada es sustancialmente función de la temperatura. En las Figs. C.1 y C.2 del Apéndice C se dan tablas para la determinación de la viscosidad absoluta y de la viscosidad cinemática, respectivamente.

† La conversión de unidades técnicas en stokes se hace teniendo en cuenta que

1 m²/seg = 10⁴ cm²/seg = 10⁴ stokes

## 1.4 El continuo

Al tratar con las relaciones del movimiento de fluidos en una base matemática o analítica, es necesario considerar que la estructura molecular real se sustituye por un medio continuo hipotético, llamado el *continuo*. Por ejemplo, la velocidad en un punto del espacio no está definida en un medio molecular, pues sería cero siempre excepto cuando una molécula ocupara exactamente dicho punto, y entonces sería la velocidad de la molécula y no la velocidad de masa media de las partículas del entorno. Se evita este dilema si se considera que la velocidad en un punto es el promedio de la velocidad de masa de todas las moléculas que rodean el punto, es decir, dentro de una esfera pequeña de radio grande comparado con la *distancia media entre moléculas*. Con $n$ moléculas por centímetro cúbico, la distancia media entre moléculas es del orden de $n^{-1/3}$ cm. Sin embargo, se debe usar la teoría molecular para calcular las propiedades del fluido (por ejemplo, la viscosidad) que están relacionadas con los movimientos de las moléculas, pero se pueden emplear las ecuaciones del continuo con los resultados de los cálculos moleculares.

En los gases enrarecidos, tal como la atmósfera a 80 km por encima del nivel del mar, se utiliza la relación entre el camino libre medio† del gas y una longitud característica del cuerpo o conducto para distinguir el tipo de movimiento. El régimen del movimiento se llama *flujo continuo* para valores muy pequeños de dicha relación, el régimen siguiente se llama *flujo suelto o desprendido*, y para valores grandes de la relación es el *flujo molecular libre*. En este texto solo se estudia el flujo continuo.

Se supone que la densidad, el volumen específico, la presión, la velocidad y la aceleración varían de forma continua a través del fluido (o son constantes).

## 1.5 Densidad, volumen específico, peso específico, densidad relativa, presión

La *densidad* $\rho$ de un fluido se define como su masa por unidad de volumen. Para definir la densidad en un punto se divide la masa $\Delta m$ de fluido, en el volumen pequeño $\Delta V$ que rodea a dicho punto, por $\Delta V$ y se toma el límite cuando $\Delta V$ tiende a $\epsilon^3$, donde $\epsilon$ es aún grande comparado con la distancia media entre moléculas,

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \epsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{1.5.1}$$

† El camino libre medio es la distancia media recorrida entre dos choques moleculares.



Cuando la masa viene expresada en UTM, $\rho$ viene en UTM/m³; si la masa se expresa en kilogramos masa, $\rho$ viene en kilogramos masa por metro cúbico. Estas unidades están relacionadas por

$$\rho_{UTM} = \frac{\rho_{kg_m}}{9{,}81} \tag{1.5.2}$$

Para el agua en condiciones normales

$$\rho = 101{,}94 \text{ UTM/m}^3 \text{ o } 1.000 \text{ kg}_m\text{/m}^3$$

El *volumen específico* $v_s$ es el inverso de la densidad $\rho$; es decir, es el volumen que ocupa la unidad de masa. Por consiguiente,

$$v_s = \frac{1}{\rho} \tag{1.5.3}$$

El *peso específico* $\gamma$ de una sustancia es su peso por unidad de volumen. Cambia con la situación,

$$\gamma = \rho_{UTM} g = \frac{\rho_{kg_m}}{9{,}81} g \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{1.5.4}$$

dependiendo de la gravedad. Es una propiedad conveniente cuando se trata con la estática del fluido o con líquidos con una superficie libre.

La *densidad relativa S* de una sustancia es la relación entre su peso y el peso de un volumen igual de agua en condiciones normales†. También se puede expresar como la relación entre su densidad, o peso específico, y la del agua.

La fuerza normal que actúa sobre un área plana dividida por el área es la *presión media*. La presión en un punto es el límite del cociente de la fuerza normal por el área, cuando el área tiende a cero en el punto. Si un fluido ejerce una presión contra las paredes de un recipiente, entonces el recipiente ejercerá una reacción sobre el fluido que será de compresión. Los líquidos pueden soportar presiones de compresión muy elevadas, pero a menos que sean extremadamente puros, son muy débiles frente a la tracción. Esta es la razón por la que nunca se emplean en este libro presiones absolutas negativas, ya que implicaría que el fluido estaba sometido a tracción. La presión tiene unidades de fuerza por unidad de área (kg/cm² o kg/m²). También se puede expresar en función de una

† Estas condiciones son normalmente 4° C. En este libro se consideran como condiciones normales 20° C y una presión absoluta de 760 mm de mercurio, a menos que se indique lo contrario.



longitud equivalente de una columna de fluido, como se indica en la Sección 2.3.

## 1.6 Gas perfecto

En esta obra se han limitado generalmente los casos de relaciones termodinámicas y de movimiento de fluidos compresibles a los gases perfectos. El gas perfecto se define en esta sección, y en la Sec. 6.1 se tratan sus diversas interrelaciones con los calores específicos.

El gas perfecto, como lo utilizaremos aquí, se define como una sustancia que satisface la *ley de los gases perfectos*

$$pv_s = RT \tag{1.6.1}$$

y que tiene calores específicos constantes. $p$ es la presión absoluta, $v_s$ el volumen específico, $R$ la constante de los gases perfectos y $T$ la temperatura absoluta. Se debe distinguir cuidadosamente el gas perfecto del fluido ideal. Un fluido ideal no tiene rozamiento y es incompresible. El gas perfecto, en cambio, tiene viscosidad y, por tanto, puede desarrollar tensiones cortantes, y, además, es compresible según la Ecuación (1.6.1).

La Ec. (1.6.1) es la ecuación de estado de un gas perfecto. Se puede escribir

$$p = \rho RT \tag{1.6.2}$$

Las unidades de $R$ se pueden determinar a partir de la ecuación cuando se conocen las otras unidades. Para $p$ en kg/m², $\rho$ en UTM/m³ y $T$ (°C + 273,16) en grados Kelvin (°K),

$$R: \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\ \frac{\text{m}^3}{\text{UTM °K}} = \frac{\text{kgm}}{\text{UTM °K}}$$

Para $\rho$ en kg$_m$/m³,

$$R: \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg}_m\ \text{°K}} = \frac{\text{kgm}}{\text{kg}_m\ \text{°K}}$$

El valor de $R$ en unidades UTM es 9,81 veces mayor que en unidades kilogramo masa. En la Tabla C.2 se dan los valores de $R$ para varios gases usuales.

Los gases reales a bajas presiones tienden a seguir la ley de los gases perfectos. Cuando aumenta la presión, aumenta la discrepancia y se hace importante en las proximidades del punto crítico. La ley de los gases perfectos encierra a la ley de Charles y a la ley de Boyle. La ley de



Charles establece que, a presión constante, el volumen de una masa dada de gas varía como su temperatura absoluta. La ley de Boyle (ley isotérmica) establece que, a temperatura constante, la densidad varía directamente con la presión absoluta. El volumen $V$ de $m$ unidades de masa del gas es $mv_s$; por consiguiente,

$$pV = mRT \tag{1.6.3}$$

Se obtienen algunas simplificaciones si se escribe la ley de los gases perfectos referida al número de moles. Se llama molécula-gramo (mol) de un gas al número de gramos masa del gas igual a su peso molecular; es decir, un mol de $O_2$ es 32 g$_m$. Siendo $\bar{v}_s$ el volumen por mol, la ley de los gases perfectos se convierte en

$$p\bar{v}_s = MRT \tag{1.6.4}$$

si $M$ es el peso molecular. En general, si $n$ es el número de moles de gas que hay en el volumen $V$,

$$pV = nMRT \tag{1.6.5}$$

ya que $nM = m$. Ahora, de la ley de Avogadro, volúmenes iguales de gases a las mismas presión y temperatura absolutas tienen el mismo número de moléculas, por consiguiente, sus masas son proporcionales a los pesos moleculares. De la Ec. (1.6.5) se ve que $MR$ debe ser constante, ya que $pV/nT$ es igual para cualquier gas perfecto. El producto $MR$ se llama constante universal de los gases y tiene un valor que solo depende de las unidades empleadas. Es

$$MR = 848\ \frac{\text{kgm}}{\text{kg}_m\text{-mol °K}} \tag{1.6.6}$$

La constante $R$ de los gases se puede determinar de

$$R = \frac{848}{M}\ \frac{\text{kgm}}{\text{kg}_m\ \text{°K}} \tag{1.6.7}$$

o en unidades técnicas,

$$R = \frac{848 \times 9{,}81}{M}\ \frac{\text{kgm}}{\text{UTM °K}} \tag{1.6.8}$$

de modo que el conocimiento del peso molecular conduce al valor de $R$. En la Tabla C.2 del Apéndice C se indican los pesos moleculares de algunos gases usuales.

En los Caps. 3 y 6 se presentan relaciones y definiciones adicionales que se utilizan en el movimiento de los gases perfectos.

*Ejemplo 1.2* Un gas de peso molecular 44 está a 0,92 kg/cm² de presión (absoluta) y a 15° C. Determinar su densidad en UTM por metro cúbico.

De la Ec. (1.6.8)

$$R = \frac{848 \times 9{,}81}{44} = 189 \frac{\text{kgm}}{\text{UTM °K}}$$

Entonces de la Ec. (1.6.2)

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{9200}{189(273 + 15)} = 0{,}169 \frac{\text{UTM}}{\text{m}^3}$$

## 1.7 *Módulo de elasticidad volumétrico*

En la sección anterior se describía la compresibilidad de un gas perfecto mediante la ley de los gases perfectos. En la mayoría de los casos un líquido puede considerarse incompresible; pero cuando los cambios de presión son muy rápidos o muy grandes, debe tenerse en cuenta la compresibilidad, la cual se expresa por el *módulo de elasticidad volumétrico*. La compresibilidad de los líquidos (y de los gases) se hace también importante cuando se producen cambios de temperatura (por ejemplo, convección libre). Si la presión de la unidad de volumen del fluido aumenta en $dp$ y el volumen disminuye $-d\mathcal{V}$, entonces la relación $-dp/d\mathcal{V}$ es el módulo de elasticidad volumétrico $K$. Para un volumen $\mathcal{V}$ de fluido,

$$K = -\frac{dp}{d\mathcal{V}/\mathcal{V}} \tag{1.7.1}$$

Como $d\mathcal{V}/\mathcal{V}$ es adimensional, $K$ se expresará en las mismas unidades que $p$. Para el agua a temperatura y presiones ordinarias, $K =$ 21.000 kg/cm².

Para tener una idea más clara sobre la compresibilidad del agua, supongamos que se aplica una presión de 10 kg/cm² a 1 m³ de agua. La Ec. (1.7.1) nos da, al despejar $-d\mathcal{V}$,

$$-d\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}\,dp}{K} = \frac{1{,}0 \times 10}{21.000} = \frac{1}{2.100}\,\text{m}^3$$

Es decir, la aplicación de 10 kg/cm² al agua en condiciones ordinarias obliga al volumen a disminuir una parte de 2.100. Cuando se comprime un líquido aumenta la resistencia a la compresión; por eso K aumenta con la presión. A 3.160 kg/cm² el valor de $K$ para el agua se ha duplicado.



Para un gas la ecuación de estado se puede escribir de la forma siguiente:

$$p = p(v_s, T) \tag{1.7.2}$$

Se ve que la Ec. (1.6.1) es un ejemplo específico de esta forma general. Se puede utilizar en la Ec. (1.7.2) el método de derivar una función de dos variables (que se revisa en el Apéndice B), de manera que

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v_s}\right)_T dv_s + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_s} dT$$

A temperatura constante, $dT = 0$; y el módulo de elasticidad volumétrico isotérmico es, en virtud de su definición en la Ec. (1.7.1),

$$K = -v_s \frac{dp}{dv_s} = -v_s \left(\frac{\partial p}{\partial v_s}\right)_{T=\text{const}}$$

*Ejemplo 1.3* Un líquido comprimido en un cilindro tiene un volumen de 0,400 m³ a 70 kg/cm² y un volumen de 0,396 m³ a 140 kg/cm². ¿Cuál es el módulo de elasticidad volumétrico?

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta\mathcal{V}/\mathcal{V}} = -\frac{140 - 70}{(0{,}396 - 0{,}400)/0{,}400} = 7.000 \text{ kg/cm}^2$$

## 1.8 *Presión de vapor*

Los líquidos se evaporan porque las moléculas se escapan de su superficie. Cuando el espacio por encima del líquido está limitado, las moléculas de vapor ejercen una presión parcial en dicho espacio llamada presión de vapor. Después de un tiempo suficiente, el número de moléculas de vapor que chocan contra la superficie del líquido y de nuevo se condensan es justamente igual al número de las que escapan en un intervalo de tiempo y existe un equilibrio. Como este fenómeno depende únicamente de la actividad molecular, la cual es función de la temperatura, la presión de vapor de un fluido dado depende de la temperatura y aumenta con ella. Cuando la presión encima del líquido se iguala a la presión del vapor del líquido, éste hierve. La ebullición del agua, por ejemplo, puede ocurrir a la temperatura ambiente si la presión se reduce suficientemente. Así a 20° C el agua tiene una presión de vapor de 0,0238 kg/cm² y el mercurio tiene una presión de vapor de 0,00000176 kg/cm².

En muchas situaciones que implican el movimiento de líquidos es posible que se produzcan presiones muy bajas en algunos lugares del

sistema. Bajo tales circunstancias la presión puede llegar a ser igual o menor que la presión del vapor. Cuando ocurre esto, el líquido se transforma en vapor. Este es el fenómeno de cavitación. Se forma una bolsa o cavidad, de vapor, que se extiende rápidamente, que normalmente es barrida hacia afuera desde su punto de origen y entra en las zonas del movimiento donde la presión es mayor que la presión del vapor. La bolsa se colapsa. Este crecimiento y decaimiento de las burbujas de vapor afecta al rendimiento de funcionamiento de las bombas y turbinas hidráulicas y puede dar como resultado erosiones en las partes metálicas de la región de cavitación.

### 1.9 *Tensión superficial. Capilaridad*

En la superficie de contacto entre líquido y gas parece formarse en el líquido una película o capa especial, debida en apariencia a la atracción de las moléculas del líquido situadas por debajo de la superficie. Es un sencillo experimento colocar una aguja pequeña en la superficie del agua en reposo y observar cómo es soportada allí por la película.

Esta propiedad de la película superficial de ejercer una tensión se llama tensión superficial y es la fuerza necesaria para mantener la unidad de longitud de la película en equilibrio. La tensión superficial del agua varía desde 0,00745 kg/m a 20° C hasta 0,00596 kg/m a 100° C. Las tensiones superficiales de otros líquidos se dan en la Tabla 1.1.

Por la acción de la tensión superficial aumenta la presión dentro de una gotita de un líquido o dentro de un pequeño chorro de líquido. Para una pequeña gotita esférica de radio $r$ la presión $p$ necesaria para equi-

***Tabla 1.1 Tensión superficial de líquidos corrientes en contacto con aire a 20° C***

| *Líquido* | *Tensión superficial* $\sigma$*, kg/m* |
|---|---|
| Alcohol etílico | 0,00228 |
| Benceno | 0,00284 |
| Tetracloruro de carbono | 0,00272 |
| Queroseno | 0,00238-0,00327 |
| Agua | 0,00743 |
| Mercurio: | |
| En aire | 0,00523 |
| En agua | 0,00401 |
| En vacío | 0,00495 |
| Aceite: | |
| Lubricante | 0,00357-0,00387 |
| Crudo | 0,00238-0,00387 |



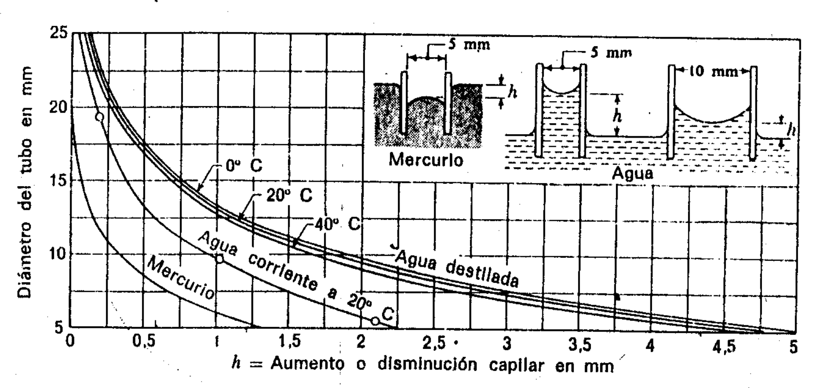



*Fig. 1.4 Capilaridad en tubos de vidrio circulares. (Con licencia de «Hydraulics», por R. L. Daugherty, copyright 1944, McGraw-Hill Book Company.)*

librar la fuerza debida a la tensión superficial $\sigma$ se calcula considerando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre semiesférico (Sec. 2.6),

$$p\pi r^2 = 2\pi r\sigma$$

de donde

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Para un chorro cilíndrico de radio $r$, considerando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre semicilíndrico, resulta

$$p = \frac{\sigma}{r}$$

Ambas ecuaciones prueban que la presión es tanto mayor cuanto menor es el radio de la gotita o del cilindro.

La atracción capilar se origina por la tensión superficial y por el valor de la relación de la adhesión entre líquido y sólido a la cohesión del líquido. Un líquido que *moja* al sólido tiene mayor adhesión que cohesión. En este caso, la acción de la tensión superficial es causa de que el líquido se eleve dentro de un pequeño tubo vertical que se sumerja parcialmente en él. Para líquidos que no mojen al sólido, la tensión superficial tiende a hacer descender el menisco en un pequeño tubo. Cuando el ángulo de contacto entre líquido y sólido se conoce, la altura capilar puede conocerse si se supone una cierta forma al menisco. La Fig. 1.4 muestra la altura capilar del agua y del mercurio en tubos circulares de cristal en el aire.

## *Problemas*

*1.1* Clasificar la sustancia que tiene las velocidades de deformación y las correspondientes tensiones de cortadura siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $du/dy$, rad/seg | 0 | 1 | 3 | 5 |
| $\tau$, kg/m$^2$ | 48,8 | 97,6 | 146,5 | 195,3 |

*1.2* Clasificar las sustancias siguientes (mantenidas a temperatura constante):

(*a*)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $du/dy$, rad/seg | 0 | 3 | 4 | 6 | 5 | 4 |
| $\tau$, kg/m$^2$ | 9,75 | 19,5 | 29,3 | 39 | 29,3 | 19,5 |

(*b*)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $du/dy$, rad/seg | 0 | 0,5 | 1,1 | 1,8 |
| $\tau$, kg/m$^2$ | 0 | 9,75 | 19,5 | 29,3 |

(*c*)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $du/dy$, rad/seg | 0 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 |
| $\tau$, kg/m$^2$ | 0 | 9,75 | 19,5 | 29,3 | 39 |

*1.3* Un líquido newtoniano fluye por un plano inclinado en una lámina delgada de espesor $t$ (ver la Fig. 1.5). La superficie superior está en contacto con el aire que casi no ofrece resistencia al movimiento. Decidir, utilizando la ley de la viscosidad de Newton, qué valor debe tener $du/dy$, medido $y$ normal al plano inclinado, en la superficie superior. ¿Se debe esperar una variación lineal de $u$ con $y$?

*1.4* ¿Qué clase de materiales reológicos serían la pintura y la grasa?

*1.5* Un fluido newtoniano está en el huelgo entre un eje y un cojinete concéntricos. Cuando se aplica al cojinete una fuerza de 50 kg paralela al eje, el primero alcanza una velocidad de 60 cm/seg. Si se aplica una fuerza de 150 kg, ¿qué velocidad alcanzará el cojinete? La temperatura del cojinete permanece constante.

*1.6* Determinar el peso en kilogramos de 5 UTM situadas en un punto en que $g = 9{,}65$ m/seg$^2$.

*1.7* Cuando se emplean una balanza y pesas normalizadas, se observa que un cuerpo equivale en empuje de gravedad a una pesa de 1 kg en un lugar donde $g = 9{,}6$ m/seg$^2$. ¿Cuál sería el peso del cuerpo en una balanza de resorte correctamente calibrada (al nivel del mar) en este lugar?

*1.8* Determinar el valor de la constante de proporcionalidad $g_0$, necesaria para el siguiente conjunto de unidades: $t$ (1.000 kg), UTM, m, seg.

*1.9* En otro planeta la gravedad normal es 2,4 m/seg$^2$; ¿cuál sería el valor de la constante de proporcionalidad $g_0$ en función del kilogramo, el kilogramo masa, el metro y el segundo.

*1.10* Un dinamómetro de resorte correctamente calibrado da como peso de un cuerpo de 23 kg$_m$ la cantidad de 8 kg en un punto fuera de la Tierra. ¿Qué valor tiene $g$ en este punto?

*1.11* El peso de una bolsa de harina de 5 kg, ¿representa una fuerza o la masa de la harina? ¿Cuál es la masa de la harina en UTM? ¿Cuál es la masa y el peso de la harina en un lugar donde la aceleración de la gravedad sea un séptimo de la de la Tierra?



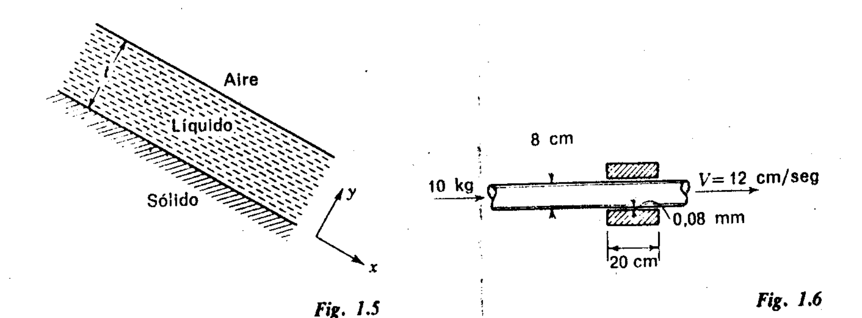



*Fig. 1.5*

*Fig. 1.6*

*1.12* Explicar cada una de las sustituciones numéricas hechas en los cálculos de la primera nota de pie de página de la página 20.

*1.13* Una tensión cortante de 4 dinas/cm$^2$ da lugar a que un fluido newtoniano experimente una deformación angular de 1 rad/seg. ¿Cuál es su viscosidad en centipoises?

*1.14* Una placa, que dista 0,5 mm de otra placa fija, se mueve a una velocidad de 30 cm/seg, requiriéndose para mantener esta velocidad una fuerza por unidad de área de 0,2 kg/m$^2$. Determinar la viscosidad del fluido que ocupa el espacio entre las dos placas, en unidades técnicas.

*1.15* Un eje de 8 cm de diámetro desliza a 12 cm/seg en un cojinete de 20 cm de largo con una holgura de 0,08 mm (Fig. 1.6) cuando se le aplica una fuerza de 10 kg. Determinar la viscosidad del fluido entre el eje y el cojinete.

*1.16* Un volante que pesa 50 kg tiene un radio de giro 30 cm. Cuando gira a 600 r.p.m. se reduce su velocidad en 1 r.p.m./seg a causa de la viscosidad del fluido situado entre el eje y su cojinete. La longitud del cojinete es de 50 mm, el diámetro del eje 25 mm y el huelgo radial de 0,05 mm. Determinar la viscosidad del fluido.

*1.17* Un cilindro de acero mide 30 cm de largo y 2,5 cm de diámetro. Cae debido a su propio peso a la velocidad uniforme de 15 cm/seg por el interior de un tubo de diámetro ligeramente mayor. Entre el cilindro y el tubo hay una película de aceite de espesor constante. Determinar la holgura entre el tubo y el cilindro. La temperatura es 36° C.

*1.18* El diámetro de los pistones de un motor de automóvil de seis cilindros es de 75,00 mm, y el de los cilindros, de 75,13 mm. Determinar la disminución de la fuerza necesaria para mover los pistones cuando el lubricante se calienta de 0 a 120° C. Utilizar la viscosidad del aceite crudo, dada en la Fig. C.1, página 711.

*1.19* ¿Cuánto mayor es la viscosidad del agua a 0° C que a 100° C? ¿Cuánto mayor es su viscosidad cinemática para el mismo intervalo de temperatura?

*1.20* Un fluido tiene una viscosidad de 4 centipoises y una densidad de 800 kg$_m$/m$^3$. Determinar su viscosidad cinemática en el sistema técnico de unidades y en stokes.

*1.21* Un fluido tiene un peso específico relativo de 0,83 y una viscosidad cinemática de 3 stokes. ¿Cuál es su viscosidad en poises?

*1.22* Un cuerpo de 40 kg de peso resbala sobre un plano lubricado e inclinado 30° con la horizontal, apoyándose en una de sus caras planas de 1.800 cm$^2$ de área. Para una viscosidad de 1 poise y una velocidad del cuerpo de 1 m/seg, determinar el espesor de la película de lubricante.

*1.23* ¿Cuál es la viscosidad de la gasolina a 36° C en poises?

*1.24* Determinar la viscosidad cinemática del benceno a 15° C en stokes.

*1.25* ¿Cuántas moléculas de gas hay en un cubo de arista 0,01 mm? ¿Considera usted este número suficiente para determinar los valores medios de las propiedades del fluido en el lugar que ocupa el cubo?

*1.26* ¿Cuál es el volumen específico en metros cúbicos por kilogramo masa y en metros cúbicos por unidad técnica de masa de una sustancia cuya densidad relativa es 0,75?

*1.27* ¿Qué relación hay entre volumen específico y peso específico?

*1.28* La densidad de una sustancia es 2,94 $g_m/cm^3$. ¿Cuánto vale su (*a*) peso específico relativo, (*b*) volumen específico y (*c*) peso específico?

*1.29* Una fuerza, representada por $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, actúa sobre un área cuadrada de lado 5 cm en el plano $xy$. Descomponerla en una fuerza normal y una fuerza cortante. ¿Cuál es la presión y el esfuerzo cortante? Repetir los cálculos para $\mathbf{F} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$.

*1.30* Un gas a 15° C y 2 kg/cm² (abs) ocupa un volumen de 110 l y tiene una constante $R = 26$ kgm/$kg_m$ °K. Determinar la densidad y número de UTM del gas.

*1.31* ¿Cuál es el peso específico del aire a 4 kg/cm² (abs) y 30° C?

*1.32* ¿Cuál es la densidad del vapor de agua a 0,4 kg/cm² (abs) y 10° C, en UTM por metro cúbico?

*1.33* Un gas de peso molecular 44 tiene un volumen de 110 l, una presión absoluta de 1,0 kg/cm² y una temperatura de 340° K. ¿Cuál es su volumen específico y su peso específico?

*1.34* 0,7 $kg_m$ de hidrógeno se mantienen confinados en un volumen de 30 l a −40° C. ¿Cuál es la presión?

*1.35* Expresar el módulo volumétrico de elasticidad en función de la variación de densidad en lugar de la variación de volumen.

*1.36* Para un módulo volumétrico de elasticidad constante, ¿cómo varía la densidad de un fluido con la presión?

*1.37* ¿Cuál es el módulo de elasticidad volumétrico de un líquido cuya densidad aumenta un 0,02 por 100 para un aumento de presión de 0,5 kg/cm²?

*1.38* Si el agua tiene un módulo volumétrico de elasticidad $K = 21.000$ kg/cm², ¿cuál es la presión requerida para reducir su volumen en un 0,5 por 100?

*1.39* Un depósito de acero dilata un 1 por 100 en volumen cuando la presión interior aumenta en 700 kg/cm². A presión normal, 1 kg/cm² absoluto contiene 500 $kg_m$ de agua de densidad $\rho = 10^3$ $kg_m/m^3$. Para $K = 21.000$ kg/cm², cuando está lleno, ¿cuántos kilogramos masa hay que añadir para aumentar la presión a 700 kg/cm²?

*1.40* ¿Qué valor tiene para el aire a 5 kg/cm² (abs) el módulo volumétrico isotérmico?

*1.41* ¿A qué presión se puede esperar cavitación en el interior de una bomba que opera con agua a 36° C?

*1.42* ¿Cuál es la presión en el interior de una gota de agua de 0,05 mm de diámetro a 20° C, si en el exterior de la gota existe la presión atmosférica normal de 1,033 kg/cm²?

*1.43* Un pequeño chorro circular de mercurio de 0,012 cm de diámetro sale de un orificio. ¿Qué diferencia de presión hay entre el interior y el exterior del chorro a 20° C?

*1.44* Determinar la altura a que asciende por capilaridad agua destilada a 40° C en un tubo de vidrio de 6 mm de diámetro interior.



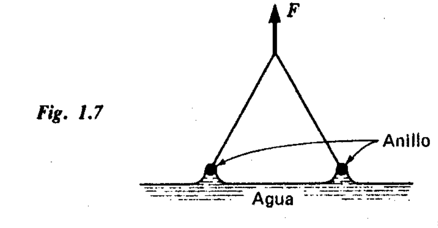



*Fig. 1.7*

*1.45* ¿Qué diámetro de tubo de vidrio se necesita para que el nivel del agua en el interior de él no esté afectado por los efectos de capilaridad hasta un valor de más de 0,5 mm?

*1.46* Utilizando los datos en la Fig. 1.4, calcular la altura a que ascenderá el agua por capilaridad entre dos placas de vidrio paralelas, separadas una de otra 0,5 mm.

*1.47* Un método para determinar la tensión superficial de un líquido consiste en hallar la fuerza necesaria para retirar un anillo de alambre de platino de la superficie (ver la Fig. 1.7). Calcular la fuerza necesaria para retirar un anillo de 25 mm de diámetro de la superficie de agua a 20° C. ¿Por qué se emplea platino como material para el anillo?

*1.48* Un fluido es una sustancia que:

(*a*) se expansiona siempre hasta llenar cualquier recipiente;
(*b*) es prácticamente incompresible;
(*c*) no puede estar sometido a fuerzas de cortadura;
(*d*) no puede permanecer en reposo bajo la acción de cualquier fuerza de cortadura por pequeña que ésta sea;
(*e*) tiene la misma tensión de cortadura en un punto con independencia de su movimiento.

*1.49* Un objeto de 1 $kg_m$ pesa 0,95 kg en una balanza de resorte. El valor de $g$ en este lugar es, en metros por segundo,

(*a*) 9,32 (*b*) 9,78 (*c*) 9,81 (*d*) 10,33 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.50* En un lugar donde $g = 9{,}16$ m/seg², ¿a cuántos kilos masa equivalen 2 UTM?

(*a*) 18,10 (*b*) 18,61 (*c*) 19,62 (*d*) no son unidades equivalentes (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.51* El peso en kilos de 3 UTM en un planeta donde $g = 3$ m/seg² es

(*a*) 3 (*b*) 0,8 (*c*) 10 (*d*) 30 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.52* La ley de Newton de la viscosidad relaciona:

(*a*) presión, velocidad y viscosidad;

(*b*) tensión de cortadura y velocidad angular de deformación en un fluido;
(*c*) tensión de cortadura, temperatura, viscosidad y velocidad;
(*d*) presión, viscosidad y velocidad angular de deformación;
(*e*) tensión de cortadura remanente, velocidad angular de deformación y viscosidad.

***1.53*** La viscosidad tiene las dimensiones:

(*a*) $FL^{-2}T$ (*b*) $FL^{-1}T^{-1}$ (*c*) $FLT^{-2}$ (*d*) $FL^2T$
(*e*) $FLT^2$

***1.54*** Decir cuál es la respuesta *errónea*. Las fuerzas de cortadura aparentes:

(*a*) no se originan cuando el fluido está en reposo;
(*b*) se originan debido a la cohesión cuando el fluido está en reposo;
(*c*) dependen de los intercambios de cantidades de movimiento moleculares;
(*d*) dependen de las fuerzas cohesivas;
(*e*) no se originan en un fluido sin fricción, independientemente de su movimiento.

***1.55*** Son unidades correctas de la viscosidad dinámica:

(*a*) dina seg$^2$/cm (*b*) $g_m$/cm seg$^2$ (*c*) $g_m$ seg/cm
(*d*) dina cm/seg$^2$ (*e*) dina seg/cm$^2$

***1.56*** La viscosidad, expresada en poises, se convierte en unidades técnicas de viscosidad multiplicando por el factor

(*a*) $\frac{1}{98}$ (*b*) 98 (*c*) $\rho$ (*d*) $1/\rho$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.57*** Las dimensiones de la viscosidad cinemática son:

(*a*) $FL^{-2}T$ (*b*) $ML^{-1}T^{-1}$ (*c*) $L^2T^2$ (*d*) $L^2T^{-1}$
(*e*) $L^2T^{-2}$

***1.58*** Para convertir las unidades técnicas de viscosidad cinemática a stokes se deben multiplicar por el factor

(*a*) $\frac{1}{98}$ (*b*) $\frac{1}{10}$ (*c*) 98 (*d*) $10^4$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.59*** La viscosidad cinemática del queroseno a 30° C en m$^2$/seg es:

(*a*) $1{,}86 \times 10^{-6}$ (*b*) $3{,}0 \times 10^{-6}$ (*c*) $1{,}86 \times 10^{-5}$
(*d*) $3{,}0 \times 10^{-5}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores



***1.60*** La viscosidad cinemática del aire seco a −4° C y 2 kg/cm$^2$ es en m$^2$/seg:

(*a*) $6{,}4 \times 10^{-6}$ (*b*) $1{,}3 \times 10^{-5}$ (*c*) $6{,}4 \times 10^{-5}$
(*d*) $1{,}3 \times 10^{-4}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.61*** Para $\mu$ = 0,60 poises, densidad relativa = 0,60, $\nu$ en stokes es:

(*a*) 2,78 (*b*) 1,0 (*c*) 0,60 (*d*) 0,36 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.62*** Para $\mu = 2{,}0 \times 10$ UTM/m seg, el valor de $\mu$ en kg seg/m$^2$ es:

(*a*) $1{,}96 \times 10$ (*b*) $2{,}0 \times 10$ (*c*) $2{,}04 \times 10$ (*d*) $1{,}03 \times 10$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.63*** Para $\nu = 3 \times 10^{-4}$ stokes y $\rho$ = 0,8 $g_m$/cm$^3$, $\mu$ en UTM/m seg es:

(*a*) $24{,}5 \times 10^{-7}$ (*b*) $37{,}75 \times 10^{-7}$ (*c*) $38{,}3 \times 10^{-7}$
(*d*) $7{,}92 \times 10^{-6}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.64*** Un gas perfecto

(*a*) tiene viscosidad cero (*b*) tiene viscosidad constante (*c*) es incompresible (*d*) satisface $p\rho = RT$ (*e*) no cumple ninguna de estas condiciones

***1.65*** El peso molecular de un gas es 28. El valor de $R$ en kgm por UTM y grado Kelvin es

(*a*) 8,30 (*b*) 9,22 (*c*) 258 (*d*) 297 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.66*** La densidad del aire a 5° C y 7 kg/cm$^2$ (abs) en UTM/m$^3$ es

(*a*) 0,0089 (*b*) 0,88 (*c*) 11,02 (*d*) 28,40 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.67*** ¿Cuántos kilos masa de gas monóxido de carbono a −7° C y 2 kg/cm$^2$ (abs) hay en un volumen de 110 dm$^3$?

(*a*) 0,00206 (*b*) 0,0092 (*c*) 0,273 (*d*) 987 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***1.68*** Un recipiente contiene 1 kg$_m$ de aire a 50° C y 8 kg/cm$^2$ (abs). Si se añaden 1,5 kg$_m$ de aire y la temperatura final es de 100° C, la presión final en kg/cm$^2$ absolutos es

(*a*) 21,0 (*b*) 25,3 (*c*) 42,1 (*d*) indeterminada
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.69* El módulo de elasticidad volumétrico $K$ para un gas a temperatura constante $T_0$ es

(*a*) $p/\rho$ (*b*) $RT_0$ (*c*) $\rho p$ (*d*) $\rho RT_0$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.70* El módulo de elasticidad volumétrico:

(*a*) es independiente de la temperatura;
(*b*) aumenta con la presión;
(*c*) tiene las dimensiones de $1/p$;
(*d*) es tanto mayor cuanto más compresible es el fluido;
(*e*) es independiente de la presión y la viscosidad.

*1.71* Para un aumento de presión de 70 kg/cm² la densidad del agua aumenta aproximadamente en tanto por ciento:

(*a*) $\frac{1}{300}$ (*b*) $\frac{1}{30}$ (*c*) $\frac{1}{3}$ (*d*) $\frac{1}{2}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.72* Se aplica una presión de 10 kg/cm² a 280 dm³ de un líquido, lo que da lugar a que el volumen se reduzca en 0,56 dm³. El módulo de elasticidad en kg/cm² es

(*a*) −53 (*b*) 53 (*c*) 530 (*d*) 5.300 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*1.73* La tensión superficial tiene las dimensiones

(*a*) $F$ (*b*) $FL^{-1}$ (*c*) $FL^{-2}$ (*d*) $FL^{-3}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

# 2

# *Estática de los fluidos*

La Estática de los fluidos comprende dos partes: el estudio de la presión y de sus variaciones a través del fluido, y el estudio de las fuerzas debidas a la presión sobre superficies finitas. El caso especial de fluidos que en su movimiento se comportan como sólidos, se incluye en la estática por la semejanza de fuerzas que implica. Al no haber movimiento de una capa del fluido en relación con la adyacente, no habrá tensiones de cortadura en el fluido. Por eso en la estática de los fluidos sobre un cuerpo libre únicamente actúan fuerzas normales debidas a la presión.

## *2.1 Presión en un punto*

La presión media se calcula dividiendo la fuerza normal que actúa sobre un área plana por dicha área. La presión en un punto es el límite del cociente de la fuerza normal a un área por dicha área cuando ésta tiende a cero en el punto. En un punto de un fluido en reposo existe la misma presión en todas las direcciones. Esto significa que sobre un elemento superficial de área $\delta A$ que gira alrededor de su centro, sumergido totalmente en un fluido en reposo actúa una fuerza de magnitud constante sobre cada una de las caras, cualquiera que sea su orientación.

Para demostrar esto consideremos un cuerpo libre de forma de pequeña cuña en el punto $(x,y)$ en un fluido en reposo (Fig. 2.1). Como no hay fuerzas de cortadura las únicas fuerzas son las normales a las superficies y la debida a la gravedad. Así las ecuaciones de equilibrio en las direcciones $x$- e $y$- son, respectivamente,

$$\Sigma F_x = p_x\,\delta y - p_s\,\delta s \operatorname{sen}\theta = \frac{dx\,dy}{2}\rho a_x = 0$$

$$\Sigma F_y = p_y\,\delta x - p_s\,\delta s \cos\theta - \gamma\frac{\delta x\,\delta y}{2} = \frac{dx\,dy}{2}\rho a_y = 0$$

en las cuales $p_x$, $p_y$, $p_s$ son las presiones medias en las tres caras, $\gamma$ es el peso específico del fluido, y $\rho$ es su densidad. Pasando al límite cuando el cuerpo libre se reduce a tamaño nulo, de forma que la cara inclinada

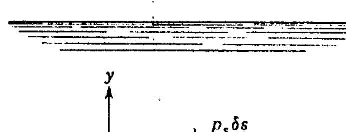
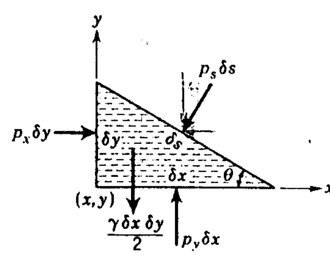




*Fig. 2.1 Diagrama de cuerpo libre de una partícula de forma de cuña.*

se aproxime a $(x,y)$ conservando el ángulo $\theta$ y usando las relaciones geométricas,

$$\delta s \text{ sen } \theta = \delta y \qquad \delta s \cos \theta = \delta x$$

las ecuaciones se reducen a

$$p_x \, \delta y - p_s \, \delta y = 0 \qquad p_y \, \delta x - p_s \, \delta x - \gamma \frac{\delta x \, \delta y}{2} = 0$$

El último término de la segunda ecuación es un infinitésimo de orden superior y puede despreciarse. Dividiendo por $\delta y$ y $\delta x$, respectivamente, las ecuaciones nos dan:

$$p_s = p_x = p_y \tag{2.1.1}$$

Como $\theta$ es un ángulo arbitrario, esta ecuación nos prueba que la presión es la misma en todas las direcciones en un punto de un fluido en reposo. Aunque la demostración se ha hecho en el caso bidimensional, podría haberse hecho para el caso tridimensional con las ecuaciones de equilibrio de un pequeño tetraedro de fluido con tres de las caras en los planos coordenados y la cuarta arbitrariamente inclinada.

Si el fluido estuviese en movimiento de manera que una capa se moviese en relación con la adyacente, aparecerían las tensiones de cortadura y las normales no serían, en general, iguales en las distintas direcciones por el punto. Entonces la presión se define como el promedio de tres tensiones de compresión normales cualesquiera mutuamente perpendiculares en un punto,

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}$$

En un fluido ficticio de viscosidad nula, es decir, en un fluido sin rozamiento, no se originaría ninguna tensión de cortadura en cualquier movimiento del fluido y entonces la presión sería la misma en todas las direcciones.





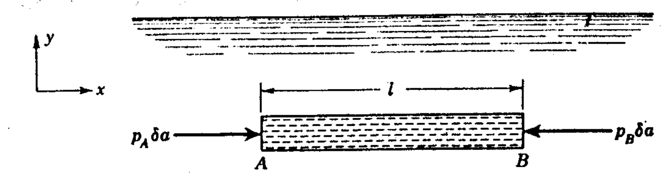




*Fig. 2.2 Dos puntos a la misma altura en un fluido estático.*

## 2.2 Variaciones de la presión en un fluido en reposo

Las variaciones de presión en una dirección cualquiera en un fluido en reposo pueden obtenerse estudiando las variaciones a lo largo de una línea horizontal y de una línea vertical.

Los dos puntos $A$ y $B$ de la Fig. 2.2 están en un plano horizontal. En un cuerpo libre cilíndrico de eje $AB$ y de bases normales al eje en $A$ y $B$ las únicas fuerzas que actúan en dirección axial son $p_A \, \delta a$ y $p_B \, \delta a$, siendo $\delta a$ el área de la sección recta del cilindro. Por consiguiente, $p_A = p_B$, lo que prueba que en *dos puntos del mismo plano horizontal en una masa continua de un fluido en reposo existe la misma presión*. Por consiguiente, no hay variación de presión en una dirección horizontal para un fluido en reposo. Este hecho se puede establecer matemáticamente por $\partial p/\partial x = 0$. Aunque la demostración se ha hecho para dos puntos que pueden unirse por una línea recta a través del fluido, puede extenderse a casos análogos al de los puntos 1 y 2 de la Fig. 2.3, cuando se estudien las variaciones de presión a lo largo de una línea vertical.

### *Ecuación fundamental de la Hidrostática. Variación de la presión en un fluido incompresible*

Como no hay variación de presión en una dirección horizontal, la variación debe tener lugar en una dirección vertical. Consideremos un cuerpo libre de un fluido (Fig. 2.4) consistente en un prisma de área sección recta de $A$, con un eje vertical de altura $\delta y$. La base está a una altura

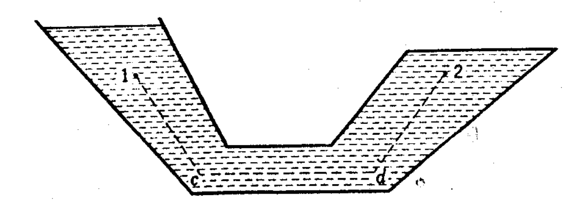



*Fig. 2.3 Trayectorias para deducir la variación de presión en un fluido.*

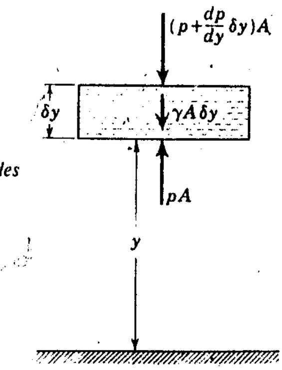



*Fig. 2.4 Diagrama de cuerpo libre para las fuerzas verticales que actúan sobre un elemento de fluido.*

$\frac{P}{V}$ : Peso específico

$\frac{m}{V}$ Masa específica o densidad

$y$ por encima de un origen arbitrario. La presión en $y$ es $p$ y en $y + \delta y$ es $p + (\partial p/\partial y)\,\delta y$. La derivada parcial $\partial p/\partial y$ se emplea para recalcar que el análisis se refiere a la variación de presión en la dirección $y$. Como se ha demostrado antes que $p$ no depende de $x$ (es decir, $\partial p/\partial x = 0$), se tiene, por los métodos del Apéndice B, que $\partial p/\partial y = dp/dy$. El peso del cuerpo libre es $\gamma A\,\delta y$, siendo $\gamma$ el peso específico del fluido a la altura $y$. Como no existen tensiones de cortadura, las tres fuerzas de la Fig. 2.4 deben estar en equilibrio, de tal manera que

$$pA - \left(p + \frac{dp}{dy}\,\delta y\right) A - \gamma A\,\delta y = 0$$

Cuando la ecuación se simplifica dividiendo por el volumen, $A\,\delta y$, resulta

$$dp = -\gamma\,dy \qquad (2.2.1)$$

Esta sencilla ecuación diferencial relaciona la variación de presión con el peso específico y con la variación de altura y sirve indistintamente para fluidos compresibles e incompresibles.

Para fluidos que puedan considerarse incompresibles, $\gamma$ es constante, y la Ec. (2.2.1), cuando se integra, da

$$p = -\gamma y + c$$

siendo $c$ la constante de integración. La ley hidrostática de variación de presión se escribe corrientemente en la forma

$$p = \gamma h \qquad (2.2.2)$$

en la cual $h$ se mide verticalmente hacia abajo ($h = -y$) desde la superficie libre del líquido y $p$ es el incremento de presión desde la superficie libre. Se puede deducir la Ec. (2.2.2) tomando como cuerpo libre fluido



una columna vertical de líquido de altura finita $h$ con su superficie superior en la superficie libre. Se deja como ejercicio del lector.

*Ejemplo 2.1* Un tanque abierto contiene 2 m de agua cubiertos con 1 m de aceite de densidad relativa 0,83. Calcular la presión en la superficie de separación agua-aceite y en el fondo del tanque.

En la superficie de separación, $h = 1$, $\gamma = 0{,}83 \times 1.000 = 830$ kg/m³, y

$$p = \gamma h = 830 \text{ kg/m}^2$$

En el fondo del tanque la presión es la de la superficie de separación más $\gamma h$ para el agua, o sea:

$$p = 830 + 2 \times 1.000 = 2.830 \text{ kg/m}^2$$

### *Variación de la presión en un fluido compresible*

Cuando el fluido es un gas ideal en reposo y a temperatura constante, de la Ec. (1.6.2)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \qquad (2.2.3)$$

Cuando el valor de $\gamma$ en la Ec. (2.2.1) se sustituye por $\rho g$ y se elimina $\rho$ entre las Ecs. (2.2.1) y (2.2.3),

$$dy = \frac{-p_0}{g\rho_0}\frac{dp}{p} \qquad (2.2.4)$$

Se debe recordar que si $\rho$ está en kg/m³, entonces $\gamma = g\rho/g_0$ con $g_0 = 9{,}81$ $kg_m$-m/kg-seg². Si $p = p_0$ cuando $\rho = \rho_0$, integrando entre límites

$$\int_{y_0}^{y} dy = -\frac{p_0}{g\rho_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}$$

o sea,

$$y - y_0 = -\frac{p_0}{g\rho_0}\ln\frac{p}{p_0} \qquad (2.2.5)$$

siendo ln el logaritmo natural o neperiano. De aquí,

$$p = p_0 \exp - \frac{y - y_0}{p_0/g\rho_0} \qquad (2.2.6)$$

que nos da la variación de la presión con la altura en un gas a temperatura constante.

Cuando el gas ideal tiene un gradiente de temperatura constante expresado por la fórmula

$$T = T_0 + \beta y \tag{2.2.7}$$

Para la atmósfera normal $\beta = -0{,}0065°$ C/m hasta la estratosfera, el peso específico puede calcularse en función de la presión y de la altura a partir de la ley de los gases perfectos:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p}{R(T_0 + \beta y)} \tag{2.2.8}$$

La sustitución de este valor en la Ec. (2.2.1) permite determinar $p$ en función de $y$ por integración de la ecuación diferencial resultante.

***Ejemplo 2.2*** Suponiendo una temperatura constante en la atmósfera, calcular la presión y la densidad del aire a una altura de 5.000 m. Al nivel del mar, $p = 1$ kg/cm² y $\rho = 0{,}1245$ UTM/m³; por tanto,

$$\frac{p_0}{g\rho_0} = 10^4 \times \frac{1}{9{,}81 \times 0{,}1245} = 8.190 \text{ m} \qquad y_0 = 0$$

Según la Ec. (2.2.6)

$$p = 10^4 \exp\left(-\frac{5.000}{8.190}\right) = 5.430 \text{ kg/m}^2 = 0{,}543 \text{ kg/cm}^2$$

A partir, ahora, de la Ec. (2.2.3)

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p = \frac{0{,}1245}{10^4} \times 5.430 = 0{,}0677 \text{ UTM/m}^3$$

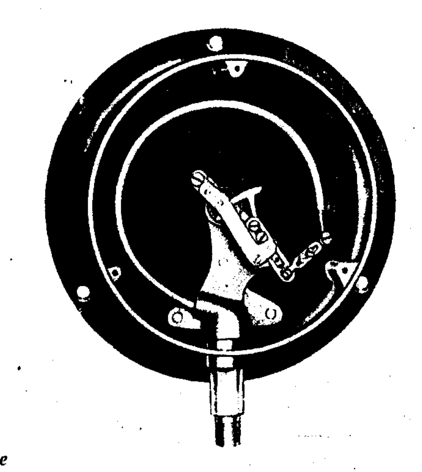
Cuando se tiene en cuenta la compresibilidad de un líquido, para un módulo de elasticidad volumétrico constante, los cálculos se harán con las Ecs. (2.2.1) y (1.7.1).

## 2.3 *Unidades y escalas de medida de la presión*

Las presiones pueden expresarse con referencia a un origen arbitrario. Los orígenes más usuales son el *vacío absoluto y la presión atmosférica local*. Cuando se toma como origen el vacío absoluto, la presión se llama *presión absoluta*, y cuando se toma como origen la presión atmosférica local, se llama *presión manométrica*.

El manómetro *tipo resorte* (Fig. 2.5) es uno de los aparatos típicos que se usan para medir presiones manométricas. El elemento que soporta la presión es un tubo metálico curvado, cerrado por un extremo y que por el otro se conecta al recipiente que contiene el fluido cuya presión va a medirse. Cuando la presión interna aumenta el tubo tiende a ende-





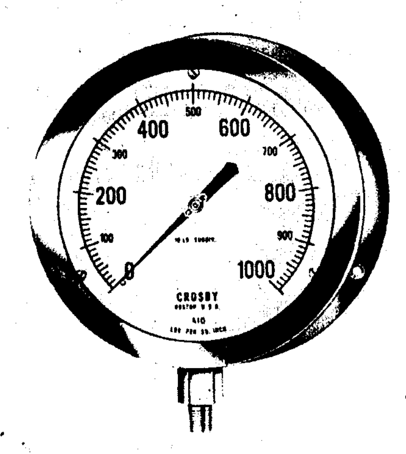



***Fig. 2.5*** *Manómetros. (Crosby Steam Gage and Valve Co.)*

rezarse tirando de un eslabón que actúa sobre la aguja obligándola a moverse. En la esfera se lee cero cuando en el interior y en el exterior del tubo reina la misma presión, cualesquiera que sean sus valores particulares. La esfera puede ser graduada con las unidades que se prefieran, tales como kg/cm², kg/m², mm de mercurio o metros de agua. Por su construcción, este manómetro sirve para medir presiones relativas a la presión del medio que rodea al tubo, que suele ser la presión atmosférica local.

La Fig. 2.6 ilustra sobre los orígenes y las relaciones de las unidades de las escalas más frecuentes. La presión atmosférica normal es la presión media al nivel del mar, 760 mm de mercurio. Cuando la presión se expresa por la altura de una columna de líquido, se refiere a la fuerza por unidad de área en la base de una columna del líquido y de la altura

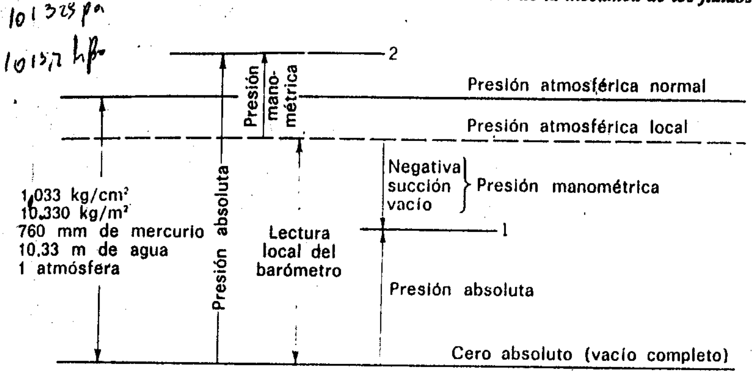



*Fig. 2.6 Unidades y escalas para medida de la presión.*

dadas. La variación de la presión con la altura en un líquido viene dada por la Ec. (2.2.2),

$$p = \gamma h \tag{2.3.1}$$

que expresa la relación entre la altura $h$ de una columna fluida de peso específico $\gamma$ y la presión $p$. En un sistema coherente de unidades $p$ se mide en kg/m², $\gamma$ en kg/m³ y $h$ en metros. Para el agua $\gamma$ se toma 1.000 kg/m³. Como el peso específico de cualquier líquido es su peso específico relativo $S$ por el peso específico del agua, la Ec. (2.3.1) se convierte en

$$p = 1.000Sh$$

Cuando la presión quiere expresarse en kg/cm², habrá que dividir por $10^4$, y resulta:

$$p = \frac{10^3}{10^4} Sh = 0{,}1Sh \text{ kg/cm}^2 \tag{2.3.2}$$

en donde $h$ sigue midiéndose en m†.

† En la Ec. (2.3.1) se puede expresar la presión atmosférica normal en kilos por centímetro cuadrado

$$p_{\text{kg/cm}^2} = \frac{10^3}{10^4} \times 13{,}6 \times \frac{760}{10} = 1{,}033 \text{ kg/cm}^2$$

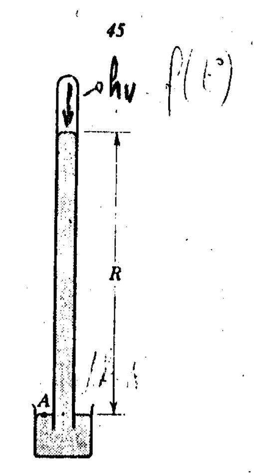
cuando $S = 13{,}6$ para el mercurio. Al multiplicar 1 por $10^4$ se obtiene la presión en kg/m². Dividiendo por $10^3$ kg/m³ tenemos 10 m de columna de agua. Cualquiera de estas designaciones que se refieren a la presión atmosférica normal se puede llamar *una atmósfera*, si se entiende siempre que es una atmósfera normal y se mide desde el cero absoluto. Estas diversas designaciones de una atmósfera normal (Fig. 2.6) son equivalentes y proporcionan los medios convenientes para pasar de un sistema a otro de unidades. Por ejemplo, para expresar 100 m de columna de agua en kg/cm²

$$\tfrac{100}{10} \times 1 = 10 \text{ kg/cm}^2$$

ya que $\frac{100}{10}$ es el número de atmósferas normales y cada atmósfera normal vale 1 kg/cm².



*Fig. 2.7 Barómetro de mercurio.*




La presión atmosférica local se mide con un barómetro de mercurio (Fig. 2.7) o con un barómetro anaeroide, el cual mide la diferencia de presión entre la atmósfera y una caja o tubo, en que se ha hecho el vacío, de manera análoga al manómetro de resorte con la particularidad de que en el tubo se ha hecho el vacío y se ha cerrado.

Un barómetro de mercurio consiste en un tubo de vidrio cerrado en un extremo que se ha llenado de mercurio o invertido, de manera que el extremo abierto esté sumergido en mercurio. Tiene adosada una escala para que pueda medirse la altura de la columna $R$ (Fig. 2.7). El espacio situado encima del mercurio contiene vapor de mercurio. Si la presión del vapor de mercurio $h_v$ se da en mm de mercurio, la presión en $A$ puede expresarse:

$$h_v + R'' = h_A \qquad \text{mm de mercurio}$$

Aunque $h_v$ es una función de la temperatura, es siempre muy pequeño a las temperaturas atmosféricas usuales. La presión barométrica varía con la altura sobre el nivel del mar y con las condiciones climatológicas.

En la Fig. 2.6 el valor de una presión puede colocarse verticalmente en el gráfico que expresa las posiciones del cero absoluto y de la presión atmosférica local. Si el punto está por debajo de la línea de presión atmosférica local cuando se tome ésta como referencia, la presión es *negativa*, una *succión* o un *vacío*. Por ejemplo, la presión absoluta de 460 mm de mercurio con una presión atmosférica local de 760 mm de mercurio equivale a −300 mm de mercurio, una succión de 300 mm de mercurio o un vacío de 300 mm de mercurio. Se debe tener en cuenta que

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{bar}} + p_{\text{man}}$$

Para evitar confusiones, en este libro adoptaremos el convenio de que la *presión es la manométrica, salvo que expresamente se diga que es absoluta*, con la excepción de la presión *atmosférica*, que se expresa siempre en unidades de presión absoluta.

*Ejemplo 2.3* Expresar 0,25 kg/cm² de otras maneras habituales. La lectura barométrica es de 740 mm de mercurio.

Sobre el gráfico de la Fig. 2.6 el punto representativo sería el 2, y otras unidades relativas que se usan habitualmente serían

(*a*) $0{,}25 \times 10^4 = 2.500$ kg/m²
(*b*) $(0{,}25/1{,}033) \times 760 = 184{,}0$ mm de mercurio
(*c*) $(0{,}25/1{,}033) \times 10{,}33 = 2{,}5$ m de agua

Con unidades absolutas

(*d*) De (*b*) $184{,}0 + 740 = 924{,}0$ mm de mercurio absolutos
(*e*) De (*d*) $924{,}0/760 = 1{,}215$ atm
(*f*) De (*e*) $1{,}215 \times 1{,}033 = 1{,}255$ kg/cm² absolutos
(*g*) De (*f*) $1{,}255 \times 10^4 = 12{,}550$ kg/m² absolutos
(*h*) De (*d*) $1{,}215 \times 10{,}33 = 12{,}55$ m de agua absolutos

El gráfico de la Fig. 2.6 es muy útil para trabajar con las distintas unidades de presión y debe ser cuidadosamente estudiado.

## 2.4 Manómetros

Los manómetros son aparatos que emplean columnas líquidas para determinar las diferencias de presión. El manómetro más elemental, llamado corrientemente *piezómetro*, está representado en la Fig. 2.8*a*; sirve para medir la presión en un líquido cuando es superior a la presión atmosférica local. Un tubo de cristal vertical se conecta con el interior del recipiente. El líquido se eleva en el tubo hasta que alcanza el equilibrio. La presión viene dada entonces por la distancia vertical $h$ desde el menisco (superficie del líquido) al punto donde se ha de medir la presión, expresada en m, del líquido del recipiente. Es obvio que el piezómetro no sirve para presiones manométricas negativas porque el aire entraría en el recipiente a través del tubo. Es también impracticable para medir grandes presiones en $A$, porque el tubo de cristal necesitaría ser muy largo. Si el peso específico relativo del líquido es $S$, la presión en $A$ es $hS$ m de agua.

Para medir presiones manométricas pequeñas negativas o positivas en un líquido, el tubo debe tener la forma representada en la Fig. 2.8*b*. Con esta disposición el menisco puede quedar por debajo de $A$, como se ve en la figura. Como la presión relativa en el menisco es nula y la presión *disminuye* con la altura,

$$h_A = -hS \qquad \text{m de agua}$$

Para grandes presiones manométricas negativas o positivas se emplea



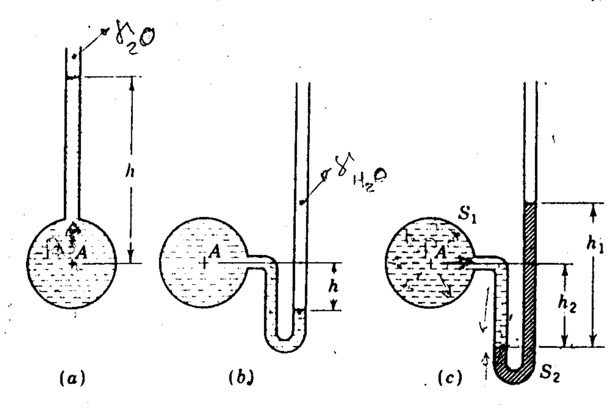



*Fig. 2.8 Ejemplos de manómetros simples.*

un segundo líquido de mayor peso específico relativo (Fig. 2.8*c*), que debe ser inmiscible con el primer fluido, que también puede ser un gas. Si el peso específico relativo del fluido en $A$ es $S_1$ y el peso específico relativo del líquido manométrico es $S_2$, la ecuación de la presión en $A$ puede escribirse partiendo bien de $A$ o del menisco superior y yendo a través del manómetro; así,

$$h_A + h_2S_1 - h_1S_2 = 0$$

siendo $h_A$ la presión desconocida, expresada en metros de columna de agua, y $h_1$ y $h_2$ también en metros. Si $A$ contiene un gas, $S_1$ es generalmente tan pequeño que puede despreciarse $h_2S_1$.

Para resolver todos los problemas relacionados con manómetros puede seguirse un procedimiento general:

1. Partir de un extremo (o de un menisco cualquiera si el circuito es continuo) y escribir la presión en unidades convenientes (por ejemplo, en metros de agua) o por una letra si es desconocida.
2. Sumar algebraicamente a ésta el cambio de presión, en la misma unidad, desde un menisco al otro (más si el próximo menisco está más bajo y menos si está más alto). (Cuando se usen metros de agua, ésta es el producto de la diferencia de alturas en metros por el peso específico relativo del fluido.)
3. Continuar así hasta que se alcance el otro extremo del manómetro (o el menisco de partida) e igualar la expresión a la presión en aquel punto, conocida o desconocida.

La expresión contendrá una incógnita para un manómetro simple o nos dará una diferencia de presiones para un manómetro diferencial. La forma de la expresión es

$$p_0 - (y_1 - y_0)\gamma_0 - (y_2 - y_1)\gamma_1 - (y_3 - y_2)\gamma_2 - (y_4 - y_3)\gamma_3 - \cdots - (y_n - y_{n-1})\gamma_{n-1} = p_n$$

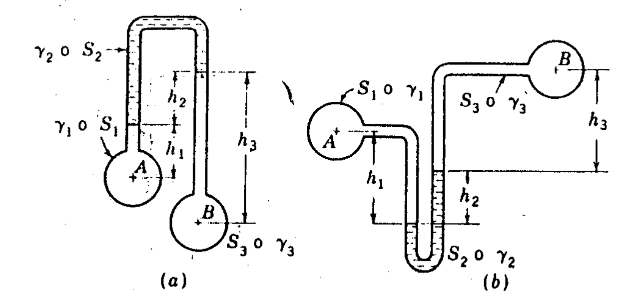



*Fig. 2.9 Manómetros diferenciales.*

siendo $y_0, y_1, \ldots, y_n$ las alturas de cada menisco en metros, y $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$, los pesos específicos de las columnas fluidas. La anterior expresión nos da la solución en kilogramos por metro cuadrado que podrá convertirse en otras unidades usando las fórmulas de conversión de la Figura 2.6.

Un manómetro diferencial (Fig. 2.9) determina la diferencia de presiones entre dos puntos $A$ y $B$, cuando la presión real en cualquier otro punto del sistema no puede ser determinada. Aplicando a la Fig. 2.9*a* el método anteriormente expuesto, resulta:

$$p_A - h_1\gamma_1 - h_2\gamma_2 + h_3\gamma_3 = p_B$$

o sea,

$$p_A - p_B = h_1\gamma_1 + h_2\gamma_2 - h_3\gamma_3$$

Análogamente, para la Fig. 2.9*b*

$$p_A + h_1\gamma_1 - h_2\gamma_2 - h_3\gamma_3 = p_B$$

o sea,

$$p_A - p_B = -h_1\gamma_1 + h_2\gamma_2 + h_3\gamma_3$$

No es recomendable el aprenderse de memoria la fórmula que da la presión de un manómetro particular, pues es preferible en cada caso aplicar el procedimiento general anteriormente expuesto.

Si se expresan las presiones en $A$ y $B$ en m de agua, los resultados anteriores se pueden escribir, para la Fig. 2.9*a*, de la manera siguiente:

$$h_A - h_B = h_1S_1 + h_2S_2 - h_3S_3 \quad \text{m de agua}$$

Análogamente, para la Fig. 2.9*b*

$$h_A - h_B = -h_1S_1 + h_2S_2 + h_3S_3$$



donde $S_1$, $S_2$ y $S_3$ son los pesos específicos relativos de los líquidos del sistema.

***Ejemplo 2.4*** En la Fig. 2.9*a*, el líquido de $A$ y $B$ es agua, y el líquido del manómetro es aceite de peso específico relativo 0,80. $h_1$ = 0,25 m, $h_2$ = 0,15 m, $h_3$ = 0,50 m. (*a*) Determinar $p_A - p_B$ en kg/cm². (*b*) Si $p_B$ = 0,75 kg/cm² y la lectura barométrica es 720 mm de mercurio, calcular la presión manométrica en $A$ en kg/m²

(*a*) $h_A - 0{,}25 \times 1 - 0{,}15 \times 0{,}80 + 0{,}50 \times 1 = h_B$
$h_A - h_B = 0{,}25 + 0{,}12 - 0{,}5 = -0{,}13$ m de agua

y

(*b*) $p_A - p_B = -0{,}13(\text{m}) \times 1000(\text{kg/m}^3) = -130 \text{ kg/m}^2 = -0{,}013 \text{ kg/cm}^2$
$p_A = p_B - 0{,}013 = 0{,}75 - 0{,}013 = 0{,}737 \text{ kg/cm}^2$

Presión atmosférica local = (720/760) × 1,033 = 0,980 kg/cm².
En la Fig. 2.6,

$p_A = 0{,}737 - 0{,}980 = -0{,}243$ kg/m²

y

$p_A = -0{,}243 \times 10^4 = 2430$ kg/m² de vacío

## Micromanómetros

En el mercado se encuentran varios tipos de manómetros para la determinación de diferencias de presión muy pequeñas o para determinaciones precisas de presión. Un tipo mide con gran exactitud la diferencia de elevación de los dos meniscos de un manómetro. Por medio de pequeños telescopios con retículos horizontales que pueden desplazarse verticalmente por medio de cremallera y piñón con movimiento lento mandado por tornillo, de tal modo que el retículo pueda ajustarse con gran exactitud, se puede medir con nonius la diferencia de elevación de los meniscos.

El micromanómetro de gancho representado en la Fig. 2.10 requiere depósitos de diámetros suficientemente grandes para poder usar los ganchos. El de la Fig. 2.10*a* es para gases y el de la Fig. 2.10*b* para líquidos.

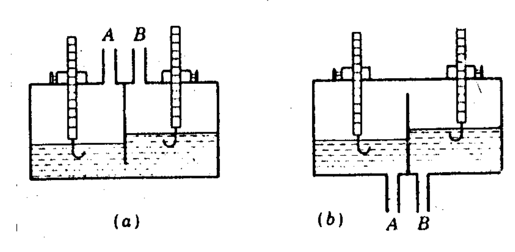



*Fig. 2.10 Micromanómetros de gancho. (a) Para gases; (b) para líquidos.*

Un gancho con una punta cónica se coloca en una varilla graduada que se desplaza verticalmente en una caja estanca por medio de una cremallera y un piñón. Al mover la punta cónica desde debajo de la superficie hacia arriba se origina una ligera curvatura de la película superficial antes de que penetre en ella. Con iluminación conveniente, el gancho puede colocarse a la altura donde la reflexión de la película superficial cambia, con una presión de 0,025 mm. Puede montarse un nonius en la varilla o bién un reloj comparador colocarse contra el extremo superior de la varilla. Cuando $A$ y $B$ están en comunicación, ambas superficies están a la misma altura, las lecturas hechas en estas condiciones nos dan la posición del cero.

Con dos líquidos inmiscibles uno en otro y en el líquido cuya diferencia de presión va a medirse, una gran diferencia de altura $R$ (Fig. 2.11) puede producirse aun con una pequeña diferencia de presiones. El líquido más denso llena la parte inferior del tubo en U hasta la línea 0-0; entonces se añade el líquido menos denso en las dos ramas de la U llenándose los depósitos hasta la línea 1-1. El gas, o el líquido cuyas diferencias de presión van a medirse, ocupa el espacio situado por encima de 1-1. Cuando la presión en $C$ es ligeramente mayor que en $D$, el menisco se mueve como se indica en la Fig. 2.11. El volumen del líquido desplazado en cada depósito iguala al desplazamiento en el tubo en U, por tanto

$$\Delta y A = \frac{R}{2} a$$

siendo $A$ y $a$ las áreas de las secciones del depósito y del tubo en U, respec-

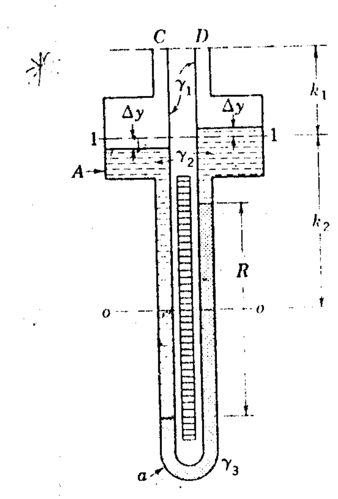



*Fig. 2.11 Micromanómetros que utilizan dos líquidos.*



tivamente. La ecuación manométrica puede escribirse, a partir de $C$, en kg/m²

$$p_C + (k_1 + \Delta y)\gamma_1 + \left(k_2 - \Delta y + \frac{R}{2}\right)\gamma_2 - R\gamma_3 - \left(k_2 - \frac{R}{2} + \Delta y\right)\gamma_2 - (k_1 - \Delta y)\gamma_1 = p_D$$

siendo $\gamma_1$, $\gamma_2$ y $\gamma_3$ los pesos específicos, como se señala en la Fig. 2.11. Después de simplificar y eliminar $\Delta y$,

$$p_C - p_D = R\left[\gamma_3 - \gamma_2\left(1 - \frac{a}{A}\right) - \gamma_1 \frac{a}{A}\right] \qquad (2.4.1)$$

La cantidad dentro del paréntesis recto es una constante para unos fluidos y un manómetro determinados; de aquí que la diferencia de presiones sea directamente proporcional a $R$.

***Ejemplo 2.5*** En el micromanómetro de la Fig. 2.11 se desea saber la diferencia de presiones $p_C - p_D$ en kg/cm² cuando el fluido es aire. $S_2 = 1{,}0$; $S_3 = 1{,}05$; $a/A = 0{,}01$; $R = 2{,}5$ mm.

Para el aire en condiciones normales, 20° C y 760 mm de mercurio, $S_1 = 1.222/1000 = 1{,}222 \times 10^{-3}$; por consiguiente, $S_1\ (a/A) = 1{,}222 \times 10^{-5}$; $S_3 - S_2\ (1 - a/A) = 1{,}05 - 0{,}99 = 0{,}06$. El término $S_1\ (a/A)$ puede despreciarse. Sustituyendo estos valores en la Ec. (2.4.1) resulta:

$$h_C - h_D = 2{,}5 \times 10^{-3} \times 0{,}06 = 0{,}15 \times 10^{-3} \text{ m de agua} = 0{,}15 \text{ mm de agua}$$
$$p_C - p_D = 0{,}15 \times 10^{-3} \times 10^3 = 0{,}15 \text{ kg/m}^2 = 0{,}15 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^2$$

El manómetro inclinado (Fig. 2.12) se usa frecuentemente para medir pequeñas diferencias de presiones en gases. Se ajusta el cero moviendo la escala inclinada cuando $A$ y $B$ están abiertos. El tubo inclinado requiere un desplazamiento del menisco, para una presión dada, mayor que el del tubo vertical; así la exactitud de la lectura es mayor en el primero.

La tensión superficial causa una elevación capilar en los tubos de

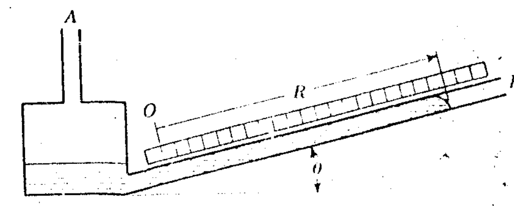



*Fig. 2.12 Manómetro inclinado.*

pequeño diámetro. Si se usa un tubo en U con un menisco en cada rama, los efectos de la tensión superficial se anulan. La elevación capilar es despreciable en tubos de 12 mm de diámetro o mayor.

## 2.5 *Fuerzas sobre áreas planas*

En los párrafos anteriores se han estudiado las variaciones de presión en la masa de un fluido. El conjunto de fuerzas que resultan de la acción del fluido sobre la cara de una superficie de área finita puede ser remplazado por una fuerza resultante, así como se pueden averiguar las reacciones externas a las fuerzas del sistema. En este párrafo la magnitud de la fuerza resultante y su línea de acción (centro de presiones) se determinan por integración, por fórmulas y mediante la consideración del concepto del prisma de presiones.

### *Superficies horizontales*

Una superficie plana en posición horizontal en un fluido en reposo está sometida a una presión constante. El módulo de la fuerza que actúa sobre una cara de la superficie es

$$\int p\,dA = p\int dA = pA$$

Las fuerzas elementales $p\,dA$ que actúan sobre las áreas elementales $dA$ son todas paralelas y tienen el mismo sentido; por esto, la suma escalar de todos estos elementos nos da el módulo de la fuerza resultante. Su dirección es normal a la superficie y está dirigida *hacia* la superficie si $p$ es *positiva*. Para encontrar la línea de acción de la resultante, es decir, el punto de la superficie donde el momento del conjunto de fuerzas respecto a cualquier eje que pasa por el punto es cero, se eligen unos ejes arbitrarios $xy$, como en la Fig. 2.13. Entonces, como el momento de la

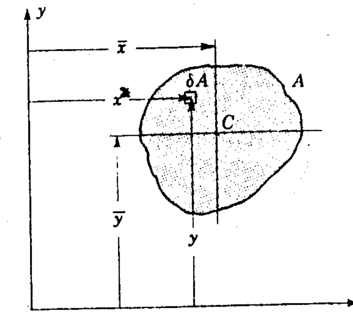



*Fig. 2.13 Notación para determinar la línea de acción de una fuerza.*



resultante debe ser igual al momento del conjunto de fuerzas, respecto a cualquier eje, por ejemplo, el eje $y$,

$$pAx' = \int_A xp\,dA$$

siendo $x'$ la distancia del eje $y$ a la resultante. Como $p$ es constante,

$$x' = \frac{1}{A}\int_A x\,dA = \bar{x}$$

siendo $\bar{x}$ la distancia al centroide del área †. De aquí que, para una superficie horizontal sometida a la presión de un fluido en reposo, la resultante pasa por el centroide del área.

### *Superficies inclinadas*

En la Fig. 2.14 una superficie plana se representa por su traza $A'B'$. Está inclinada $\theta°$ con respecto a la horizontal. La intersección de los planos de la superficie dada y de la superficie libre se toma como eje $x$. El eje $y$ se toma en el plano de la superficie dada, con origen $O$ en la superficie libre. El plano $xy$ contiene, pues, a la arbitraria superficie inclinada dada. Se trata de determinar el módulo, dirección y línea de acción de la fuerza resultante de las presiones que *ejerce el líquido* sobre una de las caras de la superficie.

Para un elemento de área $\delta A$ de forma de tira, de espesor $\delta y$, con sus lados más largos horizontales, el módulo de la fuerza $\delta F$ que actúa sobre él es

$$\delta F = p\,\delta A = \gamma h\,\delta A = \gamma y \operatorname{sen}\theta\,\delta A \tag{2.5.1}$$

Como todas estas fuerzas elementales son paralelas, la integral extendida al área da el módulo de la fuerza $F$ que actúa sobre una cara de la superficie

$$F = \int p\,dA = \gamma \operatorname{sen}\theta \int y\,dA = \gamma \operatorname{sen}\theta\,\bar{y}A = \gamma\bar{h}A = p_G A \tag{2.5.2}$$

con los datos de la Fig. 2.14; $\bar{y}\operatorname{sen}\theta = \bar{h}$ y $p_G = \gamma\bar{h}$ es la presión en el centroide del área. Es decir, el módulo de la fuerza ejercida sobre una cara de una superficie plana sumergida en un líquido es el producto del área por la presión en el centroide. Expresada de esta forma, la presencia de una superficie libre no es necesaria. Cualquier procedimiento para determinar la presión en el centroide puede usarse. El sentido de la fuer-

Punto de aplicación no coincide con el centroide.

† Ver el Apéndice A.

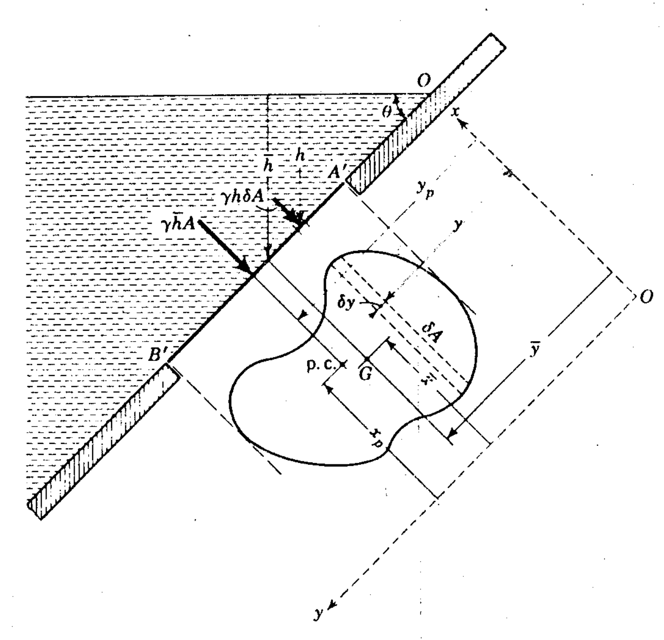



*Fig. 2.14 Notación para la fuerza de un líquido sobre un lado de un área plana inclinada.*

za es el de empujar contra el área si $p_G$ es positivo. Como todas las fuerzas elementales son normales a la superficie, la línea de acción de la resultante es también normal a la superficie. Cualquier superficie puede girarse alrededor de un eje que pase por su centroide sin que cambie el módulo de la resultante, siempre que la superficie permanezca totalmente sumergida en el fluido en reposo.

*Centro de presiones*

La línea de acción de la fuerza resultante corta a la superficie en un punto que se llama *centro de presiones*, cuyas coordenadas son $(x_p, y_p)$ (Fig. 2.14). Contrariamente a lo que se sucede para una superficie horizontal el centro de presiones de una superficie inclinada no está en el centroide. Para encontrar el centro de presiones se igualan los momentos respecto al eje $y$, y al eje $x$ de la resultante $x_pF$, $y_pF$ a los momentos del conjunto de fuerzas respecto de los mismos ejes; así,

$$x_pF = \int_A xp\,dA \tag{2.5.3}$$

$$y_pF = \int_A yp\,dA \tag{2.5.4}$$



El elemento de área en la Ec. (2.5.3) debe ser $\delta x\,\delta y$ y no la tira señalada en la Fig. 2.14.

Despejando las coordenadas del centro de presiones

$$x_p = \frac{1}{F}\int_A xp\,dA \tag{2.5.5}$$

$$y_p = \frac{1}{F}\int_A yp\,dA \tag{2.5.6}$$

En muchas aplicaciones las integrales de las Ecs. (2.5.5) y (2.5.6) pueden calcularse más cómodamente mediante una integración gráfica; para áreas sencillas pueden transformarse en las fórmulas generales†:

$$x_p = \frac{1}{\gamma\bar{y}A\,\text{sen}\,\theta}\int_A x\gamma y\,\text{sen}\,\theta\,dA = \frac{1}{\bar{y}A}\int_A xy\,dA = \frac{I_{xy}}{\bar{y}A} \tag{2.5.7}$$

De las Ecs. (A.10), del Apéndice A, y (2.5.7) se deduce:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} + \bar{x} \tag{2.5.8}$$

Cuando uno de los ejes centroidales, $x = \bar{x}$ o $y = \bar{y}$, es un eje de simetría de la superficie, $\bar{I}_{xy}$ se hace nulo y el centro de presiones está sobre la línea $x = \bar{x}$. Como $\bar{I}_{xy}$ puede ser positivo o negativo, el centro de presiones puede estar a un lado o a otro de la línea $x = \bar{x}$. Para determinar $y_p$ por fórmula, de las Ecs. (2.5.2) y (2.5.6),

$$y_p = \frac{1}{\gamma\bar{y}A\,\text{sen}\,\theta}\int_A y\gamma y\,\text{sen}\,\theta\,dA = \frac{1}{\bar{y}A}\int_A y^2\,dA = \frac{I_x}{\bar{y}A} \tag{2.5.9}$$

Por el teorema de los momentos de inercia para ejes paralelos,

$$I_x = I_G + \bar{y}^2A$$

Si se elimina $I_x$ en la Ec. (2.5.9),

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y} \tag{2.5.10}$$

o sea,

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A} \tag{2.5.11}$$

† Ver el Apéndice A.

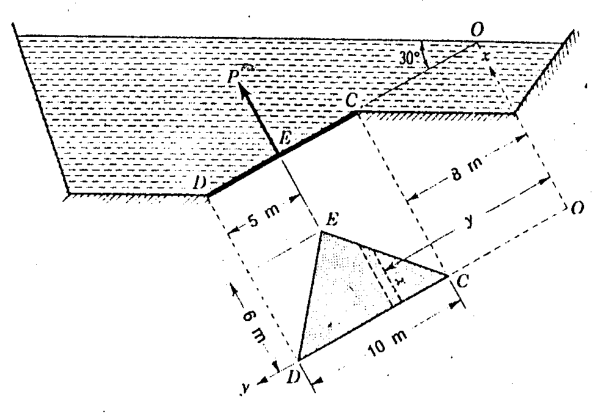



*Fig. 2.15 Compuerta triangular.*

$I_G$ es siempre positivo; de aquí que $y_p - \bar{y}$ sea siempre positivo y el centro de presiones esté siempre por debajo del centroide de la superficie. Debe ser puesto en evidencia que $\bar{y}$ e $y_p - \bar{y}$ son distancias medidas en el plano de la superficie.

***Ejemplo 2.6*** La compuerta triangular *CDE* (Fig. 2.15) tiene sus bisagras en *C* y *D* y se abre por una fuerza normal *P* aplicada en *E*. Encima de ella hay aceite de peso específico relativo 0,80 y por debajo actúa la presión atmosférica. Despreciando el peso de la compuerta determinar (*a*) el módulo de la fuerza ejercida sobre la compuerta por integración y por la Ec. (2.5.2); (*b*) la situación del centro de presiones; (*c*) la fuerza *P* necesaria para abrir la compuerta.

(*a*) Por integración y con los datos de la Fig. 2.15:

$$F = \int_A p\,dA = \gamma \operatorname{sen}\theta \int yx\,dy = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_8^{13} xy\,dy + \gamma \operatorname{sen}\theta \int_{13}^{18} xy\,dy$$

Cuando $y = 8$, $x = 0$, y cuando $y = 13$, $x = 6$; como $x$ varía linealmente con $y$, tenemos

$$x = ay + b \qquad 0 = 8a + b \qquad 6 = 13a + b$$

sustituyendo valores para encontrar $x$ en función de $y$. Despejando $a$ y $b$

$$a = \tfrac{6}{5} \qquad b = -\tfrac{48}{5} \qquad x = \tfrac{6}{5}(y - 8)$$

Análogamente, $y = 13$, $x = 6$; $y = 18$, $x = 0$; y $x = \frac{6}{5}(18 - y)$. De aquí que

$$F = \gamma \operatorname{sen}\theta \frac{6}{5}\left[\int_8^{13} (y - 8)y\,dy + \int_{13}^{18} (18 - y)y\,dy\right]$$

Después de integrar y sustituyendo $\gamma \operatorname{sen}\theta$ por su valor

$$F = 1.000 \times 0{,}8 \times 0{,}50 \times \frac{6}{5}\left[\left(\frac{y^3}{3} - 4y^2\right)_8^{13} + \left(9y^2 - \frac{y^3}{3}\right)_{13}^{18}\right] = 156.000 \text{ kg}$$



Por la Ec. (2.5.2)

$$F = p_G A = \gamma \bar{y} \operatorname{sen}\theta\, A = 1.000 \times 0{,}80 \times 0{,}50 \times 30 \times 13 = 156.000 \text{ kg} = 156 \text{ ton}$$

(*b*) Con referencia a los ejes de la figura, $\bar{x} = 2{,}0$, $\bar{y} = 13$. De la Ec. (2.5.8)

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} + \bar{x}$$

$\bar{I}_{xy}$ es cero debido a la simetría respecto al eje paralelo a $x$ por el centroide; de aquí que $\bar{x} = x_p = 2{,}0$ m. De la Ec. (2.5.11)

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A} = 2 \times \frac{1 \times 6 \times 5^3}{12 \times 13 \times 30} = 0{,}32 \text{ m}$$

es decir, el centro de presiones está 0,32 m por debajo del centroide medido en el plano de la superficie.

(*c*) Tomando momentos respecto a *CD* y remplazando la acción del aceite por la resultante,

$$P \times 6 = 156 \times 2 \qquad P = 52 \text{ ton}$$

## *El prisma de presiones*

El concepto de prisma de presiones proporciona otro método para determinar el módulo y la situación de la fuerza resultante sobre una superficie inclinada. El volumen del prisma de presiones igual al módulo de la fuerza y la fuerza resultante pasa por el centroide del prisma. La superficie se toma como base del prisma, cuya altura en cada punto se determina por la presión $\gamma h$ puesta en una escala conveniente (Fig. 2.16). Como la presión aumenta linealmente con la distancia desde la superficie libre, la superficie superior del prisma es un plano cuya traza *OM* se ve en la Fig. 2.16. La fuerza que actúa sobre un área elemental $\delta A$ es

$$\delta F = \gamma h\, \delta A = \delta \mathcal{V} \tag{2.5.12}$$

que es un elemento del volumen del prisma de presiones. Después de integrar, $F = \mathcal{V}$, el volumen del prisma es igual a la intensidad de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una cara de la superficie.

Las Ecs. (2.5.5) y (2.5.6),

$$x_p = \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} x\,d\mathcal{V} \qquad y_p = \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} y\,d\mathcal{V} \tag{2.5.13}$$

demuestran que $x_p$, $y_p$ son las distancias al *centroide* del prisma† de presiones.

† Apéndice A, Ec. (A.5).

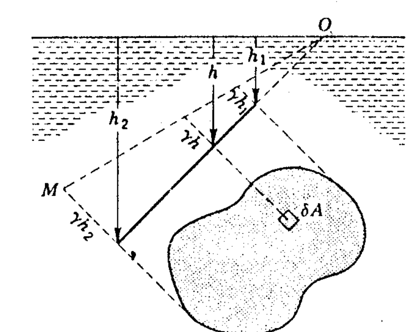



*Fig. 2.16* *Ejemplo del prisma de presiones.*

Por consiguiente, la línea de acción de la resultante pasa por el centroide del prisma de presiones. Para algunas áreas sencillas la consideración del prisma de presiones es más conveniente que la integración o la fórmula. Por ejemplo, un área rectangular con un lado en la superficie libre tiene un prisma en forma de cuña. Su centroide está a un tercio de la altura sobre la base; por consiguiente, el centro de presiones está a un tercio de la altura sobre su borde inferior.

### Efecto de la presión atmosférica sobre las fuerzas que actúan sobre superficies planas

En el estudio anterior de las fuerzas debidas a la presión no se ha mencionado el origen de presiones. Las presiones vienen dadas por $p = \gamma h$, siendo $h$ la distancia vertical por debajo de la superficie libre. Por consiguiente, el origen que se ha tomado al cual se atribuye valor cero es la presión atmosférica local. Cuando la cara opuesta de la superficie está en contacto con la atmósfera, ésta ejerce sobre ella una fuerza igual al producto de la presión atmosférica $p_0$ por el área, o $p_0 A$, tomando el cero absoluto como origen. Sobre la cara en contacto con el líquido la fuerza es

$$\int (p_0 + \gamma h)\, dA = p_0 A + \gamma \int h\, dA$$

El efecto de la atmósfera $p_0 A$ es igual en ambos lados y no influye nada en la fuerza resultante ni en su situación.

Cuando se elija el mismo origen de presiones en todas las caras de un cuerpo libre puede determinarse la resultante si se construye una nueva superficie libre de presión cero teniendo en cuenta el origen elegido y usando los métodos descritos anteriormente.

***Ejemplo 2.7*** *Fuerzas en una presa de gravedad.* Una aplicación de fuerzas debidas a la presión sobre áreas planas se encuentra en el proyecto de una presa de gravedad. El máximo y el mínimo esfuerzo de compresión en la base de la presa se calculan a partir de las fuerzas que actúan sobre la presa. La Fig. 2.17 muestra una



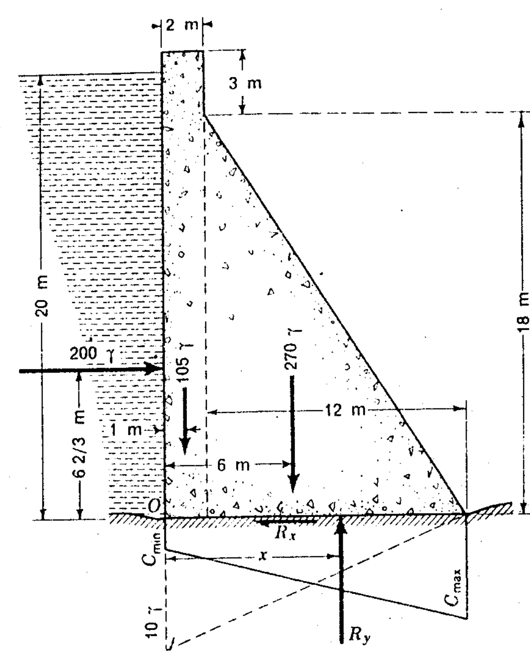



*Fig. 2.17* *Presa de gravedad de hormigón.*

sección del hormigón cuyo peso específico es de $2{,}5\gamma$, siendo $\gamma$ el peso específico del agua. Un trozo de presa de 1 m de ancho se considera como un cuerpo libre; las fuerzas que actúan son las debidas al peso del hormigón, a las presiones que ejerce el agua, a las presiones de la fundación y al empuje ascensional hidrostático. La determinación del empuje ascensional hidrostático se sale fuera de los límites de este tratado, pero puede suponerse que vale la mitad de la presión hidrostática en el borde de aguas arriba decreciendo linealmente hasta valer cero en el borde de aguas abajo de la presa. Un rozamiento o una tensión de cortadura debe desarrollarse en la base de la presa que sea suficiente para equilibrar el empuje debido al agua, que vale $R_x = 200\gamma$. La fuerza resultante hacia arriba en la base iguala al peso de la presa, menos el empuje ascensional hidrostático $R_y = 270\gamma + 105\gamma - 70\gamma = 305\gamma$ kg. La posición de $R_y$ es tal, que el cuerpo libre está en equilibrio. Tomando momentos respecto de $O$,

$$\Sigma M_o = 0 = R_y x - 200\gamma \times 6{,}66 - 105\gamma \times 1 - 270\gamma \times 6 + 70\gamma \times 4{,}66$$

y

$$x = 8{,}95 \text{ m}$$

Habitualmente se supone que las presiones en la fundación varían linealmente en la base de la presa, es decir, que el prisma de presiones es trapezoidal con un volumen igual a $R_y$, o sea:

$$\frac{C_{max} + C_{min}}{2}\, 14 = 305\gamma$$

siendo $C_{max}$ y $C_{min}$ el máximo y mínimo esfuerzo de compresión en kg/m². El centroide del prisma de presiones se encuentra en un punto donde $x = 8{,}95$ m. Tomando momentos con respecto a $O$ para expresar la posición del centroide en función de $C_{max}$ y $C_{min}$

$$8{,}95 = \frac{C_{min} 14 \times \frac{14}{2} + (C_{max} - C_{min}) \frac{14}{2} \times \frac{2}{3} \times 14}{(C_{max} + C_{min}) \frac{14}{2}}$$

Simplificando

$$C_{max} = 11{,}25 C_{min}$$

Por tanto,

$$C_{max} = 40\gamma = 40.000 \text{ kg/m}^2 \qquad C_{min} = 3{,}55\gamma = 3.550 \text{ kg/m}^2$$

Cuando la resultante cae en el tercio central de la base de la presa $C_{min}$ es un esfuerzo de compresión. Debido a que el hormigón no debe trabajar a extensión, por sus pobres características a extensión, en un buen proyecto la resultante debe caer en el tercio central de la base.

## 2.6 *Componentes de las fuerzas debidas a las presiones sobre superficies curvas*

Cuando las fuerzas elementales $p\,\delta A$ varían en dirección, como en el caso de una superficie curva, deben sumarse como magnitudes vectoriales; es decir, sus componentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares se suman como escalares, y a continuación las tres componentes se suman vectorialmente. Para calcular la resultante de las fuerzas debidas a las presiones sobre una superficie curva se determinan previamente dos componentes horizontales en ángulo recto y la componente vertical, lo cual puede hacerse fácilmente según se explica a continuación. Para hallar la línea de acción de la resultante deben determinarse las líneas de acción de las componentes.

### Componente horizontal de la fuerza debida a las presiones sobre una superficie curva

*La componente horizontal de la fuerza debida a las presiones sobre una superficie curva es igual a la fuerza debida a las presiones que se ejercería sobre la proyección de la superficie curva. El plano vertical de proyección es normal a la dirección de la componente.* La superficie de la Fig. 2.18 representa una superficie cualquiera tridimensional, y $\delta A$ un elemento de su área, cuya normal forma un ángulo $\theta$ con la dirección negativa del eje $x$. Entonces:

$$\delta F_x = p\,\delta A \cos\theta$$



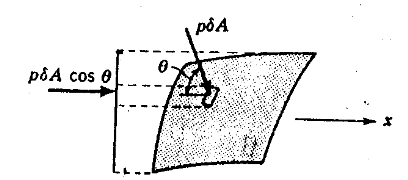



*Fig. 2.18 Componente horizontal de la fuerza sobre una superficie curva.*

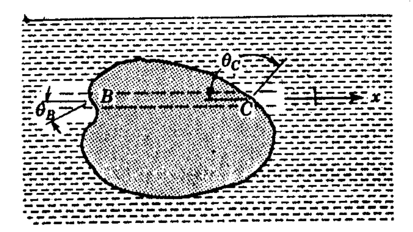



*Fig. 2.19 Proyecciones de elementos de área sobre las caras opuestas de un cuerpo.*

es la componente según $x$ de la fuerza ejercida, sobre una cara de $\delta A$. Sumando las componentes según $x$ de las fuerzas sobre la superficie se obtiene:

$$F_x = \int_A p \cos\theta \, dA \tag{2.6.1}$$

La proyección de $\delta A$ sobre un plano perpendicular a $x$ es $\cos\theta\,\delta A$. El elemento de fuerza sobre el área proyectada es $p\cos\theta\,\delta A$, que tiene también la dirección $x$. Proyectar cada elemento sobre un plano perpendicular a $x$ es equivalente a proyectar la superficie curva como un todo sobre el plano. De aquí que la fuerza que actúa sobre esta proyección de la superficie curva es la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre la superficie curva, en la dirección normal al plano de proyección. Para encontrar la componente horizontal en ángulo recto con la dirección de $x$, se proyecta la superficie curva sobre un plano vertical paralelo a $x$, y se determina la fuerza sobre la proyección.

Cuando quiere calcularse la componente horizontal de la fuerza debida a la presión sobre un cuerpo cerrado, se encuentra que la proyección de la superficie curva sobre un plano vertical es siempre cero, porque en las caras opuestas del cuerpo las proyecciones de los elementos de área tienen signos opuestos, como se indica en la Fig. 2.19. Considérese un pequeño cilindro de sección recta $\delta A$ y eje paralelo a $x$ que corta el cuerpo cerrado en $B$ y en $C$. Si el elemento de área del cuerpo cortada por el prisma en $B$ es $\delta A_B$ y en $C$ es $\delta A_C$, entonces,

$$\delta A_B \cos\theta_B = -\delta A_C \cos\theta_C = \delta A$$

pues $\cos\theta_C$ es negativo. De aquí que, como la presión es la misma en ambos extremos del cilindro,

$$p\,\delta A_B \cos\theta_B + p\,\delta A_C \cos\theta_C = 0$$

y de manera análoga para todas las otras áreas elementales.

Para encontrar la línea de acción de una componente horizontal de la fuerza que actúa sobre una superficie curva, se necesita la resultante del sistema de fuerzas paralelas formado por las fuerzas componentes sobre cada área elemental. Esta es exactamente la resultante de las fuerzas

sobre el área proyectada, ya que los dos sistemas de fuerza tienen el mismo prisma de presiones. Por consiguiente, el centro de presiones se sitúa sobre el área proyectada por el método de la Sección 2.5.

*Ejemplo 2.8* La ecuación de un elipsoide de revolución sumergido en agua es $x^2/4 + y^2/4 + z^2/9 = 1$. El centro del cuerpo está situado 2 m por debajo de la superficie libre. Hallar las componentes horizontales que actúan sobre la superficie curva situada en el primer octante. Considerar que el plano $xz$ es horizontal y el eje $y$ es positivo hacia arriba.

El área de la proyección de la superficie sobre el plano $yz$ es $\pi/4 \times 2 \times 3$. Su centroide está situado a $(2 - 4/3\pi \times 2)$ m, por debajo de la superficie libre. Por consiguiente,

$$F_y = -\left(\frac{\pi}{4} \times 6\right)\left(2 - \frac{8}{3\pi}\right)\gamma = -(9{,}43 - 4)\gamma = -5.430 \text{ kg}$$

Análogamente,

$$F_x = -\left(\frac{\pi}{4} \times 4\right)\left(2 - \frac{8}{3\pi}\right)\gamma = -(6{,}28 - 2{,}67)\gamma = -3.610 \text{ kg}$$

## Componente vertical de la fuerza debida a las presiones sobre una superficie curva

*La componente vertical de la fuerza debida a las presiones sobre una superficie curva es igual al peso de líquido situado verticalmente por encima de la superficie curva y extendido hasta la superficie libre.* La componente vertical de la fuerza sobre una superficie curva puede determinarse sumando las componentes verticales de las fuerzas debidas a la presión sobre las áreas elementales $\delta A$ de la superficie. En la Fig. 2.20 está representada un área elemental con la fuerza $p\,\delta A$ que actúa normalmente en ella (sea $\theta$ el ángulo que forman la normal al elemento de área con la vertical). Entonces la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el elemento de área es $p \cos\theta\,\delta A$, y la componente vertical de la fuerza sobre la superficie curva está dada por

$$F_v = \int_A p \cos\theta \, dA \tag{2.6.2}$$

Remplazando $p$ por su equivalente $\gamma h$, siendo $h$ la distancia del elemento de área a la superficie libre, y teniendo en cuenta que $\cos\theta\,\delta A$ es la proyección de $\delta A$ sobre un plano horizontal, la Ec. (2.6.2) da

$$F_v = \gamma \int_A h \cos\theta \, dA = \gamma \int_V dV \tag{2.6.3}$$

siendo $\delta V$ el volumen del prisma de altura $h$ y base $\cos\theta\,\delta A$, o sea, el



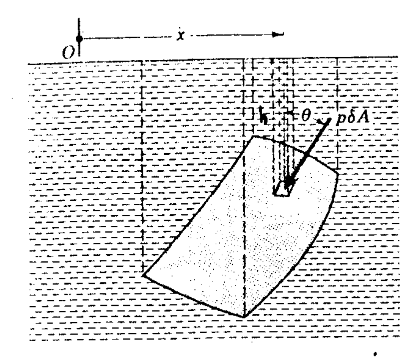



*Fig. 2.20 Componente vertical de la fuerza sobre una superficie curva.*

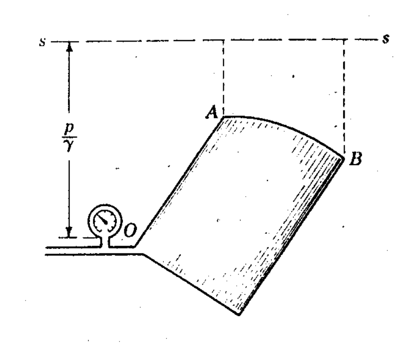



*Fig. 2.21 Líquido con superficie libre equivalente.*

volumen del líquido verticalmente por encima del elemento de área. Integrando

$$F_v = \gamma V \tag{2.6.4}$$

Cuando el líquido está por debajo de la superficie curva (Fig. 2.21) y la presión se conoce en algún punto, por ejemplo, en $O$, puede construirse una superficie libre *imaginaria s-s*, a una altura por encima de $O$ de $p/\gamma$, de tal manera que el producto de la distancia vertical a cualquier punto del tanque por el peso específico es la presión en el punto. El peso del volumen imaginario del líquido, verticalmente por encima de la superficie curva, es entonces la componente vertical de la fuerza debida a la presión sobre la superficie curva. Para construir la superficie libre imaginaria, el líquido imaginario debe ser del mismo peso específico que el líquido en contacto con la superficie curva, pues de otra manera la distribución de presiones sobre la superficie no estaría correctamente representada. Con un líquido imaginario por encima de la superficie, la presión en un punto de la superficie curva es igual en ambas caras, pero las fuerzas componentes elementales en la dirección vertical son de signos opuestos. De aquí que el sentido de la componente vertical de la fuerza esté invertido cuando un fluido imaginario está por encima de la superficie. En algunos casos otro líquido puede estar por encima de la superficie curva, y entonces un líquido imaginario debe ser añadido (o sustraído) para determinar la superficie libre.

La línea de acción de la componente vertical se determina igualando los momentos de las componentes verticales elementales, respecto a un eje conveniente, con el momento de la fuerza resultante. Respecto al eje por $O$ de la Fig. 2.20

$$F_v \bar{x} = \gamma \int_V x \, dV$$

*Fig. 2.22 Cuerpo semiflotante.*

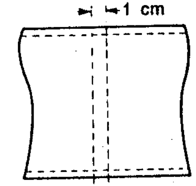
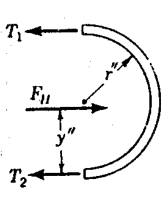



*Fig. 2.23 Esfuerzo de tracción en una tubería.*

donde $\bar{x}$ es la distancia desde $O$ a la línea de acción. Entonces, como $F_v = \gamma \forall$,

$$\bar{x} = \frac{1}{\forall}\int_{\forall} x\, d\forall$$

es la distancia al centroide del volumen. Por esto las líneas de acción de la fuerza vertical pasa por el centroide del volumen, real o imaginario, que se extiende por encima de la superficie curva hasta la superficie libre real o imaginaria.

***Ejemplo 2.9*** Una barrera cilíndrica (Fig. 2.22) contiene al agua como muestra la figura. El contacto entre el cilindro y la pared es muy liso. Considerando una longitud de cilindro de 1 m, calcular: (*a*) su peso y (*b*) la fuerza ejercida contra la pared.

(*a*) En el equilibrio el peso del cilindro debe igualar a la componente vertical de la fuerza ejercida sobre él por el agua. La fuerza vertical sobre *BCD* es

$$F_{vBCD} = \left(\frac{\pi r^2}{2} + 2r^2\right)\gamma = (2\pi + 8)\gamma$$

La fuerza vertical sobre *AB* es

$$F_{vAB} = -\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right)\gamma = -(4 - \pi)\gamma$$

Por consiguiente, el peso por metro de longitud es:

$$F_{vBCD} + F_{vAB} = (3\pi + 4)\gamma = 13.420 \text{ kg}$$

(*b*) La fuerza ejercida contra la pared es la fuerza horizontal sobre *ABC* menos la fuerza horizontal sobre *CD*. Las componentes horizontales de las fuerzas sobre *BC* y *CD* se anulan, puesto que la proyección de *BCD* sobre un plano vertical es nula. De aquí que

$$F_H = F_{HAB} = 2\gamma = 2.000 \text{ kg}$$

Para encontrar las reacciones exteriores debidas a las fuerzas de presión, la acción del fluido debe ser sustituida por las dos componentes horizontales y por la componente vertical actuando a lo largo de sus líneas de acción.



### Tensiones de tracción en una tubería

Una tubería circular sometida a la acción de una presión interna está sometida a tracción en su periferia. Suponiendo que no existen tensiones longitudinales, las paredes están en tensión como muestra la Fig. 2.23. Se considera un trozo de tubería de 1 cm, es decir, el anillo comprendido entre dos planos normales al eje separados 1 cm. Considerando una mitad de este anillo como un cuerpo libre, las tensiones por centímetro en los extremos son $T_1$, $T_2$ como señala la figura. La componente horizontal de la fuerza actúa en el centro de presiones del área proyectada y vale $2pr$, siendo $p$ la presión en la línea central en kg/cm² y $r$ el radio interior de la tubería en centímetros.

Para altas presiones, el centro de presiones puede tomarse en el centro de la tubería; entonces, $T_1 = T_2$ y

$$T = pr \qquad (2.6.5)$$

donde $T$ es la fuerza de tracción por centímetro. Para unas paredes de espesor $t$ cm la *tensión de tracción* $S$ en la pared de la tubería es

$$S = \frac{T}{t} = \frac{pr}{t} \qquad (2.6.6)$$

Para grandes variaciones de presión entre los extremos de la tubería el centro de presiones debe hallarse, y se necesitan entonces dos ecuaciones,

$$T_1 + T_2 = 2pr$$

$$2rT_1 - 2pry = 0$$

siendo la segunda la ecuación de momentos alrededor del extremo inferior del cuerpo libre, despreciando la componente vertical de la fuerza. Resolviendo

$$T_1 = py \qquad T_2 = p(2r - y)$$

estando $y$ en centímetros.

***Ejemplo 2.10*** Una tubería de acero de 10 cm de diámetro interior tiene una pared de 5 mm de espesor. Para una tensión de tracción permitida de 25 kg/mm², ¿cuál es la máxima presión?

$$S = \frac{pr}{t} = 2.500 = \frac{p5}{0.5}$$

y de aquí

$$p = 250 \text{ kg/cm}^2$$

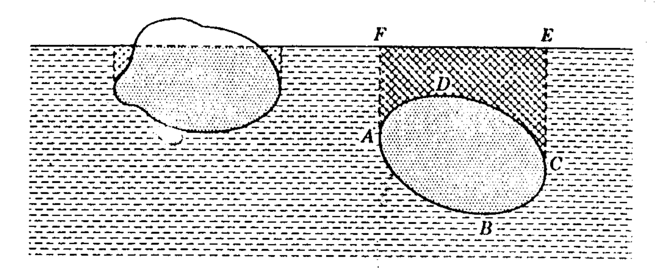



*Fig. 2.24 Fuerza de empuje sobre cuerpos flotantes y sumergidos.*

## 2.7 Empuje

La resultante de las fuerzas ejercidas *por un fluido en reposo* sobre un cuerpo sumergido o flotante se llama *empuje*. El empuje siempre actúa verticalmente hacia arriba. No puede haber componente horizontal de la resultante porque la proyección vertical del cuerpo sumergido o de la porción sumergida del cuerpo flotante es siempre cero. El empuje sobre un cuerpo sumergido es la diferencia entre la componente vertical de la fuerza debida a la presión sobre su parte inferior y la componente vertical de la fuerza debida a la presión sobre su parte superior.

En la Fig. 2.24 la fuerza hacia arriba sobre el fondo es igual al peso del líquido, real o imaginario, que está verticalmente por encima de la superficie $ABC$, o sea, el peso del líquido $ABCEFA$. La fuerza hacia abajo sobre la superficie superior es el peso del líquido $ADCEFA$. La diferencia entre las dos fuerzas es una fuerza, vertical hacia arriba, igual al peso del fluido $ABCD$ que es *desplazado* por el sólido. En la ecuación

$$F_B = \forall\gamma \tag{2.7.1}$$

$F_B$ es el empuje, $\forall$ es el volumen del fluido desplazado y $\gamma$ es el peso específico del fluido. La misma fórmula sirve para los cuerpos flotantes cuando $\forall$ se toma igual al volumen de líquido desplazado. Esto resulta evidente de la inspección del cuerpo flotante de la Fig. 2.24.

En la Fig. 2.25*a*, la fuerza vertical ejercida sobre un elemento del cuerpo de forma prismática vertical de sección recta $\delta A$ es

$$\delta F_B = (p_2 - p_1)\,\delta A = \gamma h\,\delta A = \gamma\,\delta\forall$$

siendo $\delta\forall$ el volumen del prisma. Integrando sobre todo el cuerpo,

$$F_B = \gamma\int_{\forall} d\forall = \gamma\forall$$

cuando $\gamma$ se considera constante en todo el volumen.

Para encontrar la línea de acción de la fuerza de empuje, se toman



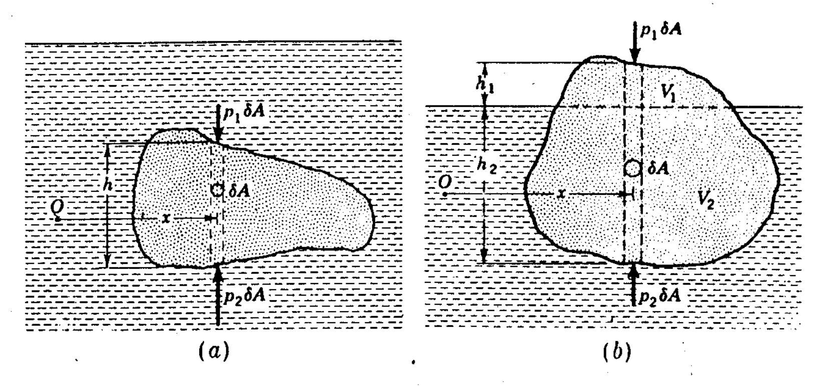



*Fig. 2.25 Componentes verticales de la fuerza sobre un elemento de cuerpo.*

momentos alrededor de un eje conveniente $O$ y se iguala al momento de la resultante, así,

$$\gamma\int x\,d\forall = \gamma\forall\bar{x}$$

o sea,

$$\bar{x} = \frac{1}{\forall}\int x\,d\forall$$

siendo $\bar{x}$ la distancia desde el eje a la línea de acción. Esta ecuación nos da la distancia al centroide del volumen; por consiguiente, *la línea de acción de la fuerza de empuje pasa por el centroide del volumen de fluido desplazado*. Esto sirve para cuerpos sumergidos y cuerpos flotantes. El centroide del volumen del fluido desplazado se llama *centro de empuje*.

Cuando el cuerpo flota en la superficie de separación de un sistema de dos fluidos (Fig. 2.25*b*) el empuje sobre un prisma vertical de sección recta $\delta A$ es

$$\delta F_B = (p_2 - p_1)\,\delta A = (\gamma_2 h_2 + \gamma_1 h_1)\,\delta A$$

siendo $\gamma_1$ y $\gamma_2$ los pesos específicos de los fluidos menos y más denso, respectivamente. Integrando sobre todo el área

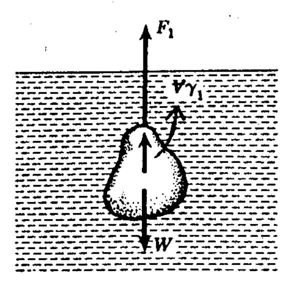
$$F_B = \gamma_2\int h_2\,dA + \gamma_1\int h_1\,dA = \gamma_2\forall_2 + \gamma_1\forall_1$$

$\forall_1$ es el volumen desplazado de fluido menos denso, y $\forall_2$ es el volumen desplazado del fluido más denso. Para situar la línea de acción de la fuerza de empuje, se toman momentos,

$$F_B\bar{x} = \gamma_1\int x\,d\forall_1 + \gamma_2\int x\,d\forall_2$$

de donde

$$\bar{x} = \frac{\gamma_1\int x\,d\forall_1 + \gamma_2\int x\,d\forall_2}{\gamma_1\forall_1 + \gamma_2\forall_2} = \frac{\gamma_1\bar{x}_1\forall_1 + \gamma_2\bar{x}_2\forall_2}{\gamma_1\forall_1 + \gamma_2\forall_2}$$



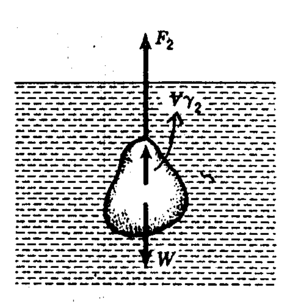



**Fig. 2.26** *Diagrama de cuerpo libre para un cuerpo sumergido en un fluido.*

siendo $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ las distancias a los centroides de los volúmenes $V_1$ y $V_2$ respectivamente. La resultante no pasa, en general, por el centroide del volumen total.

Para resolver un problema de estática relativa a objetos sumergidos o flotantes, el objeto se considera generalmente como un cuerpo libre, y se dibuja un diagrama de cuerpo libre. La acción del fluido se remplaza por el empuje. El peso del objeto debe ser tenido en cuenta (su línea de acción pasa por el centro de gravedad), así como todas las otras fuerzas que actúen sobre él.

Pesando un objeto de forma rara suspendido por un hilo y sumergido en dos fluidos diferentes se tienen datos suficientes para determinar su peso, volumen, peso específico y peso específico relativo. La Fig. 2.26 muestra dos diagramas de cuerpo libre para el mismo objeto suspendido por un hilo para pesarlo cuando está sumergido en dos fluidos. $F_1$, $F_2$ son los pesos sumergidos; $\gamma_1$, $\gamma_2$ son los pesos específicos de los fluidos. $W$ y $V$, el peso y el volumen del objeto que se quieren determinar.

Escribiendo las ecuaciones del equilibrio

$$F_1 + V\gamma_1 = W \qquad F_2 + V\gamma_2 = W \implies F_1 + V\gamma_1 = F_2 + V\gamma_2$$

y resolviéndolas

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \qquad W = \frac{F_1\gamma_2 - F_2\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

Un *hidrómetro* usa el principio del empuje para determinar el peso específico relativo de un líquido. La Fig. 2.27 representa el hidrómetro en dos líquidos. Este tiene un vástago de sección recta $a$. Suponiendo que el líquido de la izquierda es agua destilada, $S = 1{,}00$, el hidrómetro flota en equilibrio cuando

$$V_0\gamma = W \tag{2.7.2}$$

siendo $V_0$ el volumen sumergido, $\gamma$ es el peso específico del agua y $W$ el peso del hidrómetro. La posición de la superficie libre líquida se graba



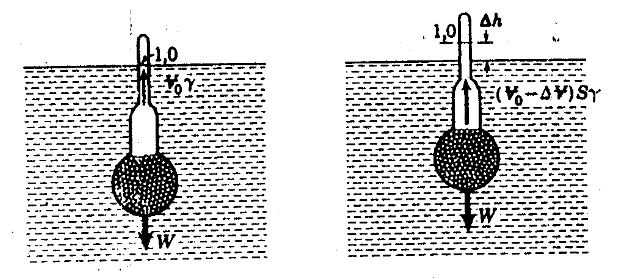



**Fig. 2.27** *Hidrómetro, en agua y en líquido de peso específico relativo S.*

con 1,00 sobre el vástago para indicar la unidad de peso específico relativo $S$. Cuando el hidrómetro flota en otro líquido, la ecuación de equilibrio da

$$(V_0 - \Delta V)S\gamma = W \tag{2.7.3}$$

siendo $\Delta V = a\,\Delta h$. De las Ecs. (2.7.2) y (2.7.3) resulta

$$\Delta h = \frac{V_0}{a}\frac{S - 1}{S} \tag{2.7.4}$$

con lo que la varilla puede ser grabada para leer pesos específicos relativos.

*Ejemplo 2.11* Una pieza de mineral que pesa en el aire 2 kg se encuentra que pesa 1,6 kg cuando se sumerge en el agua. ¿Cuál es su volumen y su peso específico relativo?

El empuje debido al aire se puede despreciar. A partir de la Fig. 2.26

$$2 = 1{,}6 + 1.000V \qquad V = 0{,}4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$$

$$S = \frac{2}{1.000 \times 0{,}4 \times 10^{-3}} = 5$$

## 2.8 *Estabilidad de flotación y cuerpos sumergidos*

Un cuerpo flotando en un líquido en reposo tiene estabilidad vertical. Un pequeño movimiento hacia arriba disminuye el volumen desplazado, resultando una fuerza hacia abajo desequilibrada que tiende a hacer volver al cuerpo a su posición original. Análogamente, un pequeño desplazamiento hacia abajo origina un mayor empuje que causa una fuerza desequilibrada hacia arriba.

Un cuerpo tiene estabilidad lineal cuando un pequeño desplazamiento lineal en cualquier dirección origina unas fuerzas restauradoras que tienden a volver al cuerpo a su posición original. Tiene estabilidad rota-

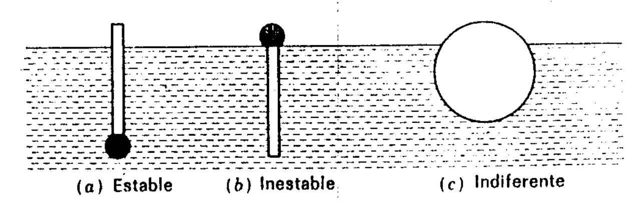



*Fig. 2.28 Ejemplos de equilibrio (a) estable, (b) inestable, (c) indiferente.*

cional cuando se origina un par restaurador por un pequeño desplazamiento angular.

Existen métodos para determinar la estabilidad rotacional que se estudian a continuación. Un cuerpo puede flotar en equilibrio estable, inestable o indiferente. Cuando el cuerpo está en equilibrio inestable, un pequeño desplazamiento angular origina un par que tiende a aumentar el desplazamiento angular. Si el cuerpo está en equilibrio indiferente, cualquier desplazamiento angular no origina par alguno. La Fig. 2.28 muestra los tres casos de equilibrio: (*a*) una pequeña pieza de madera con un metal pesado en su extremo inferior es un ejemplo del cuerpo en equilibrio estable; (*b*) cuando el metal pesado está en el extremo superior, el cuerpo está en equilibrio, pero un ligero desplazamiento angular obliga al cuerpo a tomar la posición de (*a*); (*c*) una esfera homogénea o un cilindro circular recto está en equilibrio para cualquier rotación angular, es decir, no se origina ningún par por un desplazamiento angular.

Un objeto sumergido es rotacionalmente estable solo cuando su centro de gravedad está por debajo del centro de empuje, como en la Fig. 2.29*a*. Cuando el objeto gira en el sentido contrario de las agujas del reloj, como en la Fig. 2.29*b*, la fuerza de empuje y el peso producen un par en la dirección de las agujas de un reloj.

Normalmente cuando un cuerpo es demasiado pesado para flotar, se sumerge y va hacia abajo hasta que descansa en el fondo. Aunque el peso específico de un líquido aumenta lentamente con la profundidad, la mayor presión hace que el líquido comprima al cuerpo o penetre en los poros de la sustancia sólida, disminuyendo así el empuje sobre el cuerpo. Un barco, por ejemplo, es seguro que irá al fondo una vez que esté sumergido completamente, debido a la compresión del aire encerrado en los diversos compartimientos dentro de él.

### *Determinación de la estabilidad rotacional de objetos flotantes*

Un objeto flotante con su centro de gravedad por debajo de su centro de empuje (centroide del volumen desplazado) flota en equilibrio estable, como en la Fig. 2.28*a*. Ciertos objetos flotantes, no obstante, están en equilibrio estable con su centro de gravedad por encima del centro de empuje. La estabilidad de los cuerpos prismáticos se considerará en primer lugar, seguida de un análisis de cuerpos flotantes de sección variable con pequeños ángulos de inclinación.



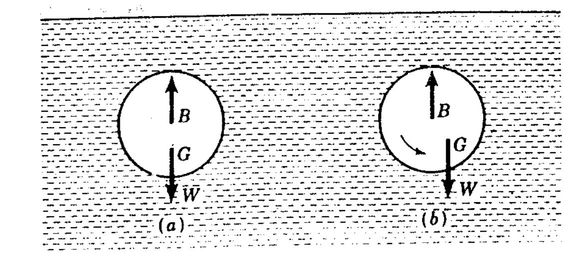



*Fig. 2.29 Cuerpo sumergido rotacionalmente estable.*

La Fig. 2.30*a* es la sección recta de un cuerpo con las restantes secciones rectas paralelas iguales. El centro de empuje está siempre en el centroide del volumen desplazado, el cual es el centroide de la porción de sección recta por debajo de la superficie libre del líquido. Por consiguiente, cuando el cuerpo está inclinado como en la Fig. 2.30*b*, el centro de empuje es el centroide $B'$ del trapecio $ABCD$; la fuerza de empuje actúa hacia arriba pasando por $B'$ y el peso actúa hacia abajo pasando por $G$, centro de gravedad del cuerpo. Cuando la vertical por $B'$ corta al eje de simetría original por encima de $G$, tal como en $M$, se produce un par restaurador, y el cuerpo está en equilibrio estable. La intersección de la fuerza de empuje y del eje de simetría se llama *metacentro* y se designa por $M$. Cuando $M$ está por encima de $G$, el cuerpo está en equilibrio estable; cuando por debajo de $G$, en equilibrio inestable, y cuando en $G$, en equilibrio indiferente. La distancia $\overline{MG}$ se llama *altura metacéntrica* y es una medida directa de la estabilidad del cuerpo. El par restaurador es

$$W\overline{MG} \text{ sen } \theta$$

siendo $\theta$ el desplazamiento angular y $W$ el peso del cuerpo.

**Ejemplo 2.12** En la Fig. 2.30, un lanchón para una grúa de 6 m de ancho y 20 m de largo tiene un peso de 240 ton. Su centro de gravedad está 0,25 m por enci-

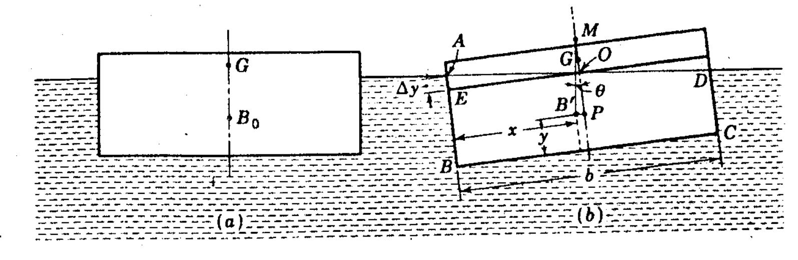



*Fig. 2.30 Estabilidad del cuerpo prismático.*

ma de la superficie del agua. Calcular la altura metacéntrica y el par restaurador cuando $\Delta y = 0{,}25$ m.

La profundidad sumergida $h$ en el agua es:

$$h = \frac{240 \times 1.000}{6 \times 20 \times 1.000} = 2 \text{ m}$$

El centroide en la posición inclinada se sitúa tomando momentos con respecto a $AB$ y $BC$,

$$x = \frac{1{,}75 \times 6 \times 3 + 0{,}50 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{3}}{2 \times 6} = \frac{34{,}50}{12} = 2{,}87 \text{ m}$$

$$y = \frac{1{,}75 \times 6 \times \frac{1{,}75}{2} + 0{,}50 \times 6 \times \frac{1}{2} \times (1{,}75 + \frac{0{,}5}{3})}{2 \times 6} = 1{,}00 \text{ m}$$

De la semejanza de los triángulos $AEO$ y $B'PM$,

$$\frac{\Delta y}{b/2} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{MP}}$$

$\Delta y = 0{,}25$, $b/2 = 3$, $\overline{B'P} = 3 - 2{,}87 = 0{,}13$ m; entonces,

$$\overline{MP} = \frac{0{,}13 \times 3}{0{,}25} = 1{,}56 \text{ m}$$

$G$ está a 2,25 m del fondo; por consiguiente,

$$\overline{GP} = 2{,}25 - 1{,}00 = 1{,}25 \text{ m}$$

y

$$\overline{MG} = \overline{MP} - \overline{GP} = 1{,}56 - 1{,}25 = 0{,}31 \text{ m}$$

El lanchón es estable puesto que $\overline{MG}$ es positivo; el par restaurador vale

$$W\overline{MG} \operatorname{sen} \theta = 240 \times 10^3 \times 0{,}31 \times \frac{0{,}25}{\sqrt{0{,}25^2 + 3^2}} = 6.190 \text{ m kg}$$

*Sección recta variable*

Para un cuerpo flotante de sección recta variable, tal como un barco (Fig. 2.31*a*), se puede encontrar una fórmula para determinar la altura metacéntrica para ángulos de inclinación $\theta$ muy pequeños. El desplazamiento horizontal del centro de empuje $r$ (Fig. 2.31*b*) se determina por la variación que experimentan las fuerzas de empuje debido a la cuña que se sumerge, lo que origina una fuerza hacia arriba en la parte izquierda y por la cuña que emerge, disminuyendo la fuerza de empuje en la misma proporción $\Delta F_B$ en la parte derecha. El sistema de fuerzas cons-



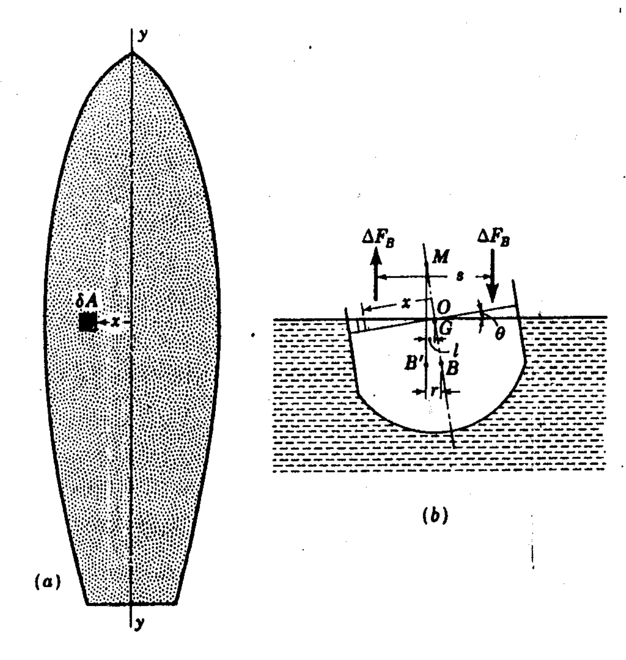



*Fig. 2.31 Relaciones de estabilidad en un cuerpo de sección recta variable.*

tituido por la fuerza de empuje original en $B$ y el par $\Delta F_B \times s$ debido a las cuñas, debe tener una resultante igual a la fuerza de empuje en $B'$. Tomando momentos respecto a $B$ para determinar el desplazamiento $r$,

$$\Delta F_B \times s = Wr \tag{2.8.1}$$

El par puede determinarse tomando momentos con respecto a $O$, intersección con la superficie líquida del eje de simetría del cuerpo. Para un elemento de área $\delta A$ en la sección horizontal del cuerpo por la superficie libre del líquido, un elemento de volumen de la cuña es $x\theta\, \delta A$; la fuerza de empuje debida a este elemento es $\gamma x\theta\, \delta A$, y su momento respecto a $O$ es $\gamma\theta x^2\, \delta A$, siendo $\theta$ el pequeño ángulo de inclinación en radianes. Integrando sobre el área completa de la sección horizontal del cuerpo por el plano de la superficie líquida, se encuentra que el par vale

$$\Delta F_B \times s = \gamma\theta \int_A x^2\, dA = \gamma\theta I \tag{2.8.2}$$

siendo $I$ el momento de inercia del área respecto al eje $yy$ (Fig. 2.31*a*). Igualando a la Ec. (2.8.1) resulta

$$\gamma\theta I = Wr = V\gamma r,$$

siendo $V$ el volumen total del líquido desplazado.

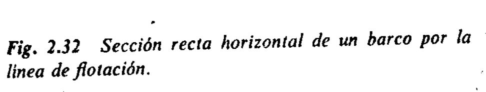
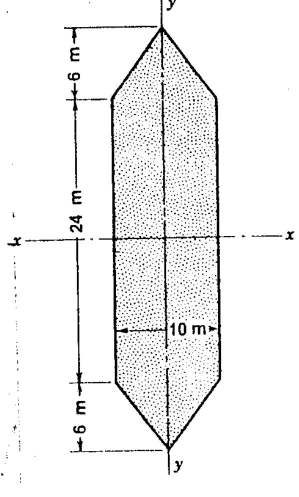


*Fig. 2.32* Sección recta horizontal de un barco por la línea de flotación.




Como $\theta$ es muy pequeño,

$$\overline{MB}\,\text{sen}\,\theta = \overline{MB}\theta = r$$

o sea,

$$\overline{MB} = \frac{r}{\theta} = \frac{I}{V}$$

La altura metacéntrica es entonces

$$\overline{MG} = \overline{MB} \mp \overline{GB}$$

o

$$\overline{MG} = \frac{I}{V} \mp \overline{GB} \qquad (2.8.3)$$

El signo menos se usa si $G$ está por encima de $B$; el signo más, si $G$ está por debajo de $B$.

***Ejemplo 2.13*** Un barco que desplaza 870 ton tiene una sección horizontal por la línea de agua representada en la Fig. 2.32. Su centro de empuje está 1,8 m por debajo de la superficie del agua y su centro de gravedad está 0,25 m por debajo de la superficie del agua. Determinar su altura matacéntrica en el balanceo alrededor del eje $yy$ y en el balanceo alrededor del eje $xx$.

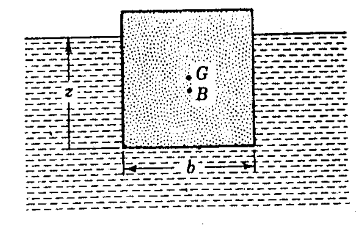
$$\overline{GB} = 1{,}8 - 0{,}25 = 1{,}55 \text{ m} \qquad V = \frac{870 \times 1.000}{1.000} = 870 \text{ m}^3$$

$$I_{yy} = \tfrac{1}{12} \times 24 \times 10^3 + 4 \times \tfrac{1}{12} \times 6 \times 5^3 = 2.250 \text{ m}^4$$
$$I_{xx} = \tfrac{1}{12} \times 10 \times 24^3 + 2 \times \tfrac{1}{36} \times 10 \times 6^3 + 60 \times 14^2 = 23.400 \text{ m}^4$$





*Fig. 2.33* Cubo flotando en un líquido.




Para el balanceo:

$$\overline{MG} = \frac{I}{V} - \overline{GB} = \frac{2.250}{870} - 1{,}55 = 1{,}03 \text{ m}$$

Para el cabeceo:

$$\overline{MG} = \frac{I}{V} - \overline{GB} = \frac{23.400}{870} - 1{,}55 = 25{,}35 \text{ m}$$

***Ejemplo 2.14*** Un cubo homogéneo de peso específico relativo $S_c$ flota en un líquido de peso específico relativo $S$. Encontrar entre qué valores debe estar comprendida la relación $S_c/S$ para que flote con sus caras verticales.

En la Fig. 2.33, $b$ es la longitud de la arista del cubo. La profundidad sumergida $z$ se determina aplicando la ecuación de la fuerza de empuje

$$b^3\gamma S_c = b^2 z \gamma S$$

siendo $\gamma$ el peso específico del agua. Despejando la profundidad sumergida

$$z = b\frac{S_c}{S}$$

El centro de empuje está a $z/2$ del fondo, y el centro de gravedad a $b/2$ del fondo, y, por consiguiente,

$$\overline{GB} = \frac{b - z}{2} = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{S_c}{S}\right)$$

Aplicando la Ec. (2.8.3) resulta:

$$\overline{MG} = \frac{I}{V} - \overline{GB} = \frac{1}{12}\frac{b \times b^3}{zb^2} - \frac{b - z}{2}$$

o sea,

$$\overline{MG} = \frac{b}{12}\frac{S}{S_c} - \frac{b}{2}\left(1 - \frac{S_c}{S}\right)$$

Cuando $\overline{MG}$ se iguala a cero, $S_c/S = 0{,}212$; $0{,}788$. Por sustitución se prueba que $\overline{MG}$ es positivo para

$$0 < \frac{S_c}{S} < 0{,}212 \qquad 0{,}788 < \frac{S_c}{S} < 1{,}0$$

La Fig. 2.34 es un gráfico de $\overline{MG}/b$ en función de $S_c/S$.

## 2.9 *Equilibrio relativo*

En la estática de los fluidos la variación de presión es fácil de calcular debido a la ausencia de tensiones de cortadura. Cuando en los fluidos en movimiento no hay desplazamientos relativos de una capa con respecto a la adyacente, la tensión de cortadura es también nula en todo el fluido. En un fluido con una traslación a velocidad constante la presión varía también siguiendo las leyes de la estática. Cuando se acelera un fluido de tal manera que no haya movimiento de una capa con respecto a la adyacente, es decir, cuando el fluido se mueve como si fuese un sólido, no existen tensiones de cortadura y la variación de la presión puede determinarse escribiendo la ecuación del movimiento para un cuerpo libre convenientemente elegido. Dos casos son interesantes: una aceleración lineal uniforme y una rotación uniforme alrededor de un eje vertical. Cuando el fluido se mueve así, se dice que se encuentra en *equilibrio relativo*.

Se pueden deducir muy fácilmente las ecuaciones de la variación de la presión a lo largo de determinadas líneas. Combinando éstas pueden hallarse las variaciones de presión entre dos puntos cualesquiera.

### *Aceleración lineal uniforme*

En un recipiente abierto que contiene un líquido (Fig. 2.35) sometido a una aceleración horizontal uniforme, el líquido se dispone por sí mismo de tal forma que se mueve como un sólido sometido a la acción de una fuerza aceleradora. Para encontrar la variación de la presión en una dirección vertical, se considera un cuerpo libre vertical (Fig. 2.35) y se utiliza la ecuación del movimiento en dirección vertical, $\Sigma f_y = ma_y$. Debido a que el movimiento es como el de un sólido, no existe ninguna tensión de cortadura en el líquido y las únicas fuerzas verticales son las debidas al peso $\gamma hA$ y a la presión $pA$ en la base del prisma vertical. Como no hay aceleración en la dirección $y$ tenemos

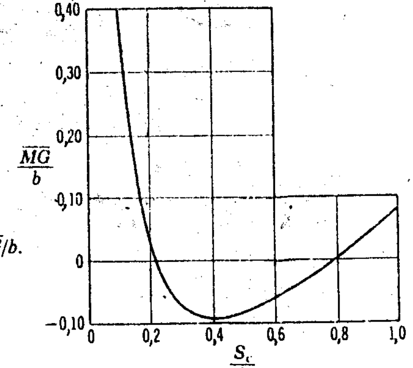



*Fig. 2.34 Diagrama $S_c/S$ en función de $\overline{MG}/b$.*



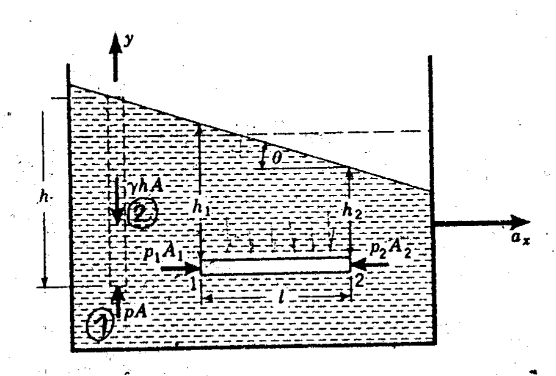



*Fig. 2.35 Aceleración horizontal.*

$$pA - \gamma hA = 0$$

o sea, $p = \gamma h$. La variación de la presión a lo largo de una línea vertical es la misma que para un líquido en reposo.

En un prisma de líquido, considerado como cuerpo libre normal a la dirección de $a_x$ pero a lo largo de una línea horizontal, la presión no varía, igual que con un líquido en reposo. Por consiguiente, el efecto de la aceleración $a_x$ debe ser en la dirección de $x$.

La ecuación del movimiento proyectada en dirección horizontal $\Sigma f_x = ma_x$ para el cuerpo libre horizontal de la Fig. 2.35 es

$$p_1A - p_2A = \frac{\gamma lA}{g} a_x \tag{2.9.1}$$

pues el peso actúa normalmente a $x$ y las fuerzas normales en la periferia del prisma son normales a la dirección $x$. Si el peso se ha expresado en kilogramos y la aceleración de la gravedad en m/seg$^2$, la masa estará en unidades técnicas de masa. La Ec. (2.9.1) puede escribirse

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\gamma(h_1 - h_2)}{l} = \frac{\gamma a_x}{g} \tag{2.9.2}$$

siendo $h_1$ y $h_2$ las distancias a la superficie libre. La expresión $(h_1 - h_2)/l$ es la pendiente de la superficie libre, tg $\theta$. Como

$$\text{tg}\ \theta = \frac{a_x}{g} \tag{2.9.3}$$

es constante cuando lo sea $a_x$, la superficie libre del líquido es un plano inclinado.

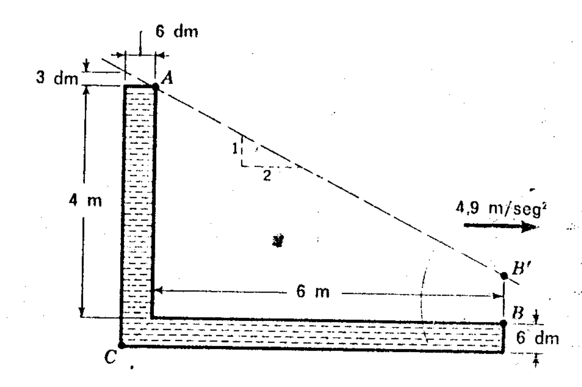



*Fig. 2.36* *Tanque completamente lleno de liquido.*

Si la vasija se llena con un líquido y se tapa, el líquido no necesita un periodo preliminar antes de moverse como un sólido sometido a una aceleración. Los planos de presión constante están dados también por la Ec. (2.9.3). Si la presión se conoce en un punto del líquido de la vasija, puede hallarse fácilmente en todos los restantes puntos. La forma de la vasija carece de importancia en tanto que el fluido esté junto.

***Ejemplo 2.15*** El depósito de la Fig. 2.36 se llena con aceite de peso específico relativo 0,8 y se acelera como señala la figura. Hay un pequeño orificio en el depósito en $A$. Determinar la presión en $B$ y en $C$ y la aceleración $a_x$ necesaria para que la presión en $B$ sea cero.

Los planos de presión constante tienen la pendiente

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4,9}{9,81} = 0,5$$

y en $A$ la presión es nula. El plano por $A$ de presión constante pasa a 1 m por encima de $B$; por tanto,

$$p_B = 1 \times 0,8 \times 10^3 = 800 \text{ kg/m}^2 = 0,08 \text{ kg/cm}^2$$

Como $C$ está a 4,9 m por debajo del plano de presión nula, será

$$p_C = 4,9 \times 0,8 \times 10^3 = 39.200 \text{ kg/m}^2 = 3,92 \text{ kg/cm}^2$$

Para que la presión sea nula en $B$ tiene que ser

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{6} = \frac{a_x}{9,81}$$

de donde

$$a_x = (\tfrac{4}{6})9,81 = 6,53 \text{ m/seg}^2$$



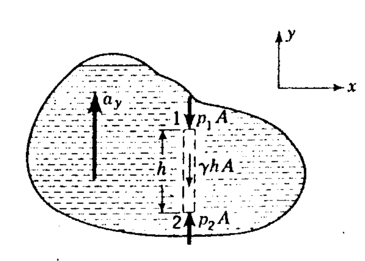



*Fig. 2.37* *Aceleración vertical.*

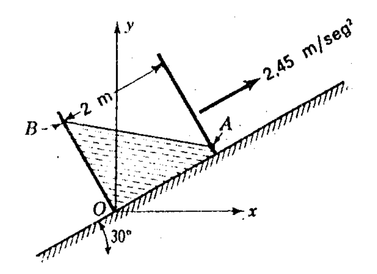



*Fig. 2.38* *Aceleración uniforme en un plano inclinado.*

Si la aceleración es vertical, $a_y$, la superficie libre (cuando la haya) permanece horizontal. La presión es constante en planos horizontales. Considerando un cilindro circular vertical de sección de área $A$ (Fig. 2.37) y altura $h$ como cuerpo libre y teniendo en cuenta la ecuación del movimiento $\Sigma f_y = ma_y$ resulta

$$p_2A - p_1A - \gamma hA = \frac{\gamma hA}{g} a_y$$

Simplificando,

$$p_2 - p_1 = \gamma h\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) \qquad (2.9.4)$$

Por ejemplo, si el recipiente se deja caer $a_y = -g$ y $p_2 = p_1$ y la presión es la misma en todo el líquido.

***Ejemplo 2.16*** Una caja cúbica de 2 m de arista, llena hasta la mitad con aceite de peso específico relativo 0,90, se acelera a lo largo de un plano inclinado a 30° con la horizontal como se ve en la Fig. 2.38. Determinar la pendiente de la superficie libre y la presión a lo largo del fondo.

En el sistema de coordenadas de la figura

$$a_x = 2,45 \cos 30° = 2,12 \text{ m/seg}^2$$

y

$$a_y = 2,45 \text{ sen } 30° = 1,22 \text{ m/seg}^2$$

La variación de la presión en la dirección $x$ es [según la Ec. (2.9.2)]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma a_x}{g} = -10^3 \times 0,90 \times \frac{2,120}{9,80} = -0,194\ 10^3 \text{ kg/m}^3 = -194 \frac{\text{kg/m}^2}{\text{m}}$$

La variación de la presión en la dirección $y$ es [según la Ec. (2.9.4)]

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = -10^3 \times 0,90\left(1 + \frac{1,22}{9,80}\right) = -1.010 \frac{\text{kg/m}^2}{\text{m}}$$

Por consiguiente (ver el Apéndice B)

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = -194\, dx - 1.010\, dy$$

Esta ecuación se puede integrar directamente y se obtiene la presión en un punto cualquiera $(x,y)$ del fluido. Pero si dos puntos separados horizontal y verticalmente las distancias respectivas $dx$ y $dy$ están a la misma presión, se tiene que

$$0 = -194\, dx - 1.010\, dy$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{194}{1.010} = 0{,}1925$$

Esta es la pendiente de la línea de presión constante en el lugar arbitrario considerado. Como esta pendiente es una constante y, por tanto, es independiente de la posición, las líneas de presión constante forman un haz de líneas paralelas. La presión es constante en la superficie libre; por consiguiente, forma un ángulo de 40° 52′ con el fondo del recipiente, ya que arc tg 0,1925 = 10° 52′. La profundidad paralela a las caras de la caja es menor en el lado derecho 2 tg 40° 52′ = 1,73 m. El volumen total no puede cambiar. Por consiguiente, si $s$ es la profundidad en la cara derecha

$$2\left(\frac{1{,}73}{2} + s\right) 2 = 4 \text{ m}^3$$

de donde $s = 0{,}135$ m. El punto $A$ de la superficie libre tiene por coordenadas

$$x = 2 \cos 30° - 0{,}135 \operatorname{sen} 30° = 1{,}665 \text{ m}$$

y

$$y = 2 \operatorname{sen} 30° + 0{,}135 \cos 30° = 1{,}117 \text{ m}$$

La integración de la ecuación diferencial de la presión da

$$p = p_0 - 194x - 1010y$$

Sustituyendo en esta ecuación $x$, $y$ y $p$ por sus valores en $A$, resulta, siendo $p_0$ la presión en el origen,

$$0 = p_0 - 194 \times 1{,}665 - 1010 \times 1{,}1117$$

de donde $p_0 = 1455{,}1$ kg/m². Si $t$ es la distancia a lo largo del fondo desde $O$, entonces

$$x = 0{,}866t \quad \text{e} \quad y = 0{,}50t$$

y

$$p = 1455{,}1 - 194 \times 0{,}866t - 1010 \times 0{,}50t$$
$$= 1455{,}1 - 675t \text{ kg/m}^2$$



## *Rotación uniforme alrededor de un eje vertical*

La rotación de un fluido, que se mueve como un sólido, respecto a un eje se llama *vórtice forzado*. Cada partícula del fluido tiene la misma velocidad angular. Este movimiento se debe distinguir del *vórtice libre*, donde cada partícula se mueve en un camino circular con una velocidad que varía inversamente con la distancia desde el centro. En los Caps. 7 y 9 se estudia el vórtice libre. Cuando un líquido encerrado en un depósito gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante, después de un cierto intervalo de tiempo se mueve como un sólido. No existe ninguna tensión de cortadura en el líquido y la única aceleración existente tiene dirección radial y sentido hacia el eje de rotación. La ecuación del movimiento en dirección vertical de un cuerpo libre demuestra que las condiciones hidrostáticas prevalecen a lo largo de una línea vertical; de aquí que la presión en cualquier punto del líquido esté dada por el producto del peso específico por la distancia vertical desde la superficie libre.

En la proyección de la ecuación del movimiento en dirección de la tangente a la trayectoria circular de una partícula, la aceleración es nula y, por tanto, la presión no cambia a lo largo de la trayectoria.

En la proyección de la ecuación del movimiento en dirección radial (horizontal) (Fig. 2.39) con un cuerpo libre de longitud $\delta r$ y sección recta de área $\delta A$, si la presión en $r$ es $p$, entonces en la cara opuesta la presión es $p + (\partial p/\partial r)\,\delta r$. La aceleración es $-\omega^2 r$; por tanto,

$$p\,\delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r}\,\delta r\right)\delta A = \frac{\delta A\;\delta r\gamma}{g}(-\omega^2 r)$$

Después de simplificar y dividir por el volumen del elemento $\delta A\;\delta r$,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r$$

Integrando

$$p = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \frac{r^2}{2} + c$$

siendo $c$ la constante de integración. Si el valor de la presión en el eje ($r = 0$) es $p_0$, entonces $c = p_0$ y

$$p = p_0 + \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g} \qquad (2.9.5)$$

Cuando se elige el plano horizontal para el cual $p_0 = 0$ y la Ec. (2.9.5) se divide por $\gamma$,

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \qquad (2.9.6)$$

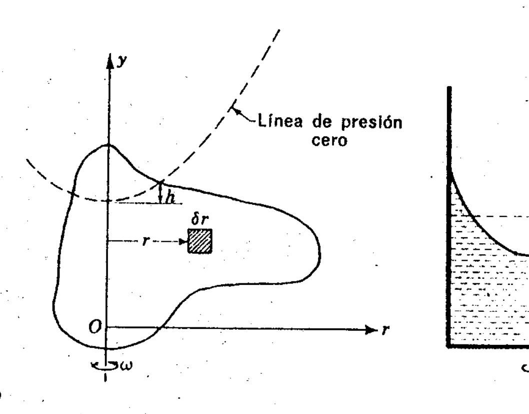



*Fig. 2.39* Rotación de un fluido respecto a un eje vertical.

*Fig. 2.40* Rotación de un cilindro circular respecto a su eje.

que demuestra que la altura, o profundidad vertical varía con el cuadrado del radio. Las superficies de igual presión son paraboloides de revolución.

Cuando existe una superficie libre en un recipiente que está girando, el volumen que ocupa el fluido, que es el que está por debajo del paraboloide de revolución, tiene que ser igual al volumen que tenía el fluido cuando estaba en reposo. La forma del paraboloide depende únicamente de la velocidad angular $\omega$.

En el caso de un cilindro circular que gira alrededor de su eje (Fig. 2.40), la elevación del líquido desde su vértice hasta la pared del cilindro es, según la Ec. (2.9.6), $\omega^2 r_0^2/2g$. Como un paraboloide de revolución tiene un volumen igual a la mitad de su cilindro circunscrito, el volumen de líquido por encima del plano horizontal por el vértice es

$$\pi r_0^2 \times \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

Cuando el líquido está en reposo, este líquido está también por encima del plano a través del vértice, a una profundidad uniforme de

$$\frac{1}{2}\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

Por consiguiente, el líquido se eleva a lo largo de las paredes la misma longitud que el centro desciende, lo que permite localizar el vértice cuando se conocen $\omega$, $r_0$ y la profundidad antes de la rotación.

*Ejemplo 2.17* Un líquido de peso específico relativo 1,2 gira a 200 r.p.m. alrededor de un eje vertical. En un punto *A* del fluido a 2 m del eje, la presión es



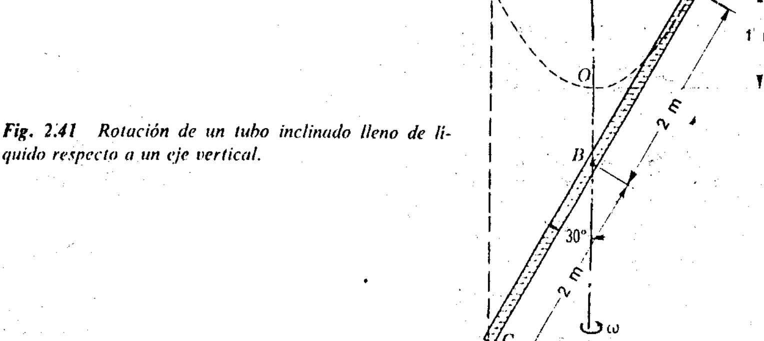



*Fig. 2.41* Rotación de un tubo inclinado lleno de líquido respecto a un eje vertical.

10 kg/cm². ¿Cuál es la presión en un punto *B*, 4 m más alto que *A* y a 5 m del eje?

Escribiendo la Ec. (2.9.5) para los dos puntos

$$p_A = p_{0A} + \gamma\frac{\omega^2 r_A^2}{2g} \qquad p_B = p_{0B} + \gamma\frac{\omega^2 r_B^2}{2g}$$

Con los datos del problema $\omega = 200 \times 2\pi/50 = 20{,}95$ rad/seg; $\gamma = 1{,}2 \times 10^3 = 1200$ kg/m³, $r_A = 2$ m, $r_B = 5$ m, $p_{0A} - p_{0B} = 4 \times 1200 = 4800$ kg/m², $p_A = 100.000$ kg/m². Restando la segunda ecuación de la primera y sustituyendo valores

$$p_A - p_B = p_{0A} - p_{0B} + \frac{\gamma\omega^2}{2g}(r_A^2 - r_B^2)$$

y

$$100.000 - p_B = 4800 + \frac{1200}{19{,}6} \times 20{,}95^2 \times (2^2 - 5^2)$$

De donde $p_B = 658200$ kg/m² $= 65{,}82$ kg/cm².

Si un depósito cerrado sin superficie libre o con una superficie libre parcialmente expuesta, gira uniformemente alrededor de un eje vertical, se puede construir una superficie libre *imaginaria* que es un paraboloide de revolución de forma dada por la Ec. (2.9.6). La distancia vertical desde un punto del fluido a la superficie libre es la altura de presión en el punto.

*Ejemplo 2.18* Un tubo recto de 4 m de longitud cerrado en el fondo está lleno de agua e inclinado 30° con la vertical y gira alrededor de un eje vertical que pasa por su punto medio con una velocidad angular 4,425 rad/seg. Trazar el paraboloide de presión cero y determinar la presión en el fondo y en el punto medio del tubo.

En la Fig. 2.41 el paraboloide de presión nula pasa por el punto $A$. Si el origen se toma en el vértice, donde es $p_0 = 0$, la Ec. (2.9.6) da

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{(4{,}425)^2}{19{,}62}(2 \text{ sen } 30^\circ)^2 = 1 \text{ m}$$

es decir, que el vértice $O$ está 1 m por debajo de $A$. La presión en el fondo del tubo es $\gamma \times \overline{CD}$, o sea

$$4 \cos 30 \times 1000 = 3460 \text{ kg/m}^2$$

En el punto medio, $\overline{OB} = 2 \cos 30^\circ - 1 = 0{,}732$ m

$$p_B = 0{,}732 \times 1000 = 732 \text{ kg/m}^2$$

### *Fuerzas debidas a la presión del fluido en equilibrio relativo*

El módulo de la fuerza que actúa sobre un área plana en contacto con un fluido que se acelera como un cuerpo rígido se puede obtener integrando sobre la superficie,

$$F = \int p\, dA$$

La naturaleza de la aceleración y la orientación de la superficie rigen la variación particular de $p$ sobre la superficie. Cuando la presión varía linealmente sobre la superficie plana (aceleración lineal), el módulo de la fuerza viene dado por el producto de la presión en el centroide por el área, ya que el volumen del prisma de presiones viene dado por $p_G A$. Para distribuciones no lineales se deben hallar el módulo y la línea de acción por integración.

## *Problemas*

*2.1* Demostrar que la presión en un punto de un fluido estático es la misma en todas direcciones para el caso tridimensional.

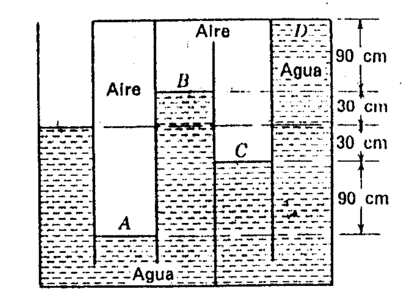



*Fig. 2.42*



*2.2* El recipiente de la Fig. 2.42 contiene agua y aire, según se muestra. ¿Cuál es la presión en $A$, $B$, $C$ y $D$ en kg/cm²?

*2.3* El tubo de la Fig. 2.43 está lleno de aceite. Determinar la presión en $A$ y $B$ en m de columna de agua.

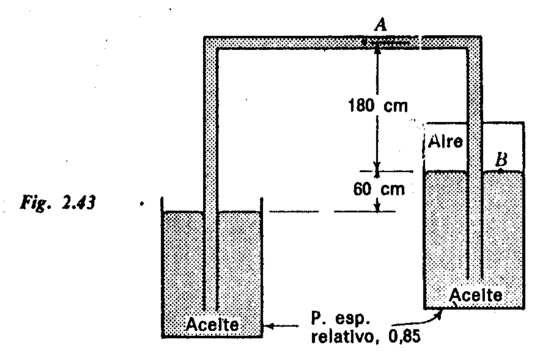



*Fig. 2.43*

*2.4* Calcular la presión en $A$, $B$, $C$ y $D$ (Fig. 2.44) en kg/cm².

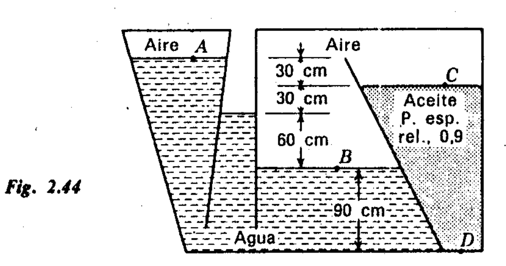



*Fig. 2.44*

*2.5* Deducir las ecuaciones que dan la presión y la densidad a cualquier altura en un gas estático cuando se conocen las condiciones en una altura y el gradiente de temperatura $\beta$.

*2.6* Deducir, haciendo que $\beta \to 0$, el caso isotérmico a partir del Problema 2.5.

*2.7* Con los resultados del Prob. 2.5, determinar la presión y la densidad a 1.500 m de altura cuando $p = 1$ kg/cm² (abs), $t = 20°$ C y $\beta = -0{,}005°$ C/m a 300 m de altura en aire.

*2.8* Determinar la presión y la densidad del aire a 3.000 m de altura, si la presión al nivel del mar es 1,05 kg/cm² (abs) y se supone que la temperatura es uniforme e igual a −6° C.

*2.9* En aire isotérmico a 25° C, ¿cuál es la distancia vertical para que la densidad se reduzca en un 10 por 100?

*2.10* Expresar la presión de 0,6 kg/cm² en: (*a*) milímetros de mercurio, (*b*) metros de agua, (*c*) metros de tetrabromuro de acetileno, de densidad relativa 2,94.

*2.11* Un manómetro da de lectura 0,15 kg/cm² y el barómetro 750 mm de mercurio. Expresar la presión de otras seis formas corrientes.

*2.12* Expresar 3 atmósferas en metros de agua en presión manométrica. La lectura del barómetro es de 740 mm Hg.

*2.13* La lectura del manómetro $A$ colocado en el interior de un depósito de presión es 0,9 kg/cm². Otro manómetro $B$ colocado en el exterior del depósito de

presión y conectado con él, marca 1,4 kg/cm², y un barómetro aneroide marca 750 mm de mercurio. ¿Cuál es la presión absoluta que mide $A$ en mm de mercurio? Ver la Figura 2.45.

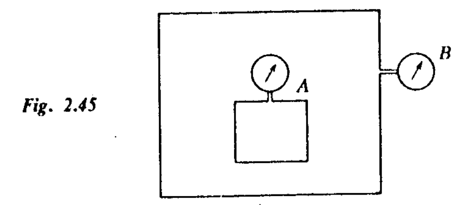



*Fig. 2.45*

***2.14*** Determinar las alturas de columnas de líquido equivalentes a 450 mm de mercurio, para el queroseno, densidad relativa 0,83, y para el tetrabromuro de acetileno, densidad relativa 2,94.

***2.15*** Para una lectura de $h$ = 500 mm en la Fig. 2.8*a*, determinar la presión en $A$ en kg/cm². El peso específico relativo del líquido es 1,90.

***2.16*** Determinar la lectura $h$ en la Fig. 2.8*b* para $p_A$ = 0,2 kg/cm² de succión, si el líquido es queroseno, de densidad relativa 0,83.

***2.17*** Respecto a la Fig. 2.8*b*, sea $h$ = 200 mm, la lectura del barómetro 750 mm y el líquido agua; hallar $p_A$ en metros de columna de agua (presión absoluta).

***2.18*** En la Fig. 2.8*c*, $S_1$ = 0,86, $S_2$ = 1,0, $h_2$ = 21 cm, $h_1$ = 43 cm. Determinar la presión manométrica $p_A$ en centímetros de mercurio. Si la lectura del barómetro es 750 mm Hg, ¿cuál es la presión absoluta $p_A$ en metros de agua?

***2.19*** En la vasija $A$ de la Fig. 2.8*c* hay gas. Siendo agua el fluido manométrico y $h_1$ = 75 mm, determinar la presión en $A$ en mm de mercurio.

***2.20*** En la Fig. 2.9*a*, $S_1$ = 1,0, $S_2$ = 0,95, $S_3$ = 1,0, $h_1 = h_2$ = 30 cm y $h_3$ = 90 cm. Calcular $p_A - p_B$ en centímetros de agua.

***2.21*** Hallar en el Prob. 2.20 el valor de $h_2$ para $p_A - p_B$ = −250 mm de columna de agua.

***2.22*** En la Fig. 2.9*b*, $S_1 = S_3$ = 0,83, $S_2$ = 13,6, $h_1$ = 40 cm, $h_2$ = 20 cm y $h_3$ = 30 cm. (*a*) Determinar $p_A$ si $p_B$ = 0,7 kg/cm² (man). (*b*) Para $p_A$ = 1,4 kg/cm² (abs) y una lectura barométrica de 740 mm Hg, determinar $p_B$ en metros de agua.

***2.23*** Hallar $h_2$ en el Prob. 2.22 para $p_A = p_B$.

***2.24*** En la Fig. 2.46, $A$ contiene agua y el fluido manométrico tiene una densidad relativa de 2,94. Cuando el menisco de la izquierda coincide con el cero de

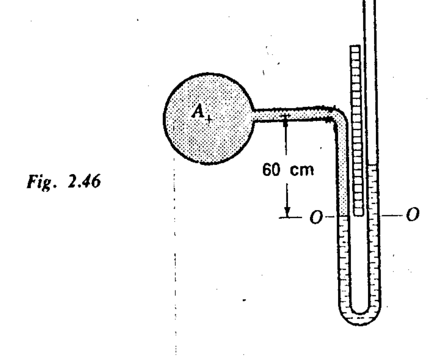



*Fig. 2.46*



la escala, $p_A$ = 10 cm de agua. Determinar la lectura del menisco de la derecha para $p_A$ = 0,07 kg/cm² (man) cuando no se ajusta el tubo en U o la escala.

***2.25*** La altura del Empire State Building es de 381 m. ¿Cuál es la diferencia de presión en kg/cm² de una columna de agua de la misma altura?

***2.26*** ¿Cuál es la presión en un punto situado 15 m por debajo de la superficie libre de un fluido cuya densidad en UTM/m³ viene dada por la fórmula $\rho = 100 + ah$, en la que $a$ = 1,7 UTM/m⁴, y $h$ es la distancia en m medida a partir de la superficie libre?

***2.27*** Una tubería vertical de gas en un edificio contiene gas, $\rho$ = 0,105 UTM/m³ y $p$ = 75 mm de columna de agua manométrica en la base. Determinar en la parte superior del edificio, que mide 240 m, la presión manométricas del gas en metros de columna de agua para los casos: (*a*) gas incompresible y (*b*) gas isotérmico. Presión barométrica, 10 m de columna de agua, $t$ = 22° C.

***2.28*** En la Fig. 2.11 determinar $R$, la diferencia de altura para una diferencia en la presión del gas de 1 cm de agua. $\gamma_2$ = 1.000 kg/m³; $\gamma_3$ = 1.050 kg/m³; $a/A$ = 0,01.

***2.29*** El manómetro inclinado de la Fig. 2.12 marca cero cuando $A$ y $B$ están a la misma presión. El diámetro del depósito es 50 mm y el del tubo inclinado 6 mm. Para $\theta$ = 30° y peso específico relativo del fluido manométrico 0,832, hallar $p_A - p_B$ en kg/cm² en función de la lectura $R$ en metros del aparato.

***2.30*** Determinar el peso $W$ que puede soportarse con los 50 kg aplicados sobre el pistón de la Figura 2.47.

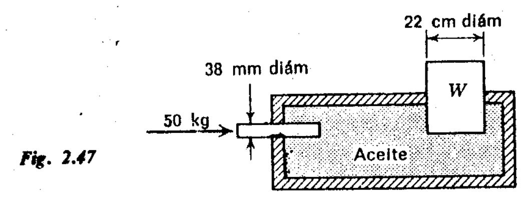



*Fig. 2.47*

***2.31*** Despreciando el peso del depósito (Fig. 2.48), hallar (*a*) la fuerza que

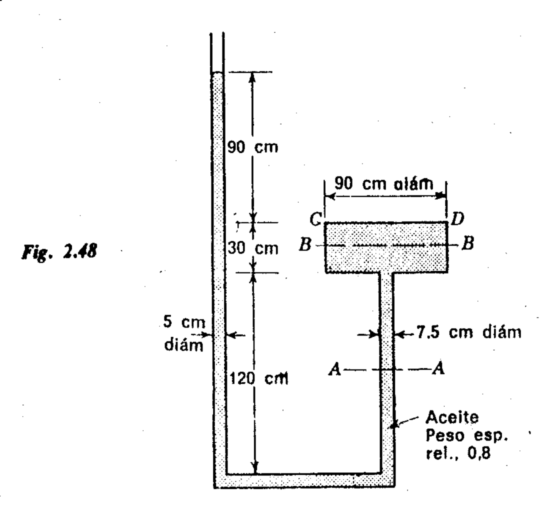



*Fig. 2.48*

tiende a elevar la parte superior circular $CD$ y (*b*) la carga de compresión en la pared del tubo en $A$-$A$.

2.32 Determinar la fuerza que ejerce el aceite sobre la superficie superior $CD$ de la Fig. 2.48 si el nivel del líquido en el extremo abierto de la tubería se reduce en 120 cm.

2.33 El depósito de la Fig. 2.49 tiene una sección recta circular. Determinar la fuerza hacia arriba sobre la superficie del tronco de cono $ABCD$. ¿Cuál es la fuerza hacia abajo sobre el plano $EF$? ¿Es igual al peso del fluido? Explicarlo.

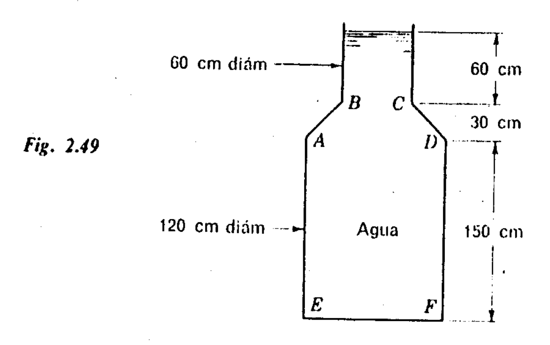


Fig. 2.49

2.34 El depósito cilíndrico de la Fig. 2.50 pesa 50 kg cuando está vacío. Está lleno de agua y es soportado por el pistón. ¿Qué fuerza se ejerce sobre el extremo superior del cilindro? Si se aplica una fuerza adicional de 75 kg sobre el cilindro, ¿cuánto se incrementaría la fuerza del agua sobre la parte superior del cilindro?

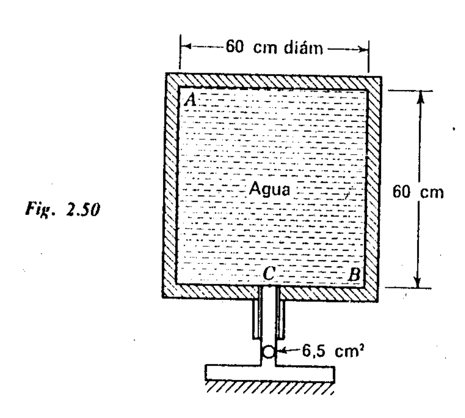


Fig. 2.50

2.35 Un barril de 60 cm de diámetro lleno de agua tiene unido a su tapa superior un tubo vertical de 12 mm de diámetro. Despreciando la compresibilidad, ¿cuántos kilos de agua se deben añadir al tubo para que ejerza una fuerza de 500 kg sobre la tapa del barril?

2.36 Una superficie triangular con un ángulo recto tiene un vértice en la superficie libre de un líquido (Fig. 2.51). Hallar la fuerza sobre una de las caras (*a*) integrando y (*b*) por fórmula.



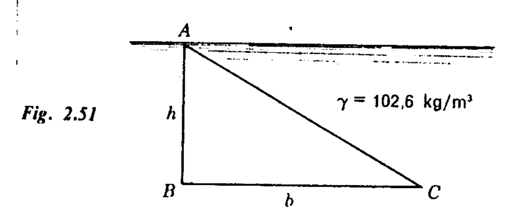


Fig. 2.51

2.37 Determinar el módulo de la fuerza que actúa sobre el triángulo $ABC$ de la Fig. 2.52 (*a*) integrando y (*b*) por fórmula.

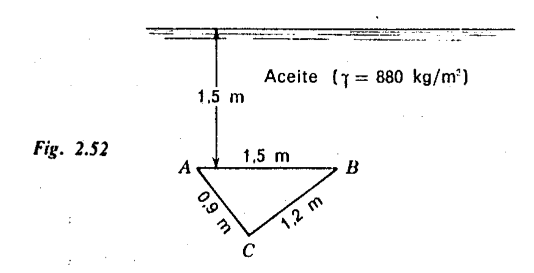


Fig. 2.52

2.38 Hallar el momento respecto a $AB$ de la fuerza que actúa sobre una de las caras de la superficie $ABC$ de la Figura 2.51.

2.39 Hallar el momento respecto a $AB$ de la fuerza que actúa sobre una de las caras de la superficie $ABC$ de la Figura 2.52.

2.40 Situar la posición de una línea horizontal por debajo de $AB$, Fig. 2.52, de forma que el módulo de la fuerza debida a la presión sea igual por encima que por debajo de la línea.

2.41 Determinar la fuerza que actúa sobre una de las caras de la superficie vertical de la Figura 2.53.

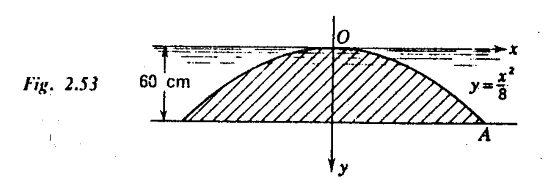


Fig. 2.53

2.42 Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre una de las caras de la corona circular vertical mostrada en la Figura 2.54.

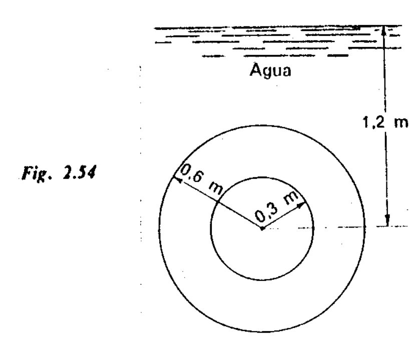


*Fig. 2.54*

***2.43*** Determinar el momento en $A$ necesario para mantener la compuerta en la forma que se indica en la Figura 2.55.

***2.44*** Si hay agua sobre el otro lado de la compuerta (Fig. 2.55) hasta $A$, determinar la fuerza resultante debida a la acción del agua sobre los dos lados de la compuerta, incluyendo también la línea de acción de la misma.

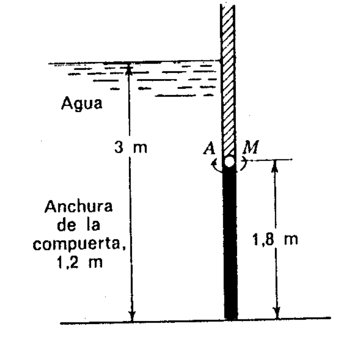


*Fig. 2.55*

***2.45*** El eje de la compuerta de la Fig. 2.56 fallará cuando se le aplique un momento de 14.000 mkg. Determinar el valor máximo de la profundidad $h$ del líquido.

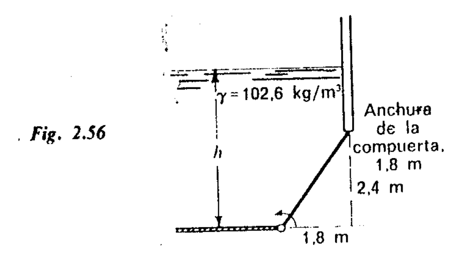


*Fig. 2.56*

***2.46*** La presa de la Fig. 2.57 tiene un jabalcón $AB$ cada 3 m. Determinar la fuerza de compresión sobre el jabalcón, despreciando el peso de la presa.

***2.47*** Hallar la distancia a que está el centro de presión por debajo de la superficie líquida en el área triangular $ABC$ de la Fig. 2.52 por integración y por fórmula.



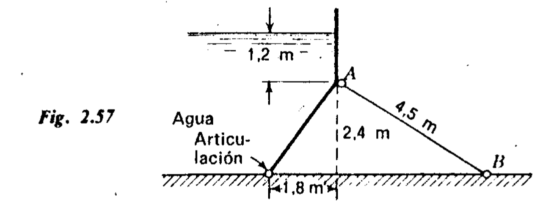


*Fig. 2.57*

***2.48*** Determinar por integración la posición horizontal del centro de presión en la Figura 2.52.

***2.49*** Utilizando el prisma de presiones determinar la fuerza resultante y su situación en el triángulo de la Figura 2.51.

***2.50*** Determinar, por integración, el centro de presión de la Figura 2.51.

***2.51*** Situar el centro de presión para el área anular de la Figura 2.54.

***2.52*** Situar el centro de presión sobre la compuerta de la Figura 2.55.

***2.53*** Un área vertical cuadrada de 1,50 × 1,50 m está sumergida en agua con el lado superior a 60 cm por debajo de la superficie. Situar una línea horizontal sobre la superficie del cuadrado tal que (*a*) la fuerza sobre la parte superior sea igual a la fuerza sobre la parte inferior y (*b*) el momento de la fuerza respecto a la línea debido a la parte superior sea igual al debido a la parte inferior.

***2.54*** Un triángulo equilátero con un lado en una superficie de agua se extiende hacia abajo formando un ángulo de 45°. Situar el centro de presión en función de la longitud $b$ del lado.

***2.55*** Desarrollar en la Fig. 2.56 la expresión de $y_p$ en función de $h$.

***2.56*** Localizar el centro de presión en la Figura 2.53.

***2.57*** Situar el centro de presión del área vertical de la Figura 2.58.

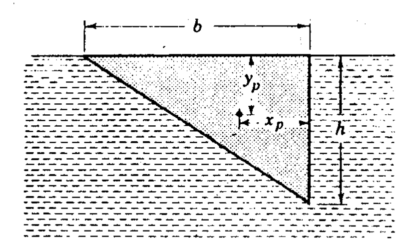


*Fig. 2.58*

***2.58*** Demostrar el hecho de que el módulo de la resultante sobre un área plana totalmente sumergida no varía si el área gira alrededor de un eje que pase por su centroide.

***2.59*** La compuerta de la Fig. 2.59 pesa 150 kg/m en dirección normal al dibujo. Su centro de gravedad está situado a 45 cm de su cara izquierda y a 60 cm sobre la cara inferior. Puede girar alrededor de $O$. Determinar la posición de la superficie libre del agua en que se inicia el giro hacia arriba de la compuerta. (La superficie del agua está por debajo del eje de giro.)

***2.60*** Determinar $h$ en el Prob. 2.59 para el que la compuerta alcance justamente la posición vertical mostrada en la figura.

***2.61*** Determinar el valor de $h$ y la fuerza contra el tope cuando esta fuerza sea un máximo para la compuerta del Problema 2.59.

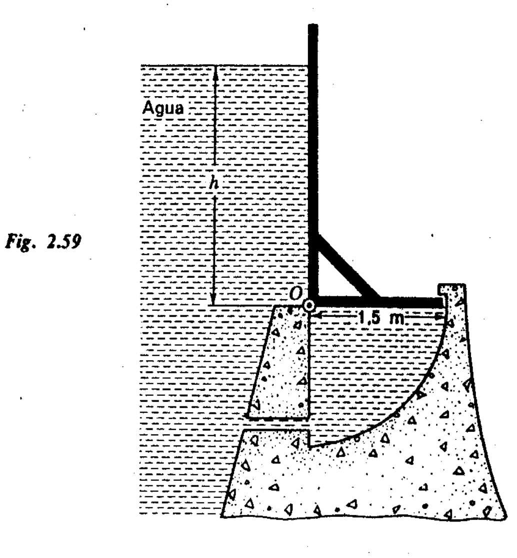



*Fig. 2.59*

**2.62** Determinar el valor de $y$ de la Fig. 2.60 para que el guardaguas (represa de madera) se vuelque cuando el agua alcance su extremo superior.

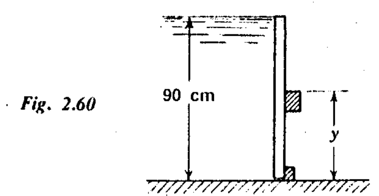



*Fig. 2.60*

**2.63** Determinar la situación $y$ del eje de la compuerta rectangular de la Figura 2.61 de manera que se abra cuando la superficie del líquido esté como se indica en la figura.

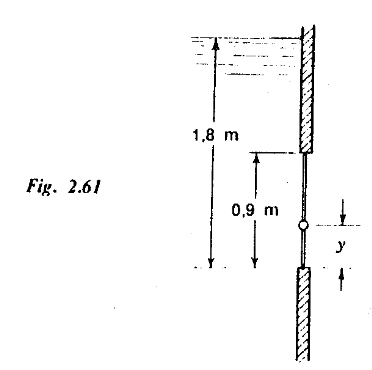



*Fig. 2.61*



**2.64** Utilizando el prisma de presiones, demostrar que el centro de presión se aproxima al centroide de un área cuando aumenta la profundidad.

**2.65** (*a*) Hallar el módulo y la línea de acción de la fuerza a cada lado de la compuerta de la Fig. 2.62. (*b*) Hallar la fuerza resultante debida al líquido a ambos lados de la compuerta. (*c*) Determinar $F$ para abrir la compuerta si ésta es uniforme y pesa 3.000 kg.

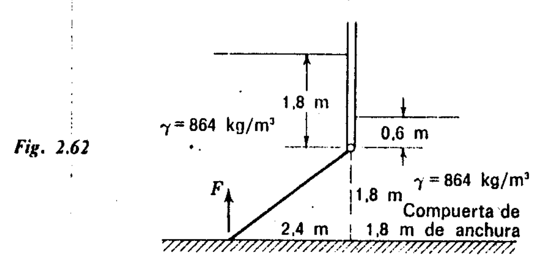



*Fig. 2.62*

**2.66** Suponiendo una distribución lineal de tensiones sobre la base de la presa de la Fig. 2.63, calcular (*a*) la posición donde la resultante de las fuerzas corta a la base y (*b*) la máxima y mínima tensión de compresión en la base. Despreciar el empuje ascensional hidrostático.

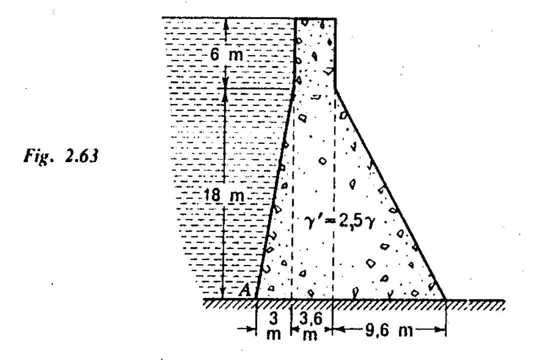



*Fig. 2.63*

**2.67** Resolver el Prob. 2.66 con la condición de que el empuje ascensional hidrostático varía linealmente desde 18 m en $A$ hasta cero en el extremo derecho de la presa.

**2.68** Determinar el momento $M$ que hay que aplicar a $O$ (Fig. 2.64) para mantener la compuerta cerrada.

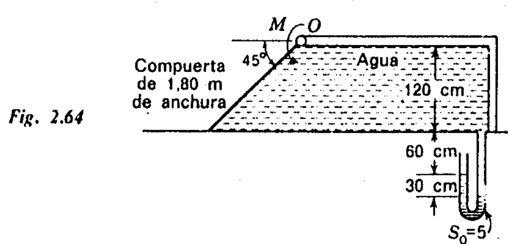



*Fig. 2.64*

× *2.69* La compuerta de la Fig. 2.65 está en equilibrio. Calcular $W$, peso del contrapeso por metro de ancho, despreciando el peso de la compuerta. ¿Está la compuerta en equilibrio estable?

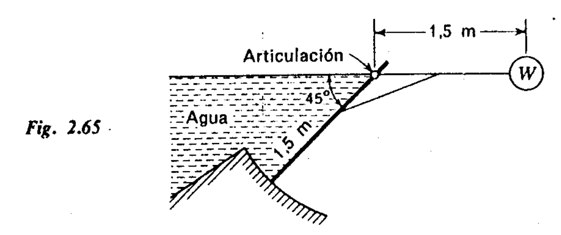



*Fig. 2.65*

*2.70* La compuerta de la Fig. 2.66 pesa 220 kg/m de longitud de la misma (perpendicular al dibujo). En la posición mostrada está en equilibrio. Despreciando el peso del brazo y tirante que soportan el contrapeso, determinar (*a*) $W$ y (*b*) si la compuerta está en equilibrio estable. El peso es de cemento, densidad relativa 2,50.

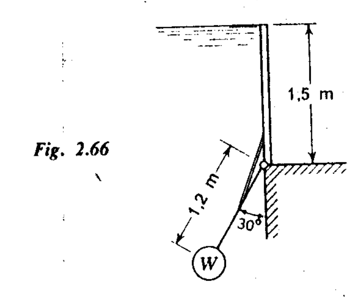



*Fig. 2.66*

*2.71* La compuerta plana (Fig. 2.67) pesa 250 kg por metro de longitud y su centro de gravedad está a 1,80 m de la articulación $O$. (*a*) Hallar $h$ en función de $\theta$ para el equilibrio. (*b*) ¿Está en equilibrio estable para cualquier valor de $\theta$?

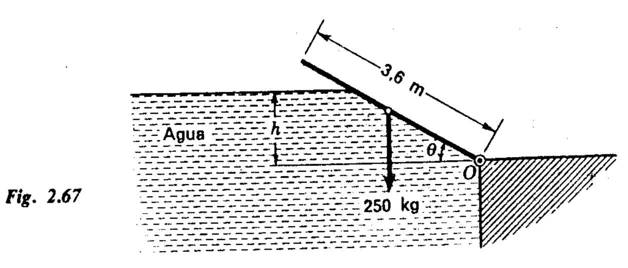



*Fig. 2.67*

*2.72* Una tubería de 5 m de diámetro conduce un fluido a una presión manométrica de 10 kg/cm$^2$. ¿Qué espesor debe tener la pared de la conducción para que la tensión máxima sobre la misma sea de 700 kg/cm$^2$?

*2.73* Para obtener la misma área de flujo, ¿qué sistema de tuberías necesita menos acero: una sola tubería o cuatro tuberías con diámetro la mitad? En los dos casos es igual la tensión máxima admisible en la pared de la tubería.



*2.74* Un recipiente esférico de pared delgada y diámetro 2,5 m contiene un gas a una presión manométrica de 14 kg/cm$^2$. Si la tensión máxima admisible del material es de 550 kg/cm$^2$, determinar el espesor mínimo de la pared.

*2.75* Un recipiente cilíndrico de 2,40 m de altura y 1,20 m de diámetro para prevenir la tracción lleva dos aros a 30 cm de cada extremo. Cuando se llena de agua, ¿cuál es la tracción en cada aro debida al agua?

*2.76* Una bola de acero de 25 mm de diámetro cierra un orificio circular de 20 mm de diámetro de una cámara de presión, donde la presión manométrica reinante es de 280 kg/cm$^2$. ¿Qué fuerza se requiere para desplazar la bola del orificio?

× *2.77* Si la componente horizontal de la fuerza sobre una superficie curva *no* fuera igual a la fuerza sobre la proyección de la superficie en un plano vertical, ¿qué conclusiones se podrían obtener respecto a la propulsión de un bote (Figura 2.68)?

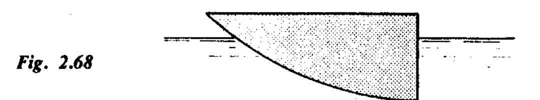


*Fig. 2.68*

× *2.78* (*a*) Determinar la componente horizontal de la fuerza de la presión que actúa sobre la compuerta radial (Fig. 2.69) y su línea de acción. (*b*) Determinar la componente vertical de la fuerza y su línea de acción. (*c*) ¿Qué fuerza $F$ se necesita para abrir la compuerta, despreciando su peso? (*d*) ¿Cuál es el momento respecto a un eje normal al papel y que pase por el punto $O$?

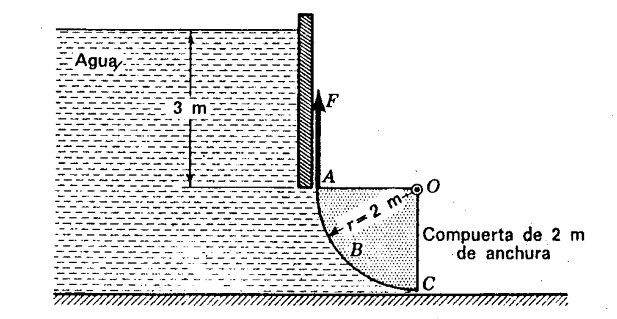



*Fig. 2.69*

*2.79* Calcular la fuerza $F$ necesaria para mantener la compuerta de la Fig. 2.70 en posición cerrada. $R = 60$ cm.

*2.80* Calcular la fuerza $F$ que se requiere para abrir o mantener cerrada la compuerta de la Fig. 2.70, cuando $R = 45$ cm.

*2.81* ¿Cuánto vale $R$ en la Fig. 2.70 para que no se necesite ninguna fuerza $F$ para mantener cerrada la compuerta o para abrirla?

*2.82* Determinar la componente vertical, con su línea de acción, de la fuerza que actúa sobre la compuerta curvada de la Figura 2.71.

*2.83* ¿Cuál es la fuerza sobre la superficie representada por $OA$ en la Figura 2.53? La longitud normal al papel es 3 m.

*2.84* En la Fig. 2.72 se muestra un cilindro circular recto de 2 m de diámetro.

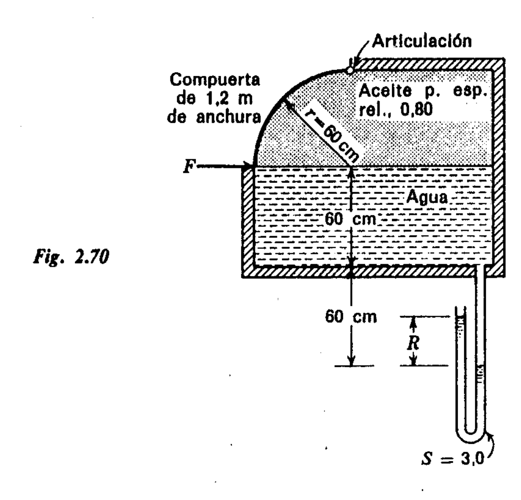



*Fig. 2.70*

La presión debida al flujo, en kilogramos por metro cuadrado, varía sobre el segmento $ABC$ según $p = 2\rho(1 - 4\,\text{sen}^2\,\theta) + 10$. Calcular la fuerza sobre $ABC$.

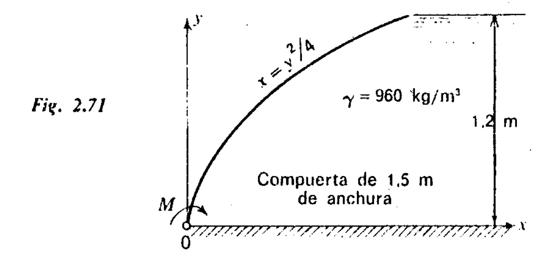



*Fig. 2.71*

***2.85*** Si la variación de presión en el cilindro de la Fig. 2.72 es $p = 2\rho \times [1 - 4(1 + \text{sen}\,\theta)^2] + 10$, determinar la fuerza sobre el cilindro.

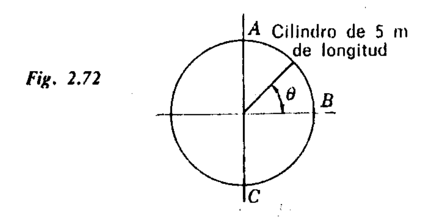



*Fig. 2.72*

***2.86*** Determinar el momento $M$ para mantener en su posición la compuerta de la Fig. 2.71, despreciando su peso.

***2.87*** Hallar la fuerza resultante, incluida su línea de acción, que actúa sobre la superficie externa del primer cuadrante de una cáscara esférica de radio 60 cm con centro en el origen. Su centro está a 90 cm por debajo de la superficie de agua.



***2.88*** El volumen del elipsoide de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $4\pi abc/3$, y el área de la elipse $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ viene dada por $\pi ac$. Determinar la fuerza vertical sobre la superficie dada en el Ejemplo 2.8.

***2.89*** El cilindro mantiene el agua en la forma indicada en la Fig. 2.73. Determinar (*a*) la fuerza por metro que le oprime contra la presa, (*b*) su peso por metro de longitud y (*c*) su peso específico relativo.

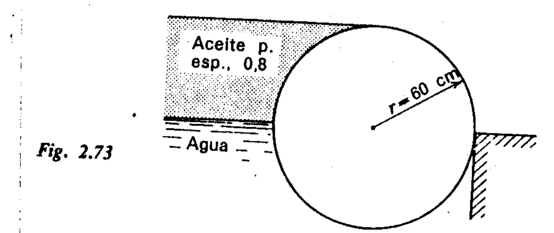



*Fig. 2.73*

***2.90*** El cilindro de la Fig. 2.74 está lleno de un líquido, según se muestra. Determinar (*a*) la componente horizontal de la fuerza sobre $AB$ por metro de longitud, así como su línea de acción, y (*b*) la componente vertical de la fuerza sobre $AB$ por metro de longitud, y su línea de acción.

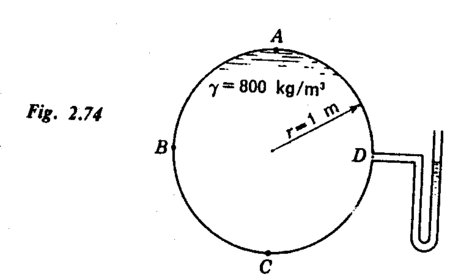



*Fig. 2.74*

***2.91*** La compuerta cilíndrica de la Fig. 2.75 está formada por un cilindro circular y una placa articulada a la presa. La posición de la compuerta se controla bombeando agua al/o desde el interior del cilindro. El centro de gravedad de la compuerta vacía está sobre la línea de simetría y a 1,20 m de la articulación. Está en

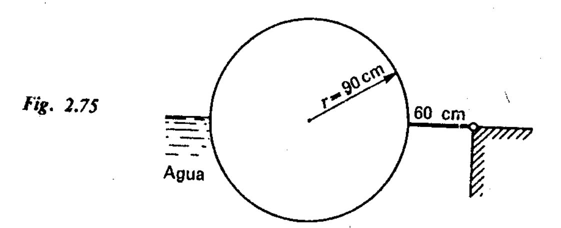



*Fig. 2.75*

equilibrio cuando está vacía en la posición de la figura. ¿Cuántos decímetros cúbicos de agua se deben añadir por metro de cilindro para mantener la compuerta en su posición cuando se eleva en 90 cm la superficie del agua?

*2.92* Un hidrómetro pesa 4 g y tiene una varilla de 6 mm de diámetro. Calcular la distancia que separa las marcas de las densidades relativas 1,0 y 1,1.

*2.93* Diseñar un hidrómetro para pesos específicos relativos en el margen de 0,80 a 1,10 cuando la escala mide 7,5 cm de longitud.

*2.94* Una esfera de 30 cm de diámetro y densidad relativa 1,4 está sumergida en un líquido cuya densidad varía con la profundidad $y$ según la ecuación $\rho = 100 + 1{,}7y$. Determinar la profundidad de equilibrio de la esfera en el líquido.

*2.95* Repetir los cálculos del Prob. 2.94 para un cilindro circular horizontal con peso específico relativo 1,4 y diámetro 30 cm.

*2.96* Un cubo, de 60 cm de arista, tiene su mitad inferior de densidad relativa 1,4 y la mitad superior de 0,6. Está sumergido en la masa de dos fluidos inmiscibles, el inferior de densidad relativa 1,2 y el superior de 0,9. Determinar la altura del cubo que sobresale por encima de la intercara de los líquidos.

*2.97* Determinar la densidad, volumen específico y volumen de un objeto que pesa 3 kg en agua y 4 kg en aceite de peso específico relativo 0,83.

*2.98* Dos cubos iguales, de 1 m³, uno de densidad relativa 0,80 y el otro de 1,1, están unidos mediante un alambre corto y colocados en el agua. ¿Qué porción del cubo más ligero sobresale de la superficie libre del agua y cuál es la tracción a que está sometido el alambre?

*2.99* En la Fig. 2.76 el prisma triangular hueco está en equilibrio cuando $z = 30$ cm e $y = 0$. Hallar el peso del prisma por metro de longitud y $z$ en función de $y$ en el equilibrio. Ambos líquidos son agua. Hallar $y$ para $z = 45$ cm.

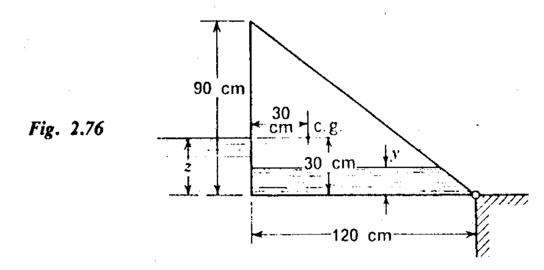


*Fig. 2.76*

*2.100* ¿Cuántos kilogramos de cemento, $\gamma = 2.400$ kg/m³, deben unirse a una viga, que tiene un volumen de 0,1 m³ y una densidad relativa de 0,65, para que el conjunto se hunda en el agua?

*2.101* Dos vigas de 1,80 m por 30 cm por 10 cm, están unidas en sus extremos y flotan como se indica en la Fig. 2.77. Determinar el peso específico relativo de cada viga.

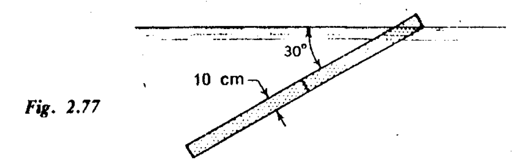


*Fig. 2.77*

*2.102* Un cilindro de madera de 60 cm de diámetro, densidad relativa 0,50, está unido por una de sus bases con otro cilindro de cemento de 60 cm de longitud y del mismo diámetro, siendo su densidad relativa 2,50. Determinar la longitud





del cilindro de madera para que el conjunto flote en equilibrio estable con su eje vertical.

*2.103* ¿Cuáles son las proporciones $r_0/h$ de un cilindro circular recto de peso específico relativo $S$ de madera que flota en agua, con las bases horizontales, en equilibrio estable?

*2.104* Una viga de 3 m de longitud, sección recta cuadrada y densidad relativa 0,75, ¿flotará en el agua en equilibrio estable con dos de sus aristas horizontales?

*2.105* Determinar la altura metacéntrica del toro de la Figura 2.78.

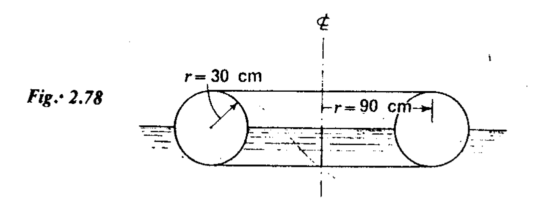


*Fig. 2.78*

*2.106* Determinar si el tubo de pared gruesa de la Fig. 2.79 es estable en la posición que se muestra.

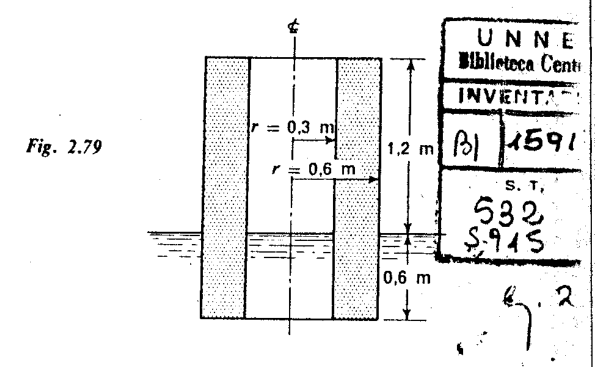


*Fig. 2.79*



*2.107* Un globo esférico de 12 m de diámetro se abre en el fondo y se llena de hidrógeno. Para unas condiciones de 700 mm de mercurio de presión barométrica y 26° C de temperatura, ¿cuál es el peso del globo y la carga necesaria para mantenerlo en reposo?

*2.108* Un depósito que contiene líquido, $S = 0{,}86$, se somete a una aceleración uniforme en dirección horizontal de forma que la presión en la masa del líquido disminuya en 0,2 kg/cm² por metro en la dirección del movimiento. Determinar la aceleración.

*2.109* La superficie libre de un líquido forma un ángulo de 20° con la horizontal cuando se acelera uniformemente en una dirección horizontal. ¿Cuál es la aceleración?

*2.110* En la Fig. 2.80, $a_x = 2{,}45$ m/seg², $a_y = 0$. Determinar la superficie libre imaginaria y las presiones en $B$, $C$, $D$ y $E$.

*2.111* En la Fig. 2.80, $a_x = 0$, $a_y = -4{,}8$ m/seg². Hallar la presión en $B$, $C$, $D$ y $E$.

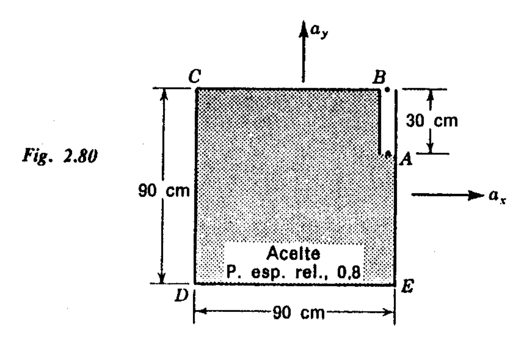



*Fig. 2.80*

***2.112*** En la Fig. 2.80, $a_x = 2{,}45$ m/seg², $a_y = 4{,}90$ m/seg². Determinar la superficie libre imaginaria y las presiones en los puntos *B*, *C*, *D* y *E*.

***2.113*** En la Fig. 2.81, $a_x = 9{,}8$ m/seg², $a_y = 0$. Hallar la presión en *A*, *B* y *C*.

***2.114*** En la Fig. 2.81, $a_x = 4{,}90$ m/seg², $a_y = 4{,}90$ m/seg². Determinar las presiones en *A*, *B* y *C*.

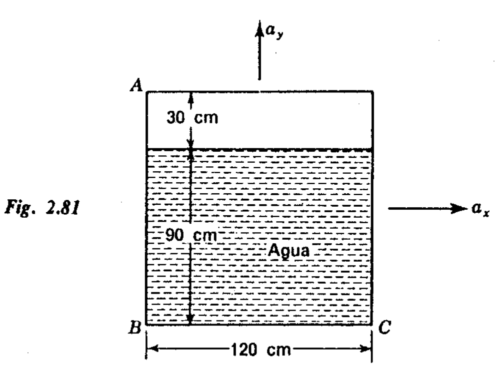



*Fig. 2.81*

***2.115*** Un depósito de sección recta circular de 1,80 m de profundidad y 1,20 m de diámetro se llena con un líquido y se acelera uniformemente en una dirección horizontal. Si se derrama un tercio del líquido, determinar la aceleración.

***2.116*** Deducir una expresión para la variación de presión en un gas a temperatura constante que experimenta una aceleración $a_x$ en la dirección *x*.

***2.117*** El tubo de la Fig. 2.82 está lleno de un líquido de peso específico relativo 2,40. Cuando se acelera hacia la derecha a 2,50 m/seg² dibujar la superficie libre imaginaria y determinar la presión en *A*. Para $p_A = 0{,}50$ kg/cm² determinar $a_x$.

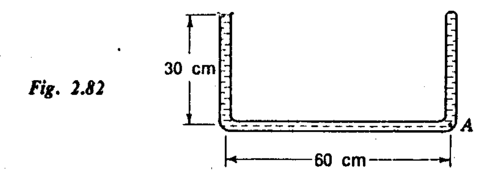
***2.118*** Una caja de forma cúbica, de 1 m de arista, que está abierta por su parte superior y llena hasta la mitad de su altura de agua, está colocada sobre un plano inclinado 30° con relación al plano horizontal. La caja vacía pesa 50 kg y su coeficiente de rozamiento con el plano es 0,30. Determinar la aceleración de la caja y el ángulo que la superficie libre del agua forma con la horizontal.

***2.119*** Demostrar que la presión en un punto es la misma en todas direcciones en un líquido que se mueve como un sólido.

***2.120*** Un recipiente cerrado contiene dos líquidos inmiscibles. Cuando se



*Fig. 2.82*




acelera uniformemente en la dirección *x*, demostrar que la superficie de separación y la superficie de presión cero son paralelas.

***2.121*** Comprobar el enunciado hecho en la Sec. 2.9 sobre rotación uniforme alrededor de un eje vertical de que cuando un fluido gira del mismo modo que un cuerpo sólido, no existen esfuerzos cortantes en el fluido.

***2.122*** Un recipiente cilíndrico contiene un líquido de densidad relativa 1,2 y gira alrededor de un eje vertical. La presión en un punto que dista radialmente 60 cm del eje es la misma que en otro punto distante radialmente 120 cm del eje y situado 60 cm por encima del primero. Calcular la velocidad de rotación.

***2.123*** El tubo en U de la Fig. 2.82 gira respecto a un eje vertical a 1,80 m a la derecha de *A* a una velocidad tal que la presión manométrica de *A* sea cero. ¿Cuál es la velocidad de rotación?

***2.124*** Calcular la situación del eje vertical de giro y la velocidad de rotación del tubo en U de la Fig. 2.82 para que sean nulas las presiones del líquido en el punto medio del tubo en U y en el punto *A*.

***2.125*** Un fluido incompresible de densidad $\rho$ se mueve como un sólido que gira a velocidad $\omega$ alrededor de un eje inclinado $\theta$° con la vertical. Conociendo la presión en un punto del fluido, ¿cómo se puede hallar la presión en otro punto?

***2.126*** Un depósito cilíndrico de sección circular de radio $r_0$ y altura $h_0$ está lleno de líquido. ¿A qué velocidad debe girar para que quede al descubierto la mitad del área de la superficie de su fondo?

***2.127*** Un líquido está girando alrededor de un eje *horizontal* como un sólido y en el eje existe una presión manométrica de 10 kg/cm². Determinar la distribución de presiones a lo largo de una línea vertical que pasa por el eje, suponiendo que la densidad del líquido es $\rho$ y la velocidad de giro $\omega$.

***2.128*** Determinar la ecuación de la superficie de presión constante, para las condiciones en el Problema 2.127.

***2.129*** Probar por integración que un paraboloide de revolución tiene un volumen igual a la mitad de su cilindro circunscrito.

***2.130*** Un depósito que contiene dos líquidos inmiscibles gira alrededor de un eje vertical. Probar que la superficie de separación tiene la misma forma que la superficie de presión cero.

***2.131*** Una esfera hueca de radio $r_0$ se llena de un líquido y gira alrededor de su eje vertical con velocidad $\omega$. Situar la línea circular de presión máxima.

***2.132*** Un gas que sigue la ley $p\rho^{-n}$ = const gira respecto a un eje vertical como un sólido. Deducir una expresión de la presión en dirección radial para la velocidad $\omega$, presión $p_0$ y densidad $\rho_0$ en un punto del eje.

***2.133*** Una vasija que contiene agua gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular de 50 rad/seg. Al mismo tiempo el recipiente tiene una aceleración hacia abajo de 4,9 m/seg². ¿Cuál es la ecuación de una superficie de presión constante?

***2.134*** El tubo en U de la Fig. 2.82 está girando alrededor de un eje vertical que pasa por el punto *A* a una velocidad tal que empieza a vaporizarse el agua en el

extremo cerrado situado encima de $A$, siendo su temperatura 21° C. ¿Cuál es la velocidad angular? ¿Qué sucederá al aumentar la velocidad angular?

***2.135*** Un recipiente cúbico de 1,20 m de arista se abre por la cara superior y se llena de agua. Cuando se acelera hacia arriba con 2,45 m/seg$^2$, hallar el módulo de la fuerza ejercida por el agua sobre una cara lateral del recipiente.

***2.136*** Una caja cúbica de 30 cm de arista está llena con un líquido de densidad relativa 0,65 y sufre una aceleración hacia abajo de 2,45 m/seg$^2$. Calcular la fuerza resultante sobre una cara del cubo debida a la presión del líquido.

***2.137*** Hallar la fuerza sobre el lado $OB$ de la Fig. 2.38 para el caso descrito en el Ejemplo 2.16.

***2.138*** Un recipiente cilíndrico de 60 cm de diámetro y 180 cm de longitud sufre una aceleración uniforme a lo largo de su eje en dirección horizontal de 4,90 m/seg$^2$. El recipiente está lleno de un líquido, $\gamma$ = 800 kg/m$^3$, existiendo una presión de 0,7 kg/cm$^2$ a lo largo de su eje antes de iniciarse la aceleración. Determinar la fuerza neta ejercida contra el líquido en el cilindro.

***2.139*** Un cubo cerrado de 30 cm de arista tiene un pequeño agujero en el centro de su cara superior. Cuando se llena de agua y se gira uniformemente respecto a un eje vertical que pasa por su centro y velocidad $\omega$ rad/seg, hallar la fuerza en una cara lateral debida al agua en función de $\omega$.

***2.140*** La tensión normal es la misma en todas direcciones en un punto de un fluido

(*a*) *solo* cuando en el fluido no hay rozamientos;
(*b*) *solo* cuando en el fluido no hay rozamientos y es incompresible;
(*c*) *solo* cuando el fluido tiene viscosidad nula y está en reposo;
(*d*) cuando no hay movimiento de una capa del fluido en relación con la capa adyacente;
(*e*) con independencia del movimiento de una capa del fluido en relación con la capa adyacente.

***2.141*** La presión en el aire por encima de un aceite ($S$ = 0,75) dentro de un depósito es de 0,2 kg/cm$^2$. La presión 0,8 m por debajo de la superficie de aceite, en metros de agua, es:

(*a*) 0,6 (*b*) 2,6 (*c*) 0,8 (*d*) 0,82 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.142*** La presión, en mm de columna de mercurio, equivalente a 200 mm de columna de agua más 150 mm de fluido manométrico de peso específico relativo 2,94, es

(*a*) 25,8 (*b*) 47,2 (*c*) 50,3 (*d*) 75,8 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.143*** La ecuación diferencial de la variación de presión en un fluido estático se puede escribir (midiendo $y$ verticalmente hacia arriba)

(*a*) $dp = -\gamma\, dy$ (*b*) $d\rho = -\gamma\, dy$ (*c*) $dy = -\rho\, dp$
(*d*) $dp = -\rho\, dy$ (*e*) $dp = -y\, d\rho$

***2.144*** En una atmósfera isotérmica la presión

(*a*) permanece constante;
(*b*) disminuye linealmente con la altura;
(*c*) aumenta exponencialmente con la altura;
(*d*) varía del mismo modo que la densidad;
(*e*) y la densidad permanece constante.



***2.145*** Elegir la frase correcta:

(*a*) La presión atmosférica local es siempre más baja que la presión atmosférica normal.
(*b*) La presión atmosférica local depende únicamente de la altura de la localidad sobre el nivel del mar.
(*c*) La presión atmosférica normal es la media de las presiones atmosféricas locales al nivel del mar.
(*d*) Un barómetro mide la diferencia entre las presiones atmosféricas local y normal.
(*e*) La presión atmosférica normal es de 864 mm de mercurio (abs).

***2.146*** Elegir las tres presiones que son equivalentes (para el mercurio, $S$ = 13,6):

(*a*) 5 kg/cm$^2$, 50 m de agua, 38 mm de mercurio;
(*b*) 5 kg/cm$^2$, 5 m de agua, 368 mm de mercurio;
(*c*) 5 kg/cm$^2$, 51,65 m de agua, 380 mm de mercurio;
(*d*) 0,6 kg/cm$^2$, 0,6 m de agua, 441 mm de mercurio;
(*e*) 0,6 kg/cm$^2$, 6 m de agua, 441 mm de mercurio.

***2.147*** 0,2 kg/cm$^2$ de succión, con una lectura barométrica de 750 mm de mercurio, es lo mismo que:

(*a*) 14,7 mm de mercurio (abs); (*b*) 147 mm de mercurio;
(*c*) 0,2 m de agua de vacío; (*d*) 897 mm de mercurio (abs);
(*e*) 12,2 m de agua absolutos.

***2.148*** Con la lectura barométrica de 740 mm de mercurio, 0,5 kg/cm$^2$ es equivalente a:

(*a*) 0,483 atmósferas; (*b*) 0,5 atmósferas;
(*c*) 0,533 kg/cm$^2$ de succión; (*d*) 0,6 kg/cm$^2$;
(*e*) 372 mm de mercurio (abs).

***2.149*** En la Fig. 2.8*b*, el líquido es aceite, de $S$ = 0,80. Cuando $h$ = 1 m, la presión en $A$ puede expresarse como:

(*a*) −0,8 m de agua (abs); (*b*) 0,8 m de agua;
(*c*) 0,8 m de agua de succión; (*d*) 1,25 m de agua de vacío;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***2.150*** En la Fig. 2.8*c* hay aire en la tubería y el líquido manométrico es agua, siendo $h_1$ = 50 cm y $h_2$ = 25 cm. La presión en $A$ vale:

(*a*) 50 cm de agua (abs); (*b*) 50 cm de vacío de agua;
(*c*) 25 cm de agua; (*d*) 0,05 kg/cm$^2$;
(*e*) 0,025 kg/cm$^2$.

***2.151*** En la Fig. 2.9*a*, $h_1$ = 50 cm, $h_2$ = 20 cm, $h_3$ = 100 cm, $S_1$ = 0,80, $S_2$ = 0,65, $S_3$ = 1,0. Entonces $h_B - h_A$ en metros de agua vale:

(*a*) +1,53 (*b*) −0,47 (*c*) −1,53 (*d*) +0,47 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.152*** En la Fig. 2.9*b*, $h_1 = 1{,}5$ m, $h_2 = 1{,}0$ m, $h_3 = 2$ m, $S_1 = 1{,}0$, $S_2 = 3{,}0$, $S_3 = 1{,}0$. Entonces $p_A - p_B$ en kg/cm² vale:

(*a*) 0,65 (*b*) 0,35 (*c*) 6,5 (*d*) 3.500 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.153*** Un manómetro de mercurio-agua da una lectura de 50 cm (diferencia de elevación de los meniscos). La diferencia de presiones medida en metros es:

(*a*) 0,50 (*b*) 6,30 (*c*) 6,55 (*d*) 6,80 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.154*** En el manómetro inclinado de la Fig. 2.12 el depósito es tan grande que puede suponerse que su nivel permanece estacionario. $\theta = 30°$. Si se usa como un manómetro simple para medir la presión del aire y contiene agua siendo $R = 40$ cm, la presión en $A$ en cm de agua vale:

(*a*) 20 (*b*) 20 de vacío (*c*) 40 (*d*) 40 de vacío (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.155*** Una caja cúbica de 2 m de arista está llena hasta la mitad de agua, estando la otra mitad llena de aceite de $S = 0{,}75$. Cuando se acelera verticalmente hacia arriba con aceleración 4,9 m/seg², la diferencia de presiones entre el fondo y la tapa vale en kg/cm²:

(*a*) 0,12 (*b*) 0,26 (*c*) 1,20 (*d*) 2,625 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.156*** Cuando la caja del Prob. 2.155 se acelera uniformemente en dirección horizontal paralelamente a una arista con aceleración de 4,9 m/seg², la pendiente de la superficie de separación es:

(*a*) 0 (*b*) $-\frac{1}{4}$ (*c*) $-\frac{1}{2}$ (*d*) $-1$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.157*** Cuando la mínima presión en la caja del Prob. 2.156 es la atmosférica, la máxima presión en metros de agua es:

(*a*) 0,75 (*b*) 1,0 (*c*) 2,625 (*d*) 1,875 (*e*) 2,75

X ***2.158*** El módulo de la fuerza debida a la presión sobre la cara de una superficie circular de área unidad, con centroide 10 m por debajo de la superficie libre del agua, es:

(*a*) menor que $10\gamma$;
(*b*) dependiente de la orientación del área;
(*c*) mayor que $10\gamma$;
(*d*) el producto de $\gamma$ por la distancia vertical desde la superficie libre hasta el centro de presión;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***2.159*** Una superficie rectangular de 3 × 4 m tiene el lado más bajo de 3 m horizontal y 6 m por debajo de la superficie libre de un aceite de $S = 0{,}80$. La superficie está inclinada 30° con la horizontal. La fuerza debida a la presión sobre una cara de la superficie vale (siendo $\gamma$ el peso específico del agua):

(*a*) $38{,}4\gamma$ (*b*) $48\gamma$ (*c*) $51{,}2\gamma$ (*d*) $60\gamma$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores



***2.160*** El centro de presiones de la superficie del Prob. 2.159 está verticalmente por debajo de la superficie del líquido:

(*a*) 10,133 m (*b*) 5,133 m (*c*) 5,067 m (*d*) 5,00 m
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.161*** El centro de presiones:

(*a*) es el centroide del área sumergida;
(*b*) es el centroide del prisma de presiones;
(*c*) es independiente de la orientación del área;
(*d*) es un punto sobre la línea de acción de la fuerza resultante;
(*e*) está siempre por encima del centroide del área.

***2.162*** ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el anillo vertical limitado por las circunferencias concéntricas de radio 1 y 2 m? El centro está 3 m por debajo de la superficie del agua. $\gamma$ = peso específico del agua.

(*a*) $3\pi\gamma$ (*b*) $9\pi\gamma$ (*c*) $10{,}25\pi\gamma$ (*d*) $12\pi\gamma$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.163*** El centro de presiones del anillo del Prob. 2.162 está por debajo del centroide del área:

(*a*) 0 m (*b*) 0,42 m (*c*) 0,44 m (*d*) 0,47 m (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.164*** Un área vertical triangular tiene un lado en la superficie libre y el vértice hacia abajo. Su altura es $h$. El centro de presiones está por debajo de la superficie libre:

(*a*) $h/4$ (*b*) $h/3$ (*c*) $h/2$ (*d*) $2h/3$ (*e*) $3h/4$

***2.165*** Una compuerta vertical de 4 × 4 m mantiene el agua con la superficie libre en su borde. El momento alrededor del fondo de la compuerta vale:

(*a*) $42{,}7\gamma$ (*b*) $57\gamma$ (*c*) $64\gamma$ (*d*) $85{,}3\gamma$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.166*** El módulo de la resultante de las fuerzas que actúan a ambos lados de la compuerta de la Fig. 2.83 es:

(*a*) $20{,}736\gamma$ (*b*) $6{,}912 \times 10^4$ (*c*) $20{,}736\gamma - 6{,}912 \times 10^4$
(*d*) $20{,}736 + 6{,}912 \times 10^4$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

Bar. 700 mm Hg
1,2 m
Agua
2,4 m
Aire
0,8 kg/cm² (abs)
Ancho de la compuerta, 3,6 m

*Fig. 2.83*

***2.167*** La línea de acción de la resultante de las fuerzas que actúan a ambos lados de la compuerta de la Fig. 2.83 está por encima del fondo de la compuerta:

(*a*) 2,67 m (*b*) 1,28 m (*c*) 1,20 m (*d*) 1,00 m
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.168*** La componente horizontal de la fuerza debida a la presión sobre una superficie curva sumergida es igual a:

(*a*) el peso del líquido verticalmente por encima de la superficie curva;
(*b*) el peso del líquido retenido por la superficie curva;
(*c*) el producto de la presión en el centroide por el área;
(*d*) la fuerza sobre la proyección vertical de la superficie curva;
(*e*) la suma escalar de todas las componentes horizontales elementales.

***2.169*** Una tubería de 4 m de diámetro se utiliza para transportar agua a 10 kg/cm². Para una tensión permitida de 500 kg/cm² el espesor de la tubería es:

(*a*) 8 cm (*b*) 1,6 cm (*c*) 4 cm (*d*) 12 cm
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.170*** La componente vertical de la fuerza debida a la presión sobre una superficie curva sumergida es igual a:

(*a*) su componente horizontal;
(*b*) la fuerza sobre la proyección vertical de la superficie curva;
(*c*) el producto de la presión en el centroide por el área de la superficie;
(*d*) el peso del líquido verticalmente por encima de la superficie curva;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***2.171*** La componente vertical de la fuerza sobre un cuadrante del cilindro $AB$ de la Fig. 2.84 es:

(*a*) $224\gamma$ (*b*) $96{,}5\gamma$ (*c*) $81\gamma$ (*d*) $42{,}5\gamma$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

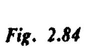
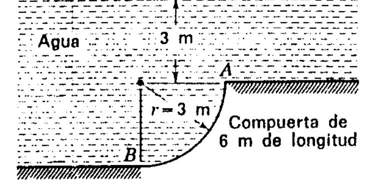



***Fig. 2.84***

***2.172*** La componente vertical de la fuerza sobre la mitad superior de un cilindro recto circular y horizontal, de 3 m de diámetro y 10 m de longitud, lleno con agua y con una presión de 500 kg/m² en el eje, vale:

(*a*) −750 kg (*b*) −375 kg (*c*) 329,8 kg (*d*) 1.500 kg
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.173*** Un barril cilíndrico de duelas de madera mantiene éstas unidas por un aro en la tapa y otro en el fondo. Cuando se llena el barril con líquido, la relación



de la tracción en el aro de la tapa a la tracción en el aro del fondo, debida al líquido, vale:

(*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) 1 (*c*) 2 (*d*) 3 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.174*** Una tubería de 25 mm de diámetro interior y 4 mm de espesor de pared transporta agua a 20 kg/cm². La tensión de tracción en las paredes de la tubería, en kg/mm², vale:

(*a*) 125 (*b*) 2.500 (*c*) 50 (*d*) 25 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.175*** Una tabla de madera de 1,2 × 1,2 × 0,25 m ($S$ = 0,50), flota en el agua con una carga encima de 300 kg. El volumen de tabla sumergido, en m³, vale:

(*a*) 0,32 (*b*) 0,18 (*c*) 0,30 (*d*) 0,48 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.176*** La línea de acción de la fuerza de flotación pasa por

(*a*) el centro de gravedad de cualquier cuerpo sumergido;
(*b*) el centroide del volumen de cualquier cuerpo flotante;
(*c*) el centroide del volumen de fluido desplazado;
(*d*) el centroide del volumen del fluido verticalmente por encima del cuerpo;
(*e*) el centroide de la proyección horizontal del cuerpo.

***2.177*** La fuerza de empuje es:

(*a*) la fuerza resultante sobre un cuerpo debida al fluido que le rodea;
(*b*) la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo que flota;
(*c*) la fuerza necesaria para mantener en equilibrio un cuerpo sumergido;
(*d*) una fuerza no vertical para cuerpos no simétricos;
(*e*) igual al volumen del líquido desalojado.

***2.178*** Un cuerpo flota en equilibrio estable

(*a*) cuando su altura metacéntrica es cero;
(*b*) *solo* cuando su centro de gravedad está debajo de su centro de empuje
(*c*) cuando $\overline{GB} - I/V$ es positivo y $G$ está por encima de $B$;
(*d*) cuando $I/V$ es positivo;
(*e*) cuando el metacentro está por encima del centro de gravedad.

***2.179*** Una caja cúbica de metal cerrada de arista 91,5 cm está hecha con chapa uniforme y pesa 545 kg. Cuando se coloca en aceite con las aristas verticales (de peso específico 0,9) su altura metacéntrica es:

(*a*) 0 cm (*b*) −2,44 cm (*c*) 18,9 cm (*d*) 23,8 cm
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores

***2.180*** Un cilindro de 10 m de largo lleno de un líquido de peso específico $\gamma$ se acelera horizontalmente $20g$ m/seg² a lo largo del eje del cilindro. La diferencia de presiones en los extremos del cilindro en kg/m² vale:

(*a*) $20\gamma$ (*b*) $200\gamma$ (*c*) $20g\gamma$ (*d*) $200\gamma/g$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

**2.181** Cuando un líquido gira a velocidad angular constante alrededor de un eje vertical como un cuerpo rígido, la presión

(*a*) disminuye con el cuadrado de la distancia radial;
(*b*) aumenta linealmente con la distancia radial;
(*c*) disminuye con el cuadrado del aumento de altura a lo largo de una línea vertical;
(*d*) varía inversamente con la altura a lo largo de una línea vertical;
(*e*) varía con el cuadrado de la distancia radial.

**2.182** Cuando un líquido gira alrededor de un eje vertical como un cuerpo rígido de tal manera que un punto cualquiera $A$ del eje está a la misma presión que un punto 25 cm más alto que $A$ y a 25 cm del eje, la velocidad angular en radianes por segundo es:

(*a*) 8,86 (*b*) 4,43 (*c*) 19,6 (*d*) no se puede determinar con los datos dados (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

**2.183** Un cilindro recto circular está lleno de un líquido de $S = 1{,}2$ y con la tapa abierta, y gira alrededor de su eje vertical con tal velocidad que la mitad del líquido se derrama. La presión en el centro del fondo es:

(*a*) cero;
(*b*) una cuarta parte del valor que tenía cuando el cilindro estaba lleno;
(*c*) indeterminada; datos insuficientes;
(*d*) mayor que en el caso similar cuando el líquido fuese agua;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**2.184** Un vórtice forzado

(*a*) gira en sentido opuesto a un vórtice libre;
(*b*) siempre se presenta en conjunción con un vórtice libre;
(*c*) decrece su velocidad con el radio;
(*d*) se presenta cuando el fluido gira como un sólido;
(*e*) decrece su velocidad con la inversa del radio.

# 3

# *Conceptos y ecuaciones fundamentales del movimiento de los fluidos*

La Estática de los fluidos estudiada en el capítulo anterior es casi una ciencia exacta. El peso específico (o la densidad) es la única magnitud que debe determinarse experimentalmente. En cambio, la naturaleza del *movimiento* de un fluido real es muy compleja. Las leyes fundamentales del movimiento de un fluido no son completamente conocidas, por lo que se necesita recurrir a la experimentación. Combinando el análisis basado en los principios de la mecánica y de la termodinámica con la experimentación ordenada, ha sido posible construir eficientes máquinas y grandes estructuras hidráulicas.

Este capítulo introduce los conceptos necesarios para el análisis del movimiento de los fluidos. Las ecuaciones básicas que nos permiten predecir el comportamiento del fluido se establecen o se deducen. Estas son las ecuaciones del movimiento, de la continuidad, de la cantidad de movimiento y el primero y segundo principios de la termodinámica aplicados al movimiento permanente de un gas perfecto. En primer lugar se presentan los conceptos de reversibilidad, irreversibilidad y pérdidas. En este capítulo se utiliza el concepto de volumen de control para la deducción de las ecuaciones de continuidad, energía y cantidad de movimiento. En el Cap. 5 se presentan los efectos debidos a la viscosidad, la determinación experimental de las pérdidas y la presentación adimensional de los resultados experimentales sobre pérdidas, después de haber introducido en el Cap. 4 el análisis dimensional. En general, en este capítulo se desarrolla la teoría del movimiento unidimensional, limitando las aplicaciones al caso de flujos incompresibles donde no predominan los efectos viscosos. El Cap. 6 trata del movimiento compresible y el Cap. 7 del movimiento bi y tridimensional.

### 3.1 Conceptos de sistema y de volumen de control

En el Cap. 2 se utilizó el diagrama de cuerpo libre como una forma conveniente de representar las fuerzas que actúan sobre una masa fija arbitraria. Este es un caso especial de *sistema*. Un sistema se refiere a una masa determinada de material y se diferencia del resto, que se llama *medio ambiente*. Los contornos de un sistema forman una superficie cerrada, y esta superficie puede variar con el tiempo, de manera que contenga la misma masa durante los cambios en su condición; es decir, una UTM de gas se puede meter en un cilindro y se puede comprimir moviendo el pistón; el contorno del sistema coincide con el extremo del pistón, luego se mueve con el pistón. El sistema puede contener una masa infinitesimal o una masa finita grande de fluidos y sólidos a voluntad del investigador.

El principio de la conservación de la masa establece que la masa del interior de un sistema permanece constante con el tiempo (no considerando los efectos de la relatividad). En forma de ecuación $dm/dt = 0$, siendo $m$ la masa total.

Normalmente se expresa el segundo principio de Newton del movimiento para un sistema de la forma

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad (3.1.1)$$

donde se debe recordar que $m$ es la masa constante del sistema. $\Sigma\mathbf{F}$ es la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, incluyendo las fuerzas másicas tales como la gravedad, y $\mathbf{v}$ es la velocidad del centro de gravedad del sistema.

*Un volumen de control* es una región fija del espacio y es útil en el análisis de situaciones donde el movimiento se presenta dentro y fuera del espacio fijo. El contorno del volumen de control es su *superficie de control*. El tamaño y la forma del volumen de control son totalmente arbitrarios, pero con frecuencia se hace coincidir en parte con contornos sólidos, y en otras partes se dibuja normal a las direcciones del movimiento con objeto de simplificación. Superponiendo una velocidad uniforme sobre un sistema y el medio ambiente se puede hallar una situación conveniente para aplicar el volumen de control; por ejemplo, en la determinación de la velocidad de propagación de la onda sonora a través de un medio. El concepto del volumen de control se emplea en la deducción de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, así como en la solución de muchos tipos de problemas. También se designa el volumen de control con el nombre de *sistema abierto*.



### 3.2 Reversibilidad, irreversibilidad y pérdidas

Se puede definir un *proceso* como el conjunto de estados por los que pasa el sistema, tales como los cambios de velocidad, cota, presión, densidad, temperatura, etc. La expansión del aire en un cilindro cuando el pistón se mueve hacia fuera y el calor es transferido a través de las paredes es un ejemplo de un proceso. Normalmente, el proceso ocasiona algún cambio en el medio ambiente, tal como desplazándole o transfiriéndole calor a través del contorno. Cuando se puede hacer que un proceso suceda de tal manera que tenga lugar *reversiblemente*, es decir, que se pueda hacer que vuelva a su estado original sin ningún cambio final ni en el sistema ni en el medio ambiente, se dice que es *reversible*. En cualquier movimiento real de un fluido real o en cualquier cambio en un sistema mecánico, los efectos de la viscosidad, el rozamiento de Coulomb, la expansión libre, la histéresis, etc., impiden que el proceso sea reversible. Sin embargo, es un ideal tratar de conseguirlos al diseñar los procesos, y su rendimiento se define normalmente en función de su proximidad a la reversibilidad.

Cuando un proceso determinado tiene un solo efecto sobre su medio ambiente equivalente al levantamiento de un peso, se dice que ha realizado un *trabajo* contra el medio. Cualquier proceso real es *irreversible*. La diferencia entre la cantidad de trabajo que puede efectuar una sustancia al pasar de un estado a otro a lo largo de un camino de una manera reversible y al trabajo real que se produce en el mismo camino es la *irreversibilidad* del proceso. Se puede definir en función del trabajo por unidad de masa o peso, o de trabajo por unidad de tiempo. Bajo determinadas condiciones se denomina a la irreversibilidad de un proceso su *trabajo perdido*†, es decir, la pérdida de capacidad para realizar trabajo debido al rozamiento y otras causas. En esta obra, cuando se hable de *pérdidas*, se quiere decir irreversibilidad o trabajo perdido y no una pérdida real de energía.

***Ejemplo 3.1*** Una planta hidroeléctrica de potencia tiene una diferencia entre la altura de la superficie del agua y el fondo de 30 m y un flujo de 2,7 $m^3$/seg de agua a través de las turbinas que giran a 180 r.p.m. El par medido en el árbol de la turbina es de 3.970 mkg, y la potencia del generador es de 945 CV. Determinar la irreversibilidad, o las pérdidas, y el trabajo reversible del sistema. $g = 9{,}80$ m/seg$^2$.

La energía potencial del agua es 30 kgm/$kg_m$. Por consiguiente, por conversión perfecta el trabajo reversible es 30 kgm/$kg_m$ o también $30 \times 2{,}7 \times 10^3 = 8{,}1 \times 10^4$ kgm/seg. El trabajo efectuado por el agua sobre el árbol es

$$T\omega = 3.970 \times \tfrac{180}{60} 2\pi = 7{,}5 \times 10^4 \text{ kgm/seg}$$

† Las definiciones de reversibilidad, irreversibilidad y trabajo perdido recién dadas no son completas; para un estudio completo de estos conceptos consúltese un texto de termodinámica.

La irreversibilidad a través de la turbina es entonces

$(8,1 - 7,5) \times 10^4 = 0,6 \times 10^4$ kgm/seg

o

$$\frac{6 \times 10^3}{2,7 \times 10^3} = 2,22 \text{ kgm/kg}_m$$

La irreversibilidad en el generador es

$7,5 \times 10^4 - 945 \times 75 = 4.125$ kgm/seg

o

$$\frac{4.125}{2,7 \times 10^3} = 1,53 \text{ kgm/kg}_m$$

El rendimiento de la turbina $\eta_t$ es

$$\eta_t = 100 \times \frac{30 - 2,22}{30} = 92,6 \text{ por } 100$$

El rendimiento del generador $\eta_g$ es

$$\eta_g = 100 \times \frac{27,78 - 1,53}{27,78} = 94,6 \text{ por } 100$$

### 3.3 Tipos de flujo

Al movimiento de un fluido se le llama *flujo*. El flujo de un fluido puede clasificarse de muchas maneras, tales como turbulento, laminar; real, ideal; reversible, irreversible; permanente, no permanente; uniforme y no uniforme. En este número y en el siguiente se definen los diversos tipos de flujo.

El flujo *turbulento* es el más frecuente en las aplicaciones prácticas de la ingeniería. En esta clase de flujo las partículas del fluido (pequeñas masas moleculares) se mueven siguiendo trayectorias muy irregulares, originando un intercambio de cantidad de movimiento de una porción del fluido a otra, de manera algo semejante al intercambio de cantidades de movimientos moleculares descrito en la Sec. 1.3, pero a una escala mucho mayor. Las partículas fluidas implicadas en el intercambio de cantidades de movimiento pueden tener desde un tamaño muy pequeño (unos pocos de miles de moléculas) hasta muy grande (miles de metros cúbicos en un gran remolino de un río o en una borrasca atmosférica). En los casos en que el flujo puede ser unas veces turbulento y otras laminar, el turbulento origina una mayor tensión de cortadura en el fluido



y produce más irreversibilidades o pérdidas. Así en el flujo turbulento, la pérdida de energía mecánica varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad, mientras en el laminar lo hace con la primera potencia.

En el flujo *laminar* las partículas del fluido se mueven a lo largo de trayectorias lisas en capas o láminas, deslizándose una capa sobre la adyacente. En el flujo laminar se cumple la ley de Newton de la viscosidad [Ec. (1.1.1) o su generalización al caso de movimiento tridimensional], que relaciona la tensión de cortadura con la velocidad angular de deformación. En el flujo laminar la acción de la viscosidad frena la tendencia a la turbulencia (ver la Sec. 5.3 para los criterios de flujo laminar) El flujo laminar no es estable cuando es pequeña la viscosidad, o grande la velocidad o el caudal y se rompe transformándose en turbulento. Una ecuación similar a la de Newton puede usarse para el flujo turbulento:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \tag{3.3.1}$$

El factor $\eta$ no es ahora solamente una propiedad del fluido, sino que depende, además de la densidad y del movimiento del fluido. Se llama viscosidad de remolino.

En muchos casos prácticos de flujo la tensión de cortadura es función de la viscosidad y de la turbulencia y resulta:

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{du}{dy} \tag{3.3.2}$$

Para el estudio de este tipo de flujo se necesita recurrir a la experimentación.

Un *fluido ideal* es el que carece de rozamiento y es incompresible, y no debe confundirse con un gas perfecto (Sec. 1.6). En los casos en que intervienen grandes extensiones de fluido, como en el movimiento de un submarino bajo el océano o de un avión en la atmósfera, es útil la hipótesis simplificativa de un fluido ideal. Un fluido sin rozamiento es el que se supone tiene viscosidad nula y sus procesos de flujo son reversibles.

La capa de fluido en la inmediata vecindad de un contorno de flujo real, en que se ve afectada la velocidad relativa respecto al contorno por la cortadura viscosa, se llama *capa límite*. Las capas límites pueden ser laminares o turbulentas, dependiendo generalmente de su longitud, la viscosidad, la velocidad de flujo próximo a ellas y la rugosidad del contorno.

Cuando el flujo es tal que no entra ni sale calor a través de los límites del fluido, el flujo es *adiabático*. El flujo *adiabático reversible* (adiabático sin rozamiento) se llama flujo *isoentrópico*.

Cualquiera que sea la naturaleza del flujo, todas las situaciones de flujo están sometidas a los principios fundamentales siguientes, que se pueden expresar en forma analítica:

1. Los principios de Newton del movimiento se deben cumplir para toda partícula y en cualquier instante.

2. La ecuación de continuidad, es decir, la ley de conservación de la masa.

3. El primero y segundo principios de la termodinámica.

4. Las condiciones de contorno, enunciados analíticos que dicen que un fluido real tiene velocidad cero respecto a un contorno en un contorno o que los fluidos ideales no pueden penetrar un contorno.

Pueden intervenir otras relaciones y ecuaciones, tales como una ecuación de estado o la ecuación de Newton de la viscosidad.

## *3.4 Definiciones*

Para proceder de una manera ordenada en el análisis del flujo se requiere una clara comprensión de la terminología usada. Varios de los términos técnicos más importantes se definen e ilustran en esta sección.

Se dice que el flujo es *permanente* cuando las propiedades del fluido y las condiciones del movimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo. Por ejemplo, si la velocidad en un cierto punto es de 3 m/seg en la dirección $+x$, si el flujo es permanente, permanece exactamente con este módulo y con esta dirección indefinidamente. Esto puede expresarse analíticamente por $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$, en la que las coordenadas espaciales (coordenadas del punto $x$, $y$, $z$) se mantienen constantes. De la misma manera, en el flujo permanente no hay cambios ni en la densidad $\rho$, ni en la presión $p$, ni en la temperatura $T$, con el tiempo en cualquier punto; así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

En el flujo turbulento, debido al movimiento al azar de las partículas fluidas, siempre se presentan pequeñas fluctuaciones en un punto. La definición de flujo permanente debe ser generalizada teniendo en cuenta estas fluctuaciones. Para poner esto en evidencia se ha representado en la Fig. 3.1 un gráfico de la velocidad en un punto en función del tiempo. Se dice que el flujo es permanente cuando la velocidad media temporal

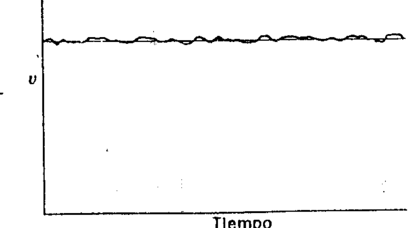



*Fig. 3.1 Velocidad en un punto en flujo turbulento permanente.*



$$v_t = \frac{1}{t}\int_0^t v\, dt$$

representada en la figura por una línea recta horizontal, no cambia con el tiempo. La misma generalización se aplica a la densidad, presión, temperatura, etc., cuando se sustituyen éstas por $v$ en la fórmula anterior.

El flujo es *no permanente* cuando las condiciones en cualquier punto cambian con el tiempo $\partial \mathbf{v}/\partial t \neq 0$. Cuando se bombea agua por una tubería a caudal constante se tiene un ejemplo de flujo permanente. Si el agua se bombea a través de una tubería y el caudal fuese creciente con el tiempo, el flujo sería no permanente.

Se dice que el flujo es *uniforme* cuando en cualquier punto del fluido el vector velocidad es idéntico, es decir, con igual módulo, dirección y sentido en un instante dado, esto se expresa por $\partial \mathbf{v}/\partial s = 0$, cuando el tiempo se mantiene constante, siendo $\delta s$ un desplazamiento en una dirección cualquiera. La ecuación establece que no hay variación en el vector velocidad en cualquier dirección a través del fluido en un instante dado, pero nada se dice del cambio de velocidad en un punto con el tiempo que puede ser nulo o no.

En el flujo de un fluido real en un conducto abierto o cerrado, la definición anterior puede aplicarse con pequeño error en muchos casos aun cuando el vector velocidad en el contorno es siempre cero. Cuando todas las secciones rectas paralelas del conducto son idénticas (por ejemplo, cuando el conducto es prismático) y la velocidad media en cada sección recta es la misma en un instante dado, el flujo se dice que es *uniforme*.

Se dice que el flujo es *no uniforme* cuando el vector velocidad varía en un instante dado de un punto a otro ($\partial \mathbf{v}/\partial s \neq 0$). Un líquido que se bombea a través de una tubería recta de sección uniforme es un ejemplo de flujo uniforme. Un líquido que fluye a través de una tubería de sección variable o de una tubería curvada es un ejemplo de flujo no uniforme.

Ejemplos de flujo permanente y no permanente, y uniforme y no uniforme son: un líquido que fluye a través de una larga tubería recta de sección constante y a caudal constante es un flujo *permanente y uniforme*; un líquido que fluye por una larga tubería recta de sección constante y a caudal creciente es un flujo *no permanente y uniforme*; el flujo por un tubo de sección creciente a caudal constante es *permanente y no uniforme*; y el flujo por un tubo de sección creciente a caudal creciente es *no permanente y no uniforme*.

El flujo *unidimensional* desprecia las variaciones o cambios en la velocidad, la presión, etc., transversales a la dirección principal del flujo. Las condiciones en una sección recta se expresan en función de los valores

medios de la velocidad, la densidad y otras propiedades. El flujo a través de una tubería, por ejemplo, se puede considerar normalmente como unidimensional. Muchos problemas prácticos se pueden atacar por este método de análisis, que es mucho más sencillo que los métodos bi y tridimensional de análisis. En el flujo *bidimensional* se supone que todas las partículas siguen trayectorias idénticas en planos paralelos; por consiguiente, no hay cambios en el flujo normal a dichos planos. La red de corriente que se estudia en el Cap. 7 es el método de análisis más útil para los estados de flujo bidimensional. El flujo *tridimensional* es el flujo más general en el que las componentes de velocidad $u$, $v$, $w$, en direcciones mutuamente perpendiculares son funciones de las coordenadas del espacio y del tiempo $x$, $y$, $z$ y $t$. Los métodos de análisis son generalmente complejos matemáticamente, y solo se pueden resolver problemas que impliquen flujos entre contornos geométricos sencillos.

Una *línea de corriente* es una línea continua trazada en el fluido que es en cada punto tangente el vector velocidad. A través de una línea de corriente no puede pasar fluido. Como una partícula se mueve en la dirección de una línea de corriente en cualquier instante su desplazamiento $\delta\mathbf{s}$, que tiene las componentes $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, tiene la dirección del vector velocidad $\mathbf{q}$, cuyas componentes son $u$, $v$, $w$, en las direcciones $x$-, $y$-, $z$-, respectivamente. Las igualdades

$$\frac{\delta x}{u} = \frac{\delta y}{v} = \frac{\delta z}{w}$$

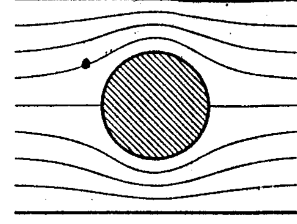
establecen que las componentes correspondientes son proporcionales y, por tanto, que $\delta\mathbf{s}$ y $\mathbf{q}$ tienen la misma dirección. Expresando los desplazamientos en forma diferencial

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{3.4.1}$$

obtenemos las ecuaciones diferenciales de una línea de corriente. Las Ecs. (3.4.1) son dos ecuaciones independientes. Cualquier línea continua que las satisfaga es una línea de corriente.

Cuando el flujo es permanente no hay cambios en el tiempo en la dirección del vector velocidad, cualquiera que sea el punto que se considere, por lo que las líneas de corriente tienen una tangente invariable en el tiempo en cada punto y son, por consiguiente, *invariables en el espacio*. Una partícula se mueve siempre tangente a una línea de corriente; por consiguiente, en flujo permanente la *trayectoria de una partícula* es una línea de corriente. Cuando el flujo no es permanente al transcurrir el tiempo las líneas de corriente varían de un instante a otro. Una partícula sigue entonces una línea de corriente un instante, otra al instante siguiente y así sucesivamente, de manera que la trayectoria de la partícula





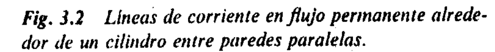


*Fig. 3.2 Líneas de corriente en flujo permanente alrededor de un cilindro entre paredes paralelas.*

puede no tener parecido ninguno a una línea de corriente instantánea dada.

Para estudiar experimentalmente el movimiento de un fluido, con frecuencia se inyecta en él un colorante, o humo. Las huellas del colorante, o del humo, se llaman *trazas*. En el movimiento permanente, la traza coincide con la línea de corriente y con la trayectoria de una partícula.

Las líneas de corriente en un flujo bidimensional pueden obtenerse echando partículas finas y brillantes (polvo de aluminio) en el fluido, iluminando intensamente después un plano y tomando una fotografía de las trazas desarrolladas en un corto intervalo de tiempo. Trazando en la fotografía líneas continuas que tengan las direcciones de las trazas en cada punto, se obtienen las líneas de corriente de un flujo permanente o no permanente.

En un flujo bidimensional incompresible, como el de la Fig. 3.2, se trazan las líneas de corriente de tal manera que el caudal que fluye entre dos líneas de corriente sea el mismo si se considera la unidad de profundidad normalmente al plano de la figura. Por consiguiente, cuando las líneas de corriente están más próximas, la velocidad debe ser mayor y viceversa. Si $v$ es la velocidad media entre dos líneas de corriente adyacentes en un lugar donde están separadas una distancia $h$, el caudal es

$$\Delta q = vh \tag{3.4.2}$$

En cualquier otra posición del gráfico donde la distancia entre las líneas de corriente sea $h_1$, la velocidad media es $v_1 = \Delta q/h_1$. Incrementando el número de líneas de corriente trazadas, o sea disminuyendo $\Delta q$, en el límite se podría obtener la velocidad en un punto.

Un *tubo de corriente* es un tubo formado por todas las líneas de corriente que pasan por una pequeña curva cerrada. En flujo permanente el tubo está fijo en el espacio y no puede haber paso del fluido a través de sus paredes porque el vector velocidad no tiene componente normal a la superficie del tubo.

*Ejemplo 3.2* En un flujo bidimensional y permanente de un fluido incompresible alrededor de un perfil las líneas de corriente se trazan de tal manera que están

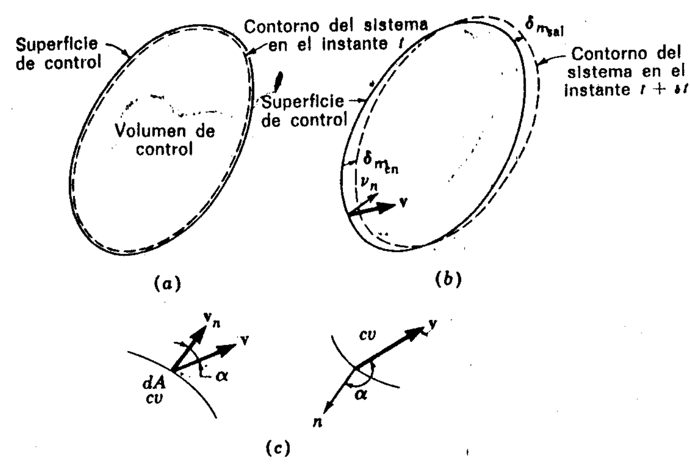



*Fig. 3.3 (a) El volumen de control y el sistema coinciden en un instante t. (b) Sistema desplazado por el flujo en el tiempo δt. (c) Flujo a través de un elemento de área de la superficie de control.*

1 cm separadas a una gran distancia del perfil donde la velocidad es de 36 m/seg. ¿Cuál es la velocidad cerca del perfil donde las líneas de corriente están separadas 0,75 cm?

El caudal por unidad de anchura es el mismo en ambas posiciones; por tanto,

$$36 \times 1 = v \times 0{,}75$$

y $v = 36/0{,}75 = 48$ m/seg.

## 3.5 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad, que es una expresión analítica del principio general de conservación de la masa, como se estableció en la Sec. 3.1, para un sistema, se desarrolla en varias formas útiles empleando los conceptos de sistema y volumen de control. En la Fig. 3.3*a* se toma el volumen de control con los mismos contornos que un sistema en cierto instante $t$. El sistema se mueve debido al flujo; como el volumen de control es invariable en el espacio, cierto intervalo corto de tiempo $\delta t$ más tarde, los contornos del sistema (Fig. 3.3*b*) se habrán separado de la superficie de control. Se designa mediante $\delta m_{sal}$ la masa que ha abandonado el volumen de control en el intervalo de tiempo $\delta t$, y por $\delta m_{en}$ la masa que ha entrado en el volumen de control. La masa del sistema es constante; viene dada por la masa $m_{cv_t}$, interior al volumen de control en el instante $t$, o bien por la masa dentro de volumen de control en el instante $t + \delta t$, $m_{cv_{t+\delta t}}$, más la masa que abandona el volumen de control en el intervalo $\delta t$, $\delta m_{sal}$, menos la masa que entra en el volumen de control en el intervalo $\delta t$, $\delta m_{en}$. Igualando estas expresiones y dividiendo por $\delta t$



$$\frac{m_{cv_t}}{\delta t} = \frac{m_{cv_{t+\delta t}}}{\delta t} + \frac{\delta m_{sal}}{\delta t} - \frac{\delta m_{en}}{\delta t} \tag{3.5.1}$$

o

$$\frac{m_{cv_{t+\delta t}} - m_{cv_t}}{\delta t} = \frac{\delta m_{en}}{\delta t} - \frac{\delta m_{sal}}{\delta t} \tag{3.5.2}$$

El primer miembro de esta ecuación es la velocidad de aumento de la masa dentro del volumen de control, cuando $\delta t$ tiende a cero:

$$\frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, d\mathcal{V} = \int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \tag{3.5.3}$$

donde $d\mathcal{V}$ es un elemento de volumen del volumen de control. La derivada parcial se puede meter dentro de la integral de volumen porque dicha integral se extiende sobre un volumen fijo y las operaciones son independientes.

El término $\delta m_{sal}/\delta t$ de la Ec. (3.5.1), en el límite cuando $\delta t$ tiende a cero, es el caudal en masa saliente desde el volumen de control (Fig. 3.3*c*):

$$\frac{\delta m_{sal}}{\delta t} = \int \rho v_n \, dA_{sal} = \int_{A_{sal}} \rho v \cos\alpha \, dA_{sal}$$

$v_n$ es la componente, de la velocidad, normal a la superficie de control, considerada positiva en la dirección de la normal trazada hacia el exterior del elemento de área. $v$ es la velocidad total en un punto de la superficie de control. Recordando que $\cos\alpha$ es negativo cuando el flujo es hacia el interior del volumen de control,

$$\frac{\delta m_{en}}{\delta t} = -\int_{A_{en}} \rho v \cos\alpha \, dA_{en}$$

Por consiguiente, el caudal neto entrante, en masa, es

$$\frac{\partial m_{en}}{\partial t} - \frac{\partial m_{sal}}{\partial t} = -\int_A \rho v \cos\alpha \, dA = -\int_{cs} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.5.4}$$

La integral de superficie se extiende sobre la superficie de control completa, aunque el integrando puede ser cero en la zona donde no se pro-

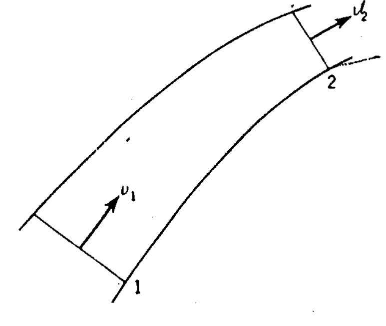



*Fig. 3.4* Flujo permanente en un tubo de corriente.

duce ni entrada ni salida de flujo. El elemento de área $d\mathbf{A}$, en notación vectorial, viene dado por un vector que se representa normal al elemento de área, su módulo proporcional al elemento de área y positiva cuando se dirige hacia fuera desde el volumen de control. Combinando las Ecs. (3.5.3) y (3.5.4),

$$\int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = -\int_{cs} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \qquad (3.5.5)$$

Esta ecuación expresa la ecuación de continuidad para un volumen de control. En otras palabras, el caudal neto entrante, en masa, es igual a la velocidad de variación con el tiempo de la masa interior al volumen de control.

Para un flujo permanente se anula el primer miembro de la Ec. (3.5.5):

$$\int_{cs} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad (3.5.6)$$

Consideremos el tubo de corriente de la Fig. 3.4 como volumen de control; el integrando de la Ec. (3.5.6) es cero sobre la superficie del tubo de corriente, quedando solo las áreas de los extremos

$$\rho_2 v_2\, \delta A_2 - \rho_1 v_1\, \delta A_1 = 0$$

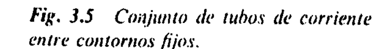
o

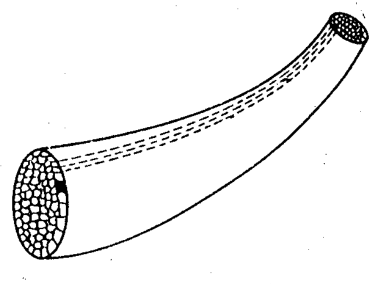
$$\delta \dot{m} = \rho_1 v_1\, \delta A_1 = \rho_2 v_2\, \delta A_2 \qquad (3.5.7)$$

siendo $\dot{m}$ la masa que atraviesa por segundo una sección. Si se puede considerar constante la densidad sobre la sección recta de una serie de tubos de corriente adyacentes (Fig. 3.5), entonces

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \qquad (3.5.8)$$




*Fig. 3.5* Conjunto de tubos de corriente entre contornos fijos.



donde $V_1$, $V_2$ representan las velocidades medias sobre las secciones rectas. La velocidad media sobre una sección recta viene dada por

$$V = \frac{1}{A} \int_A v\, dA$$

ū gasto

Definiendo el caudal $Q$ como

$$Q = AV \qquad (3.5.9)$$

que es el flujo de volumen a través de una sección recta por unidad de tiempo, se tendrá

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \qquad (3.5.10)$$

Para un flujo permanente e incompresible

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \qquad (3.5.11)$$

que es una forma muy útil de la ecuación de continuidad.

Para un flujo de densidad constante, permanente o no permanente, $\rho$ = const y la Ec. (3.5.5) es

$$\int_{cs} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad (3.5.12)$$

que establece que el caudal saliente neto, en volumen, es cero (lo que implica que el volumen de control está lleno de fluido en todo instante). La Ec. (3.5.11) se puede deducir de la Ec. (3.5.12)

*Ejemplo 3.3* En la sección 1 de un sistema de tuberías que conduce agua (Figura 3.6) la velocidad es de 1 m/seg y el diámetro es de 60 cm. Este mismo flujo pasa por otra sección 2 cuyo diámetro es de 90 cm. Hallar el caudal y la velocidad en la sección 2.

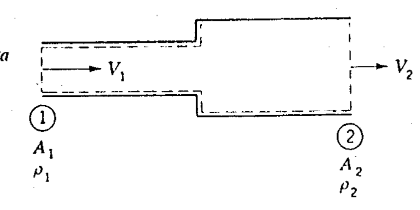



*Fig. 3.6 Volumen de control para flujo a través de tuberías en serie.*

De la Ec. (3.5.11)

$$Q = V_1 A_1 = 1 \cdot \pi \cdot 0{,}3^2 = 0{,}2826 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}2826}{0{,}45^2\pi} = 0{,}44 \text{ m/seg}$$

Para los estudios de flujo bi y tridimensional se utilizan las expresiones diferenciales de la ecuación de continuidad. En coordenadas cartesianas tridimensionales, la Ec. (3.5.5) se considera el elemento de volumen de control $\delta x\ \delta y\ \delta z$ de la Fig. 3.7 con centro en $(x,y,z)$ donde las componentes de la velocidad en las direcciones $x$-, $y$-, $z$- son, respectivamente, $u$, $v$, $w$ y $\rho$ es la densidad. Consideremos en primer lugar el caudal en masa a través del par de caras normales a la dirección $x$. En la cara de la derecha el caudal que sale es

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\ \delta z$$

ya que se supone que tanto $\rho$ como $u$ varían de forma continua a través del fluido. En la expresión anterior, $\rho u\ \delta y\ \delta z$ es el caudal en masa que

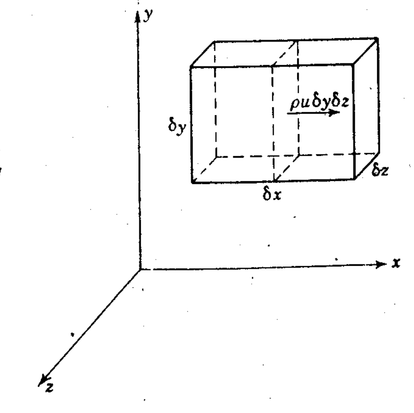



*Fig. 3.7 Volumen de control para deducción de la ecuación de continuidad tridimensional en coordenadas cartesianas.*



atraviesa la cara central normal al eje $x$. El segundo término da la variación de aumento del caudal en masa respecto a $x$, multiplicada por la distancia $\delta x/2$ a la cara de la derecha. Análogamente a través de la cara izquierda el caudal entrante en el volumen es

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\ \delta z$$

ya que la distancia es $-\delta x/2$. El caudal neto que sale a través de estas dos caras es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\ \delta x\ \delta y\ \delta z$$

Las otras dos direcciones dan expresiones análogas; por consiguiente, el caudal en masa neto que sale es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\delta x\ \delta y\ \delta z$$

que es el segundo miembro de la Ec. (3.5.5). El primer miembro de esta ecuación se convierte, para un elemento, en

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\ \delta x\ \delta y\ \delta z$$

Igualando estas dos expresiones y dividiendo por el elemento de volumen y tomando el límite cuando $\delta x\ \delta y\ \delta z$ tienden a cero, la ecuación de continuidad en un punto se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.5.13}$$

que se debe cumplir para todo punto del flujo, permanente o no permanente, compresible o incompresible†. Sin embargo, para flujo incompresible se simplifica de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.5.14}$$

Las Ecs. (3.5.13) y (3.5.14) se pueden escribir de manera concisa en no-

† La Ec. (3.5.13) se puede deducir de la Ec. (3.5.5) aplicando el teorema de Gauss. Ver L. Page, «Introduction to Theorectical Physics», 2.ª ed., págs. 32-36, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1935.

tación vectorial. Utilizando vectores unitarios invariables en las direcciones $x$-, $y$-, $z$-, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, respectivamente, se define el operador $\nabla$ (llamado «nabla») por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.5.15}$$

y el vector velocidad $\mathbf{q}$ viene dado por

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w \tag{3.5.16}$$

Entonces

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{q}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}\rho u + \mathbf{j}\rho v + \mathbf{k}\rho w)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)$$

ya que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, etc. La Ec. (3.5.13) se convierte en

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{q}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3.5.17}$$

y la Ec. (3.5.14) en

$$\nabla\cdot\mathbf{q} = 0 \tag{3.5.18}$$

El producto escalar $\nabla\cdot\mathbf{q}$ se llama *divergencia* del vector velocidad $\mathbf{q}$. El caudal saliente neto, en masa, en un punto debe ser cero para un flujo incompresible. Ver la Sec. 7.2 para un estudio más profundo del operador $\nabla$.

El flujo bidimensional, generalmente supuesto en planos paralelos al plano $xy$, $w = 0$ y no hay cambio respecto a $z$, de modo que $\partial/\partial z = 0$, que reduce las ecuaciones tridimensionales dadas por continuidad.

***Ejemplo 3.4*** La distribución de velocidades para un flujo incompresible bidimensional viene dada por

$$u = -\frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Demostrar que satisface la ecuación de continuidad.

En dos dimensiones, la ecuación de continuidad es, según la Ec. (3.5.14),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

y su suma es igual a cero, satisfaciendo la continuidad.

### 3.6 Ecuación del movimiento de Euler a lo largo de una línea de corriente

Además de la ecuación de continuidad, otras ecuaciones generales de control son la ecuación de Euler, la ecuación de Bernoulli, la ecuación de la energía, las ecuaciones de la cantidad de movimiento y el primer y segundo principios de la termodinámica. En esta sección se deduce la ecuación de Euler en forma diferencial. En la sección siguiente se integra para obtener la ecuación de Bernoulli. Después se desarrolla el primer principio de la termodinámica para flujo permanente, y se estudian algunas de sus relaciones entre sí, incluyendo una introducción al segundo principio de la termodinámica. En el Cap. 7 se deduce la ecuación de Euler para el flujo general tridimensional. Aquí nos limitamos al flujo a lo largo de una línea de corriente.

En la Fig. 3.8 una partícula de fluido de forma prismática se está moviendo a lo largo de una línea de corriente en la dirección $+s$ y su masa es $\rho\,\delta A\,\delta s$. Para simplificar el desarrollo de la ecuación del movimiento de esta partícula se supone que la viscosidad es cero, o sea que el fluido no tiene rozamiento. Esto elimina de toda consideración a las fuerzas de cortadura, dejando únicamente las fuerzas másicas debidas a la acción de la gravedad y las fuerzas superficiales sobre las bases de la partícula. La fuerza de la gravedad es $\rho g\,\delta A\,\delta s$. En la base situada aguas arriba

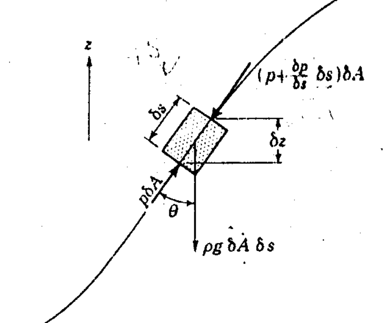



*Fig. 3.8 Componentes de las fuerzas sobre una partícula de fluido en la dirección de la línea de corriente.*

la fuerza debida a la presión es $p\ \delta A$ en la dirección $+s$; en la base situada aguas abajo es $[p + (\partial p/\partial s)\ \delta s]\ \delta A$ y actúa en la dirección $-s$. Cualquier otra fuerza sobre los lados del elemento es normal a $s$ y no entra en la ecuación. La componente de la fuerza másica en la dirección $s$ es $-\rho g\ \delta A\ \delta s \cos\theta$. Sustituyendo en el segundo principio de Newton del movimiento, $\Sigma f_s = \delta m\ a_s$,

$$p\ \delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\delta s\right)\delta A - \rho g\ \delta A\ \delta s \cos\theta = \rho\ \delta A\ \delta s\ a_s$$

$a_s$ es la aceleración de la partícula de fluido a lo largo de la línea de corriente. Dividiendo por la masa de la partícula, $\rho\ \delta A\ \delta s$, y simplificando

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\cos\theta + a_s = 0 \tag{3.6.1}$$

$\delta z$ es el aumento en altura de la partícula para un desplazamiento $\delta s$. De la Fig. 3.8,

$$\frac{\delta z}{\delta s} = \cos\theta = \frac{\partial z}{\partial s}$$

La aceleración $a_s$ es $dv/dt$. En general, si $v$ depende de $s$ y del tiempo $t$, $v = v(s,t)$,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial t}dt$$

$s$ se convierte en función de $t$ al representar el movimiento de una partícula, por tanto se puede dividir por $dt$, dando

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{3.6.2}$$

Sustituyendo en la Ec. (3.6.1) $\cos\theta$ y $a_s$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{3.6.3}$$

El último término de la ecuación, $\partial v/\partial t$, dificulta en general la integración. Para simplificar la ecuación, se hace la hipótesis de que el flujo es permanente, es decir, $\partial v/\partial t = 0$,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \tag{3.6.4}$$



Como $p$, $z$ y $v$ son ahora funciones de $s$ únicamente, se pueden sustituir las derivadas parciales por totales:

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + v\,dv = 0 \tag{3.6.5}$$

Esta es una forma de la ecuación de Euler del movimiento y necesita tres hipótesis importantes: (1) el movimiento es a lo largo de una línea de corriente, (2) es un fluido sin rozamiento y (3) flujo permanente. Se puede integrar si se conoce $\rho$ en función de $p$ o si es constante.

## 3.7 Ecuación de Bernoulli

Integrando la Ec. (3.6.5), para densidad constante, se obtiene la ecuación de Bernoulli

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \tag{3.7.1}$$

La constante de integración (llamada constante de Bernoulli), en general, varía de una línea de corriente a otra, pero permanece constante a lo largo de una misma *línea de corriente* en flujo *permanente*, *incompresible y sin rozamiento*. Estos cuatro supuestos son necesarios y deben tenerse en cuenta al aplicar esta ecuación. Las dimensiones de cada término son $(L/T)^2$, o sea, energía por unidad de masa. Dividiendo la ecuación por $g$,

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \text{const} \tag{3.7.2}$$

ya que $\gamma = \rho g$, o

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \tag{3.7.3}$$

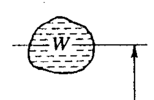



Fig. 3.9 Energía potencial.

que se puede interpretar ahora como energía por unidad de peso, o kgm/kg. Esta fórmula es particularmente conveniente para usarla en las aplicaciones cuando existe una superficie libre de líquido. Multiplicando la Ec. (3.7.1) por $\rho$,

$$\gamma z + \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} \tag{3.7.4}$$

cuyas dimensiones son energía por unidad de volumen, es decir, kilográmetros por metro cúbico, y es la forma más conveniente para las aplicaciones cuando el fluido es un gas, ya que las variaciones de cota carecen de importancia frecuentemente y puede despreciarse el término $\gamma z$.

Cada uno de los términos de la ecuación de Bernoulli puede ser interpretado como una forma de la energía. En la Ec. (3.7.1), $z$ es la energía potencial del fluido por unidad de peso, medida a partir de un origen arbitrario. En la Fig. 3.9 el trabajo necesario para elevar $W$ kg de fluido desde el origen a la altura $z$ es $Wz$ kgm, que es su energía potencial. La masa de $W$ kg de peso es $W/g$ UTM; por consiguiente, la energía potencial por UTM es

$$\frac{Wz}{W/g} = gz$$

El término siguiente, $v^2/2$, se interpreta de la manera siguiente: La energía cinética de una partícula de masa $\delta m$ es $\delta m\, v^2/2$. Para referirla a la masa unidad, se divide por $\delta m$; entonces $v^2/2$ es la energía cinética en kgm/UTM.

El último término, $p/\rho$, es el *trabajo o la energía del flujo* por unidad de masa. Dicho trabajo es trabajo neto efectuado por el elemento del fluido sobre el medio circundante mientras se mueve. Por ejemplo, en la Fig. 3.10, imaginemos una turbina que consta de un rodete con álabes, que gira cuando pasa el fluido a través de él, ejerciendo un par sobre su eje. Para un giro pequeño la presión desciende a través del álabe, a la vez que el área expuesta de la aleta ejerce una fuerza sobre el rodete. Cuando se multiplica la distancia desde el punto de aplicación de la fuerza al eje del rodete, se obtiene un par. El trabajo elemental realizado es $p\, \delta A\, ds$ por $\rho\, \delta A\, ds$ unidades de masa del fluido en movimiento; por consiguiente, el trabajo por unidad de masa es $p/\rho$. Los tres términos energéticos de la Ec. (3.7.1) se consideran como energía *utilizable*.

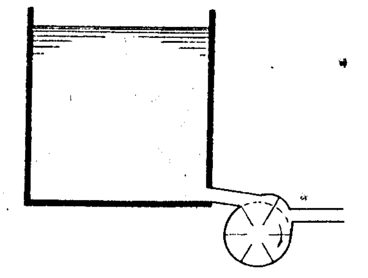


*Fig. 3.10 Trabajo realizado por una presión sostenida.*



*Ejemplo 3.5* Demostrar que la energía, por unidad de masa, en un depósito lleno de líquido es constante en todos los puntos.

Para un punto cualquiera $A$ del recipiente (Fig. 3.11), la energía viene dada por la Ec. (3.7.1).

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = gy + 0 + (H - y)\,\frac{\gamma}{\rho} = gH$$

Como los términos en $y$ desaparecen de la ecuación, la energía por unidad de masa es $gH$, para cualquier punto.

Aplicando la Ec. (3.7.3) a dos puntos de una línea de corriente,

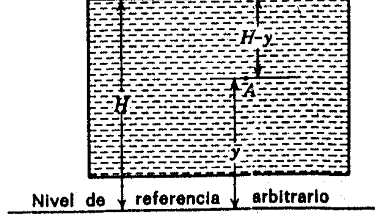
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \tag{3.7.5}$$

o también

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0$$

Esto demuestra que son las diferencias de energía potencial, de energía de presión, o de flujo, y de energía cinética las que en realidad tienen significación en la ecuación. Así, $z_1 - z_2$ es independiente de la altura del origen, pues es la diferencia de alturas de dos puntos. De manera análoga $(p_1/\gamma) - (p_2/\gamma)$ es la diferencia de alturas de presión, expresadas en metros, del fluido en movimiento y no se modifica cuando se cambia el origen de presiones. Como los términos de velocidad no son lineales, su origen no es arbitrario.

*Fig. 3.11 Depósito de líquido.*



*Ejemplo 3.6* En un canal abierto el agua fluye con una profundidad de 4 m y una velocidad de 8 m/seg. Después de una cascada fluye por otro canal abierto con una profundidad de 2 m y una velocidad de 20 m/seg. Suponiendo que no existe rozamiento en el fluido, determinar la diferencia de altura de las soleras de los canales.

Si la diferencia de altura de las soleras es $y$, entonces la ecuación de Bernoulli aplicada a las superficies libres de aguas arriba y abajo puede ser escrita

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2$$

donde $V_1$ y $V_2$ son las velocidades medias. Tomando la presión atmosférica como origen y la solera del canal más bajo como origen de cotas, entonces $z_1 = y + 4$, $z_2 = 2$, $V_1 = 8$, $V_2 = 20$, $p_1 = p_2 = 0$, y

$$\frac{8^2}{19{,}62}+0+y+4=\frac{20^2}{19{,}62}+0+2$$

de donde $y = 15{,}1$ m.

### Modificación de las hipótesis bajo las que se estableció la ecuación de Bernoulli

En condiciones especiales, cada una de las cuatro hipótesis que se hicieron para establecer la ecuación de Bernoulli puede ser modificada.

1. Cuando todas las líneas de corriente tienen su origen en un depósito donde la energía contenida es la misma en todos los puntos, la constante de integración no cambia de una línea de corriente a otra y los puntos 1 y 2, para aplicar la ecuación de Bernoulli, pueden elegirse arbitrariamente, es decir, no es necesario que estén en la misma línea de corriente.

2. En el movimiento de un gas, tal como en un sistema de ventilación, donde el cambio de presión es solo una pequeña fracción (un pequeño tanto por ciento) de la presión absoluta, el gas puede considerarse incompresible. La Ec. (3.7.3) puede aplicarse, con un peso específico medio $\gamma$.

3. Para flujo no permanente con un cambio muy lento de las condiciones de permanencia, tal como el vaciado de un gran depósito, la ecuación de Bernoulli puede aplicarse sin error apreciable.

4. La ecuación de Bernoulli se utiliza para analizar los casos de fluido real despreciando en primera aproximación los efectos de cortadura de origen viscoso para obtener resultados cualitativos. Después se puede modificar la ecuación resultante mediante un coeficiente determinado experimentalmente, que corrige la ecuación teórica de manera que esté de acuerdo con el caso físico real. En general, se manejan las pérdidas utilizando la ecuación de la energía desarrollada en la Sec. 3.8.

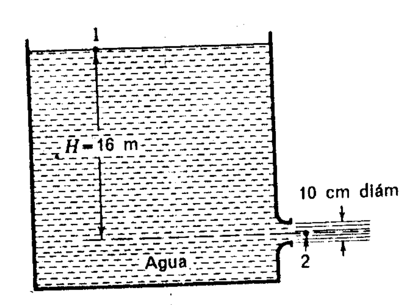



*Fig. 3.12 Flujo a través de una tobera en un depósito.*



*Ejemplo 3.7* (*a*) Determinar la velocidad de salida por la boquilla del recipiente de la Fig. 3.12. (*b*) Calcular el caudal que sale por la boquilla. Despréciense las pérdidas.

(*a*) El chorro es cilíndrico con presión atmosférica alrededor de su periferia. La presión a lo largo de su línea central es prácticamente la presión atmosférica. La ecuación de Bernoulli se aplica entre un punto de la superficie libre del agua y un punto de aguas abajo de la boquilla,

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2$$

Tomando como origen de presiones la presión atmosférica local, $p_1 = p_2 = 0$; con el origen de cotas pasando por el punto 2, $z_2 = 0$, $z_1 = H$. La velocidad en la superficie libre del depósito es cero (prácticamente); de aquí que

$$0+0+H=\frac{V_2^2}{2g}+0+0$$

y

$$V_2=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times 9{,}8\times 16}=17{,}7 \text{ m/seg}$$

que establece que la velocidad de salida del fluido es igual a la velocidad de caída libre desde la superficie del depósito. Esto se conoce como el *teorema de Torricelli*.

(*b*) El caudal $Q$ es el producto de la velocidad por el área de la sección:

$$Q = A_2V_2 = \pi\frac{0{,}1^2}{4}17{,}7 = 0{,}139 \text{ m}^3\text{/seg}$$

*Ejemplo 3.8* Un venturímetro, que consiste en una porción convergente seguida de la porción de garganta de diámetro constante y después de una parte gradualmente divergente, se usa para determinar el caudal en una tubería (Fig. 3.13). El diámetro en la sección 1 es de 15 cm y en la sección 2 es de 10 cm. Calcular el caudal a través de la tubería cuando $p_1 - p_2 = 0{,}2$ kg/cm$^2$ y fluye un aceite de peso específico relativo 0,90.

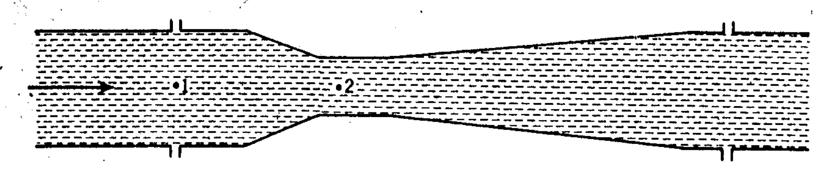



*Fig. 3.13* Venturímetro.

De la ecuación de continuidad, Ec. (3.5.11),

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2 = \pi\frac{0{,}15^2}{4}V_1 = \pi\frac{0{,}10^2}{4}V_2$$

en la cual $Q$ es el caudal (volumen que fluye en la unidad de tiempo). Aplicando la Ec. (3.7.3) para $z_1 = z_2$,

$$p_1 - p_2 = 0{,}2 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 \qquad \gamma = 0{,}90 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

o sea,

$$\frac{0{,}2 \times 10^4}{0{,}9 \times 10^3} = \frac{16Q^2}{\pi^2}\frac{1}{2 \times 9{,}8}\left(\frac{1}{0{,}10^4} - \frac{1}{0{,}15^4}\right)$$

Despejando el caudal, $Q = 0{,}058$ m$^3$/seg = 58/seg.

## 3.8 Ecuación de la energía. Primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica establece que el calor $Q_H$ que se aporta a un sistema menos el trabajo $W$ realizado por el sistema depende solo de los estados inicial y final del sistema. Siendo independiente del camino desde el estado inicial al final, la diferencia entre ambos estados debe ser una propiedad del sistema. Se llama *energía interna E*. El primer principio en forma de ecuación es

$$Q_H - W = E_2 - E_1 \qquad (3.8.1)$$

Ni el calor suministrado ni el trabajo efectuado son propiedades del sistema.

A continuación, la Ec. (3.8.1) se convierte en otras formas útiles considerando el flujo a través de un volumen de control†, de modo análogo a la deducción de las ecuaciones de continuidad de la Sec. 3.5. El volumen de control se hace coincidir con un sistema de masa en el instante $t$.

† Ver la referencia de Hunsaker y Rightmire al final del Cap. 6.



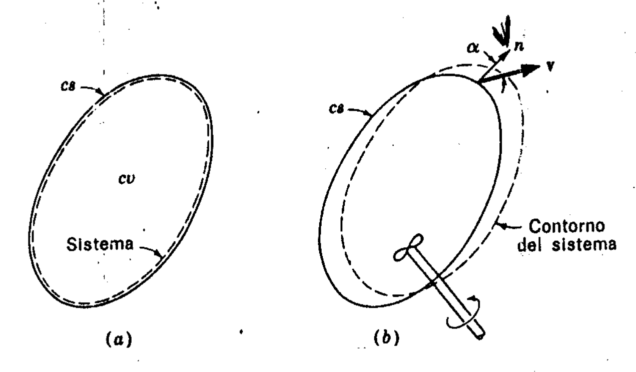



*Fig. 3.14* Desplazamiento del sistema partiendo del volumen de control en el tiempo $\delta t$.

Un intervalo corto de tiempo más tarde en $t + \delta t$ el sistema se ha desplazado por el movimiento, como se indica en la Fig. 3.14, con un flujo de energía interna $dE_{sal}$ que sale del volumen de control y un flujo de energía interna $dE_{en}$ que entra en el volumen de control. La energía interna del sistema en el instante $t$ es $E_{sis_t} = E_{cv_t}$ y en el instante $t + \delta t$

$$E_{sis_{t+\delta t}} = E_{cv_{t+\delta t}} + dE_{sal} - dE_{en}$$

Por consiguiente,

$$E_{sis_{t+\delta t}} - E_{sis_t} = E_{cv_{t+\delta t}} - E_{cv_t} + dE_{sal} - dE_{en} \qquad (3.8.2)$$

Es decir, el aumento de energía interna del sistema es igual a la suma del aumento de energía interna en el volumen de control y del flujo neto de energía interna que sale por la superficie de control.

El flujo neto de energía interna que sale es

$$dE_{sal} - dE_{en} = \delta t \int_{cs} \rho e v \cos\alpha \, dA$$

$$= \delta t \int_{cs} \rho e \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \qquad (3.8.3)$$

donde $e$ es la energía interna por unidad de masa.

Para desarrollar el término de trabajo de la Ec. (3.8.1), $W$ es el trabajo realizado por el sistema contra el medio, que para un sistema mecánico puede constar del trabajo realizado por las fuerzas de presión y por las fuerzas de cortadura en el contorno. Los efectos de la gravedad se

pueden incluir en la energía interna. El trabajo realizado por las fuerzas de presión en el contorno en el intervalo de tiempo $\delta t$ es

$$\delta W_{pr} = \delta t \int_{cs} pv \cos \alpha \, dA = \delta t \int_{cs} p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} \tag{3.8.4}$$

que es la suma de las fuerzas por los desplazamientos normales al contorno, extendida dicha suma a toda la superficie del contorno, durante $\delta t$. Cuando $\delta t$ tiende a cero en el límite, es lógico tomar las integrales de superficie extendidas sobre la superficie del volumen de control. Si se produce algún desplazamiento en el contorno, también pueden realizar otro trabajo las fuerzas de cortadura que actúan sobre él. Un ejemplo es el eje de una turbina que atraviese el volumen de control. Este trabajo de cortadura en el eje durante el giro en el intervalo $\delta t$ se llama *trabajo sobre el eje* $\delta W_s$. Si se elige siempre el volumen de control de manera que todas las porciones no situadas en superficies fijas sean normales al flujo, entonces no realizan trabajo en el contorno más fuerzas de cortadura que las que efectúan el trabajo sobre el eje.

Sustituyendo en la Ec. (3.8.1) y dividiendo por $\delta t$

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \frac{E_{cv_{t+\delta t}} - E_{cv_t}}{\delta t} + \int_{cs} p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} + \int_{cs} \rho e\mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} \tag{3.8.5}$$

o

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e \, d\mathcal{V} + \int_{cs}\left(\frac{p}{\rho} + e\right)\rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} \tag{3.8.6}$$

Esta es la forma no permanente del primer principio para un volumen de control y establece que la cantidad de calor suministrada por unidad de tiempo menos la cantidad de trabajo sobre el eje por unidad de tiempo es exactamente igual al aumento de energía interna dentro del volumen de control por unidad de tiempo más el trabajo de presión más el flujo saliente neto, por unidad de tiempo, de energía interna a través de la superficie de control.

Si no existen efectos nucleares, eléctricos, magnéticos ni de tensión superficial, la energía interna $e$ de una sustancia pura es la suma de las energías potencial, cinética e «intrínseca». La energía intrínseca $u$ por unidad de masa se debe a las fuerzas y la separación moleculares (depende de $p$, $\rho$ o $T$):

$$e = gz + \frac{v^2}{2} + u \tag{3.8.7}$$

Cuando se aplica la Ec. (3.8.6) al flujo permanente que pasa por un



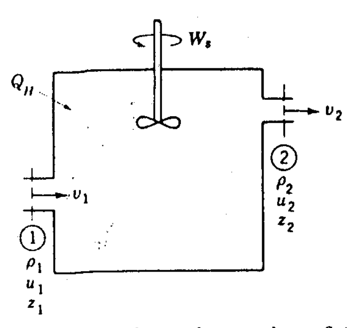



*Fig. 3.15 Volumen de control con flujo a través de una superficie de control normal a la superficie.*

*Fig. 3.16 Tubo de corriente permanente.*

volumen de control análogo al de la Fig. 3.15, la integral de volumen desaparece, y se convierte en

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1\right)\rho_1 v_1 A_1 = \frac{\delta W_s}{\delta t} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2\right)\rho_2 v_2 A_2$$

Como en esta ecuación el flujo es permanente, conviene dividir por la masa que atraviesa el sistema por segundo $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$, y da

$$q_H + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 = w_s + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \tag{3.8.8}$$

$q_H$ es el calor suministrado por unidad de masa del fluido en movimiento, y $w_s$ es el trabajo sobre el eje por unidad de masa del fluido en movimiento. Esta es la ecuación de la *energía* para flujo permanente a través de un volumen de control.

La ecuación de la energía (3.8.8) en forma diferencial, para el flujo a través de un tubo de corriente (Fig. 3.16) sin trabajo sobre un eje, es

$$d\frac{p}{\rho} + g\,dz + v\,dv + du - dq_H = 0 \tag{3.8.9}$$

Reagrupando los términos

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + v\,dv + du + p\,d\frac{1}{\rho} - dq_H = 0 \tag{3.8.10}$$

Los tres primeros términos son la ecuación de Euler (3.6.5); los tres últi-

mos son una de las formas del primer principio de la termodinámica para un sistema,

$$dq_H = p\,d\frac{1}{\rho} + du \qquad (3.8.11)$$

Ahora bien, para flujo reversible, la *entropía s* por unidad de masa se define mediante

$$ds = \left(\frac{dq_H}{T}\right)_{rev} \qquad (3.8.12)$$

donde $T$ es la temperatura absoluta. En los libros de termodinámica se demuestra que la entropía es una propiedad del fluido. En esta ecuación las unidades serán kcal/(UTM)(°K) o kgm/(UTM)(°K) cuando el calor viene expresado en kgm (1 kcal = 427 kgm). Como la Ec. (3.8.11) es para un fluido sin rozamiento (reversible), $dq_H$ se puede eliminar de las Ecs. (3.8.11) y (3.8.12),

$$T\,ds = du + p\,d\frac{1}{\rho} \qquad (3.8.13)$$

que es una relación termodinámica muy importante. Aunque se ha deducido para un proceso reversible, como todos los términos son propiedades termodinámicas, también se tiene que cumplir para los casos de flujo irreversible. Utilizando la Ec. (3.8.13) con la *desigualdad de Clausius*† y varias combinaciones de la ecuación de Euler y del primer principio, se obtiene un entendimiento más claro de la entropía y las pérdidas.

## 3.9 Relaciones mutuas entre las ecuaciones de Euler y relaciones termodinámicas

El primer principio en forma diferencial, de la Ec. (3.8.10), con trabajo sobre un eje incluido, es

$$dw_s + \frac{dp}{\rho} + v\,dv + g\,dz + p\,d\frac{1}{\rho} + du - dq_H = 0 \qquad (3.9.1)$$

Sustituyendo $du + p\,d(1/\rho)$ de la Ec. (3.8.13),

$$dw_s + \frac{dp}{\rho} + v\,dv + g\,dz + T\,ds - dq_H = 0 \qquad (3.9.2)$$

† Ver un texto cualquiera de termodinámica.



La desigualdad de Clausius establece que

$$ds \geq \frac{dq_H}{T}$$

o

$$T\,ds \geq dq_H \qquad (3.9.3)$$

Por tanto, $T\,ds - dq_H \geq 0$. El signo igual se aplica a un proceso reversible [o un fluido sin rozamiento, dando la Ec. (3.6.5) con un término de trabajo]. Si la magnitud denominada «pérdidas» o «irreversibilidades» se identifica con

$$d\,(\text{pérdidas}) \equiv T\,ds - dq_H \qquad (3.9.4)$$

se ve que $d$ (pérdidas) es positiva en flujo irreversible, es cero en flujo reversible, y nunca puede ser negativa. Sustituyendo la Ec. (3.9.4) en la Ec. (3.9.2)

$$dw_s + \frac{dp}{\rho} + v\,dv + g\,dz + d\,(\text{pérdidas}) = 0 \qquad (3.9.5)$$

Esta es una de las formas más importantes de la ecuación de la energía. En general, se deben determinar las pérdidas experimentalmente. Esto implica que parte de la energía utilizable se convierte en energía interna durante un proceso irreversible. Esta ecuación, sin trabajo sobre un eje, difiere de la ecuación de Euler solo en el término de las pérdidas. En forma integrada,

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + w_s + \text{pérdidas}_{1-2} \qquad (3.9.6)$$

Si se realiza trabajo sobre el fluido en el volumen de control, como mediante una bomba, entonces $w_s$ es negativo. La sección 1 está aguas arriba y la sección 2 aguas abajo.

## 3.10 Aplicación de las ecuaciones de Bernoulli y de la energía a flujo permanente de fluidos

Para un fluido incompresible, se puede simplificar la Ec. (3.9.6) a

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \text{pérdidas}_{1-2} \qquad (3.10.1)$$

donde cada término es ahora energía en kgm por kg, incluyendo el término de pérdidas. Se ha omitido el término de trabajo, pero se puede incluir si es necesario.

### *Factor de corrección de la energía cinética*

Al estudiar el movimiento de los fluidos en canales abiertos y en conducciones cerradas, se usa con frecuencia el llamado método de análisis «unidimensional». El flujo total se considera que es un gran tubo de corriente con velocidad media $V$ en cada sección recta. La energía cinética por unidad de peso viene dada por $V^2/2g$ pero debe tenerse en cuenta que no coincide con la media de $v^2/2g$ tomada sobre la sección recta. Es necesario afectar a $V^2/2g$ de un factor de corrección $\alpha$, para que entonces $\alpha V^2/2g$ sea la energía cinética media por unidad de peso que pasa por la sección. Refiriéndonos a la Fig. 3.17, la energía cinética que pasa por la sección por unidad de tiempo es

$$\gamma \int_A \frac{v^2}{2g} v\, dA$$

puesto que $\gamma v\, \delta A$ es el peso que por unidad de tiempo pasa por $\delta A$ y $v^2/2g$ es la energía cinética por unidad de peso. Igualando esto a la energía cinética por unidad de peso que pasa por la sección, expresada en función de $\alpha V^2/2g$,

$$\alpha \frac{V^2}{2g} \gamma V A = \gamma \int_A \frac{v^3}{2g} dA$$

Despejando $\alpha$, resulta el valor del factor de corrección de la energía cinética:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA \qquad (3.10.2)$$

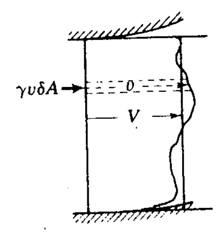



*Fig. 3.17* *Distribución de velocidad y velocidad media.*



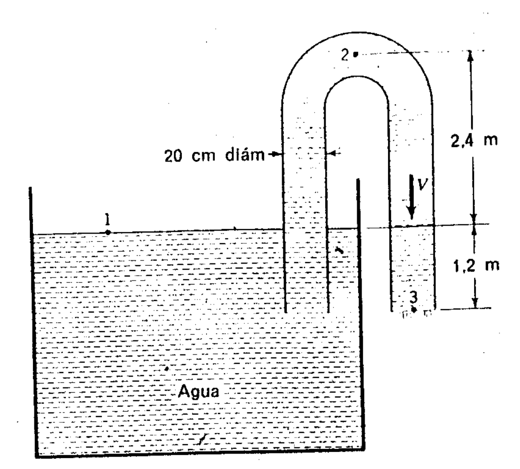



*Fig. 3.18* *Sifón.*

La ecuación de Bernoulli se hace:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \qquad (3.10.3)$$

Para flujo laminar en una tubería, $\alpha = 2$, como se demuestra en la Sec. 5.2. Para flujo turbulento† en una tubería, $\alpha$ varía aproximadamente desde 1,01 hasta 1,10, y usualmente se desprecia, es decir, se supone igual a 1, excepto para estudios precisos.

***Ejemplo 3.9*** La distribución de velocidades en flujo turbulento en una tubería está dada aproximadamente por la ley de Prandtl de la potencia 1/7,

$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

siendo $y$ la distancia desde las paredes de la tubería y $r_0$ el radio de ésta. Se pide el factor de corrección de la energía cinética.

La velocidad media $V$ está expresada por:

$$\pi r_0^2 V = 2\pi \int_0^{r_0} rv\, dr$$

† V. L. Streeter, The Kinetic Energy and Momentum Correction Factors for Pipes and Open Channels of Great Width, *Civil Eng. N. Y.*, vol. 12, n.° 4, págs. 212-213, 1942.

siendo $r = r_0 - y$. Sustituyendo $r$ y $v$ en función de $y$,

$$\pi r_0^2 V = 2\pi v_{max}\int_0^{r_0}(r_0-y)\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}dy = \pi r_0^2 v_{max}\frac{98}{120}$$

o sea,

$$V=\frac{98}{120}v_{max}\qquad \frac{v}{V}=\frac{120}{98}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

Sustituyendo en la Ec. (3.10.2)

$$\alpha = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}2\pi r\left(\frac{120}{98}\right)^3\left(\frac{y}{r_0}\right)^{3/7}dr = 2\left(\frac{120}{98}\right)^3\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0}(r_0-y)\left(\frac{y}{r_0}\right)^{3/7}dy = 1{,}06$$

Todos los términos en la ecuación de la energía (3.10.1), excepto el término de las pérdidas, son *energía utilizable*. Para fluidos reales que fluyan a través de un sistema la energía utilizable disminuye en la dirección de aguas abajo; es utilizable para realizar trabajo, como al pasar a través de una turbina de agua. Un dibujo que muestra la energía utilizable a lo largo de un tubo de corriente refleja la *línea de alturas totales* (ver la Sec. 10.1). Un dibujo de los dos términos $z + p/\gamma$ a lo largo de un tubo de corriente refleja la *línea de alturas piezométricas*. La línea de alturas totales siempre tiene una pendiente negativa en el movimiento de un fluido real, excepto en una bomba o en otra fuente de energía. Las disminuciones de la cota de la línea de alturas totales también se llaman pérdidas de carga.

***Ejemplo 3.10*** El sifón de la Fig. 3.18 está lleno de agua que fluye como muestra la figura. Si el caudal es de 100 litros/seg, calcular las pérdidas de energía entre los puntos 1 y 3 en función de la altura de velocidad $V^2/2g$. Calcular la presión en el punto 2 suponiendo que 2/3 de las pérdidas ocurren entre los puntos 1 y 2.

La ecuación de Bernoulli aplicada entre los puntos 1 y 3 con origen de alturas en el punto 3 y con la presión atmosférica como origen de presiones es:

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\gamma}+z_3+\text{pérdidas}$$

o sea,

$$0+0+1{,}2=\frac{V_3^2}{2g}+0+0+\frac{KV_3^2}{2g}$$

en la cual las pérdidas de 1 a 3 se han expresado por $KV_3^2/2g$. La velocidad en la sección de salida es:

$$V_3=\frac{Q}{A}=\frac{100\times10^{-3}}{\pi\times0{,}2^2/4}=3{,}18\text{ m/seg}$$



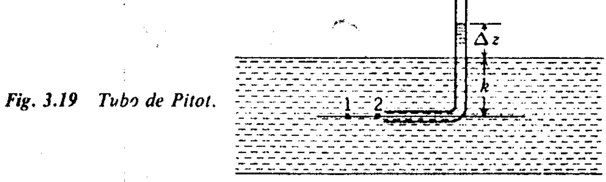



*Fig. 3.19 Tubo de Pitot.*

y $V_3^2/2g = 0{,}516$ m; por consiguiente, $K = 1{,}32$ y la energía perdida es 0,682 kgm/kg.

La ecuación de la energía aplicada entre los puntos 1 y 2, con la pérdida $\frac{2}{3}\,0{,}682 = 0{,}454$, es:

$$0+0+0=0{,}516+\frac{p_2}{\gamma}+2{,}4+0{,}454$$

La presión en 2 es de −3,37 m de agua, o sea, 0,337 kg/cm² de vacío.

***Ejemplo 3.11*** El instrumento de la Fig. 3.19 se utiliza para determinar la velocidad del líquido en el punto 1. Se trata de un tubo con su extremo más bajo dirigido contra la corriente y su otra rama vertical y abierta a la atmósfera. El impacto del líquido contra el orificio 2 obliga al líquido a subir por la rama vertical una altura $\Delta z$ por encima de la superficie libre. Determinar la velocidad en 1.

El punto 2 es un punto de estancamiento, donde la velocidad del movimiento se reduce a cero. Esto crea una presión de impacto llamada presión dinámica, que impulsa al fluido por la rama vertical. Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, despreciando las pérdidas, que son muy pequeñas,

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+0=0+\frac{p_2}{\gamma}+0$$

$p_1/\gamma$ viene dado por el fluido por encima del punto 1 y es igual a $k$ m de fluido. $p_2/\gamma$ viene dado por el manómetro como $k + \Delta z$, despreciando la ascensión capilar. Sustituyendo estos valores en la ecuación, $V_1^2/2g = \Delta z$ y

$$V_1=\sqrt{2g\Delta z}$$

Este es el tubo de pitot en su forma simple.

En el Cap. 6 se dan ejemplos de flujo compresible.

### 3.11 Ecuación de la cantidad de movimiento

Se puede deducir la ecuación de la cantidad de movimiento a partir del segundo principio de Newton para un sistema [Ec. (3.1.1)] mediante procedimientos análogos a los utilizados para deducir las ecuaciones de continuidad y de la energía.

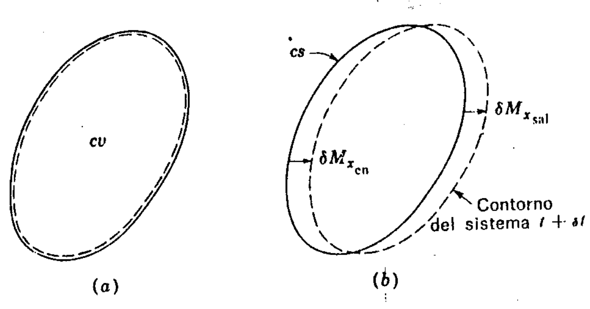



*Fig. 3.20 Volumen de control y sistema para la deducción de la ecuación de la cantidad de movimiento.*

La ecuación de la cantidad de movimiento se deduce para una dirección arbitraria $x$, después se puede considerar para tres ejes mutuamente perpendiculares, y se obtiene la ecuación vectorial de la cantidad de movimiento por suma vectorial.

En el instante $t$ la cantidad de movimiento en la dirección $x$ dentro del sistema y del volumen de control coincidente (Fig. 3.20) es $(M_{x_t})_{sis} = (M_{x_t})_{cv}$. En el instante $t + \delta t$ el sistema se ha desplazado un pequeño espacio a partir del volumen de control. La cantidad de movimiento del sistema en la dirección $x$ se puede expresar entonces como

$$(M_{x_{t+\delta t}})_{sis} = (M_{x_{t+\delta t}})_{cv} + \delta M_{x_{sal}} - \delta M_{x_{en}}$$

$\delta M_{x_{sal}}$ es el flujo de cantidad de movimiento en la dirección $x$ que sale del volumen de control en $\delta t$, y $\delta M_{x_{en}}$ es el flujo de cantidad de movimiento en la dirección $x$ que entra en el volumen de control en el mismo intervalo de tiempo.

El aumento por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento en la dirección $x$ dentro del sistema [Ec. (3.1.1)] es

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = \frac{dM_x}{dt} = \frac{(M_{x_{t+\delta t}})_{sis} - (M_{x_t})_{sis}}{\delta t}$$

$$= \frac{(M_{x_{t+\delta t}})_{cv} - (M_{x_t})_{cv}}{\delta t} + \frac{\delta M_{x\,sal} - \delta M_{x\,en}}{\delta t} \tag{3.11.1}$$

La salida neta por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento en la dirección $x$ es

$$\frac{\delta M_{x\,sal} - \delta M_{x\,en}}{\delta t} = \int_{cs} \rho v_x v \cos \alpha \, dA = \int_{cs} \rho v_x \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.11.2}$$

donde $\alpha$ es el ángulo que forman el vector velocidad $\mathbf{v}$ y la normal hacia



afuera en un punto cualquiera de la superficie de control, como se empleaba en las Secs. 3.5 y 3.8. La Ec. (3.1.1), para el sistema, en la dirección $x$ es

$$\Sigma F_x = \frac{d}{dt}(M_x) \tag{3.11.3}$$

Combinando las Ecs. (3.11.1), (3.11.2) y (3.11.3)

$$\Sigma F_x = \frac{\partial (M_x)_{cv}}{\partial t} + \int_{cs} \rho v_x \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.11.4}$$

Es decir, la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control, considerando la dirección $x$, establece que la fuerza resultante que actúa sobre el fluido en el interior del volumen de control en la dirección $x$ es exactamente igual a la suma de la variación de la cantidad de movimiento en la dirección $x$ con el tiempo dentro del volumen de control y el flujo saliente neto, por unidad de tiempo, de la cantidad de movimiento en la dirección $x$ a partir del volumen de control.

Para flujo permanente la cantidad de movimiento en la dirección $x$ dentro del volumen de control permanece constante, y

$$\Sigma F_x = \int_{cs} \rho v_x \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.11.5}$$

Para las direcciones $y$ y $z$ de un sistema cartesiano de referencia

$$\Sigma F_y = \int_{cs} \rho v_y \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.11.6}$$

y

$$\Sigma F_z = \int_{cs} \rho v_z \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.11.7}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\mathbf{i}$, la segunda por $\mathbf{j}$ y la tercera por $\mathbf{k}$, vectores unitarios paralelos respectivamente a $x$, $y$, $z$, y sumando,

$$\Sigma \mathbf{F} = \int_{cs} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.11.8}$$

La ecuación de la cantidad de movimiento para flujo permanente tiene la ventaja de que no necesita información sobre las condiciones dentro del volumen de control. Solo necesita para su aplicación las fuerzas externas y el flujo saliente neto de la cantidad de movimiento, por unidad de tiempo.

La ecuación de la cantidad de movimiento se puede aplicar a la solución de problemas de flujo permanente en las formas dadas por las

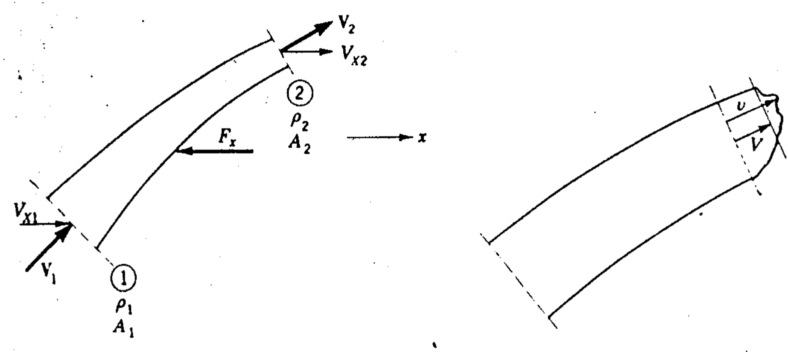



*Fig. 3.21* Volumen de control con entrada de flujo uniforme y salida normal a la superficie de control.

*Fig. 3.22* Flujo no uniforme a través de una superficie de control.

Ecs. (3.11.5) a (3.11.8). Para la mayor parte de las aplicaciones se debe elegir el volumen de control de manera que el flujo que sale y entra sea normal a la superficie de control. Si es normal a la superficie y la velocidad es constante en la superficie de entrada o de salida, entonces se puede escribir la Ec. (3.11.5) (Fig. 3.21)

$$\Sigma F_x = \rho_2 A_2 V_2 V_{x2} - \rho_1 A_1 V_1 V_{x1} = \rho Q (V_{x2} - V_{x1}) \qquad (3.11.9)$$

ya que el caudal en masa que entra es igual al que sale.

Para entrada o salida no uniforme de flujo por una porción de la superficie de control, donde la velocidad sea normal a la superficie, como en la Fig. 3.22, el flujo saliente de cantidad de movimiento, por unidad de tiempo, a través de la superficie es

$$\int_A \rho v^2 \, dA = \beta \rho V^2 A \qquad (3.11.10)$$

donde $\beta$ se conoce como factor de corrección† de la cantidad de movimiento y debe ser hallado a partir de la distribución de velocidades. Si se puede considerar constante la densidad en la sección recta,

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA \qquad (3.11.11)$$

análogo al método para hallar el factor de corrección de la energía cinética. Por consiguiente, para flujo no uniforme sobre la superficie de control, la Ec. (3.11.9), se convierte en

$$\Sigma F_x = \rho Q(\beta_2 V_{x2} - \beta_1 V_{x1}) \qquad (3.11.12)$$

† Ver la nota de la pág. 136.



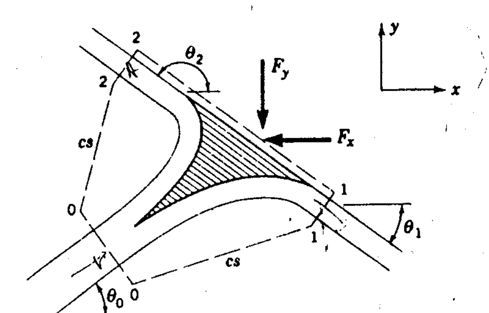



*Fig. 3.23* Ejemplo de flujo que sale de un volumen de control en dos direcciones.

Para estados en que el flujo entra o sale bajo condiciones distintas por dos o más corrientes, como en la Fig. 3.23, la Ec. (3.11.5) toma la forma

$$\Sigma F_x = \rho_1 Q_1 V_1 \cos\theta_1 + \rho_2 Q_2 V_2 \cos\theta_2 - \rho_0 Q_0 V_0 \cos\theta_0 \qquad (3.11.13)$$

y la Ec. (3.11.6) se convierte en

$$\Sigma F_y = \rho_1 Q_1 V_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 Q_2 V_2 \operatorname{sen}\theta_2 - \rho_0 Q_0 V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \qquad (3.11.14)$$

En la figura $\theta_1$ es negativo.

Tratando los términos del flujo, por unidad de tiempo, de la cantidad de movimiento de la Ec. (3.11.8) como vectores situados en el centro del paso de flujo con velocidad constante (Fig. 3.24) los flujos salientes se suman y los flujos entrantes se restan para dar el vector fuerza. Manteniendo cada vector en su línea de acción, la línea de acción del vector fuerza resultante está determinada, tanto en módulo como en dirección y sentido.

pasar a página 200

### 3.12 Aplicaciones de las ecuaciones de la cantidad de movimiento

Al aplicar las relaciones de la cantidad de movimiento se debe tener cuidado para establecer claramente las direcciones componentes y después utilizar el signo que corresponde a cada término que entra en las ecuaciones. La determinación del signo depende de dos factores: si el término representa el flujo entrante o el flujo saliente de la cantidad de movimiento, por unidad de tiempo, y si está en la dirección positiva o negativa del eje componente. El ejemplo siguiente presenta estos factores.

*Ejemplo 3.12* El codo reductor de la Fig. 3.25 está en un plano vertical. El agua está en movimiento, $D_1 = 1{,}80$ m, $D_2 = 1{,}20$ m, $Q = 8{,}5$ m³/seg, $W = 9.000$ kg, $z = 3$ m, $\theta = 120°$, $p_1 = 2{,}8$ kg/cm², $x = 1{,}80$ m, y las pérdidas en el codo son

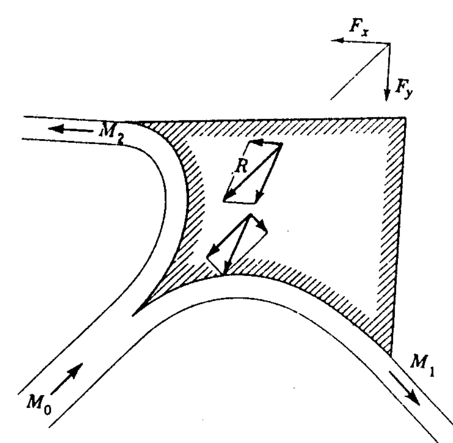



*Fig. 3.24 Solución del problema de la cantidad de movimiento lineal por suma de vectores.*

$0{,}15 V_2^2/2g$ kgm/kg. Determinar $F_x$, $F_y$ y la línea de acción de la fuerza resultante. $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

La superficie interna del codo reductor forma la superficie del volumen de control a través de la cual no pasa flujo. Las secciones normales 1 y 2 completan la superficie de control.

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{8{,}5}{\pi(1{,}8)^2/4} = 3{,}34 \text{ m/seg}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{8{,}5}{\pi(1{,}2)^2/4} = 7{,}51 \text{ m/seg}$$

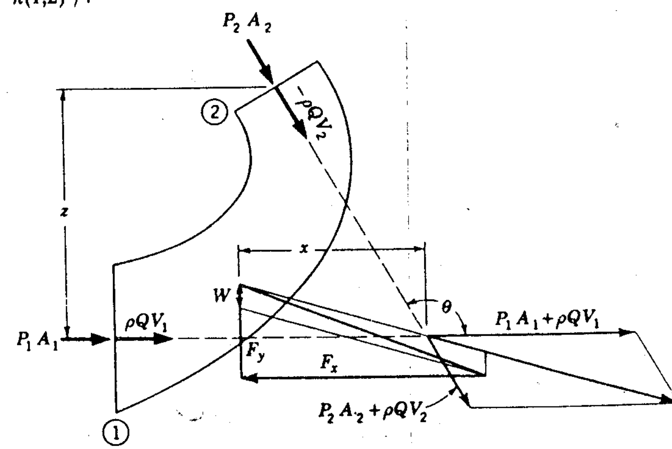



*Fig. 3.25 Fuerzas sobre un codo reductor, incluyendo la solución vectorial.*



Aplicando la ecuación de la energía, Ec. (3.10.1),

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \text{pérdidas}_{1-2}$$

$$\frac{2{,}8 \times 10^4}{10^3} + \frac{(3{,}34)^2}{19{,}62} + 0 = \frac{p_2}{10^3} + \frac{(7{,}51)^2}{19{,}62} + 3 + 0{,}15\frac{(7{,}51)^2}{19{,}62}$$

de donde $p_2 = 22{,}1 \cdot 10^3$ kg/m² $= 2{,}21$ kg/cm².

Para determinar $F_x$, la Ec. (3.11.9) da

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - F_x = \rho Q (V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$2{,}8 \times 10^4 \pi (0{,}9)^2 - 22{,}1 \times 10^4 \pi (0{,}6)^2 \cos 120^\circ - F_x = \frac{10^3}{9{,}8} \times 8{,}5(7{,}51 \cos 120^\circ - 3{,}34$$

Como $\cos 120^\circ = -0{,}5$,

$$7{,}12 \times 10^4 + 1{,}2555 \times 10^4 - F_x = 0{,}867 \times 10^4(-3{,}755 - 3{,}34)$$

$$F_x = 90.000 \text{ kg}$$

Para la dirección $y$

$$\Sigma F_y = \rho Q (V_{y2} - V_{y1})$$

$$F_y - W - p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta = \rho Q V_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$F_y - 9.000 - 22{,}1 \times 10^4 \pi (6)^2 \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{10^3}{9{,}8} \times 8{,}5 \times 7{,}51 \operatorname{sen} 120^\circ$$

$$F_y = 37.200 \text{ kg}$$

Para hallar la línea de acción de la fuerza resultante, utilizando los vectores de flujo de la cantidad de movimiento (Fig. 3.25), $\rho Q V_1 = 2.900$ kg, $\rho Q V_2 = 6.500$ kg, $p_1 A_1 = 71.200$ kg, $p_2 A_2 = 25.100$ kg. Combinando estos vectores en la Fig. 3.25 da la fuerza final, 93.800 kg, que se debe oponer a $F_x$ y $F_y$.

En este ejemplo se han empleado presiones manométricas. Si se hubieran utilizado presiones absolutas, se hubiera obtenido un resultado distinto. $F_x$ y $F_y$ habrían cambiado, pero cuando se considera que la presión atmosférica actúa sobre la superficie del codo, se deben obtener las mismas fuerzas para el amarre, ya que la integración de la presión atmosférica extendida a toda la superficie de control dará una componente de la fuerza cero en las direcciones $x$-, $y$-, $z$-.

Como se demostró en el Ejemplo 3.12, un cambio en la dirección de una tubería produce fuerzas que se ejercen sobre la tubería a menos

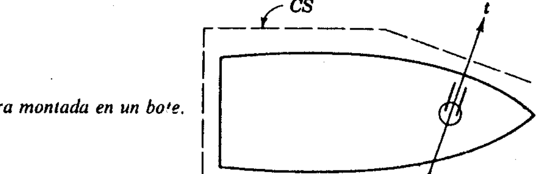



Fig. 3.26 Tobera montada en un bote.

que el codo se amarre. Estas fuerzas se deben a la presión estática en la tubería y a las reacciones dinámicas en la corriente de fluido que cambia de dirección. Las juntas de expansión se sitúan en tuberías grandes para evitar las tensiones en la tubería en dirección axial, tanto ocasionadas por el fluido como por el cambio de temperatura. Estas juntas de expansión permiten un movimiento de la tubería relativamente libre en dirección axial, y, por consiguiente, es preciso prever las fuerzas estáticas y dinámicas en los codos.

***Ejemplo 3.13*** Un chorro de agua de 75 mm de diámetro con una velocidad de 36 m/seg descarga en dirección horizontal por una boquilla montada en un bote. ¿Qué fuerza se necesita para mantener el bote en reposo?

Seleccionando un volumen de control, como se muestra en la Fig. 3.26, el flujo saliente neto de cantidad de movimiento, por unidad de tiempo, será [Ec. (3.11.9)]

$$F_x = \rho Q(V_{x2} - V_{x1}) = \rho QV = \frac{1.000}{9,8}\,\frac{\pi 75^2 \cdot 10^{-6}}{4}\,36(36 - 0) = 585 \text{ kg}$$

Esta fuerza debe ser aplicada al bote en la dirección en que descarga el chorro para mantenerlo en reposo.

***Ejemplo 3.14*** Encontrar la fuerza ejercida por la boquilla sobre la tubería de la Fig. 3.27*a*. Despreciar las pérdidas. El fluido es aceite de peso específico relativo 0,85, y $p_1 = 6$ kg/cm².

Para determinar el caudal en volumen se escribe la ecuación de Bernoulli aplicada a la sección 1 anterior a la boquilla y a la sección 2 aguas abajo del extremo de la tobera donde la presión es nula.

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{6 \times 10^4}{0,85 \times 10^3} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$$

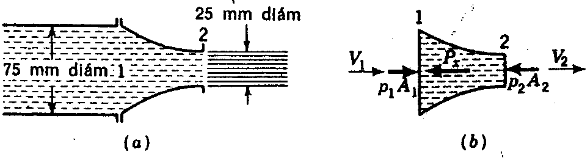



Fig. 3.27 Tobera en el extremo de una tubería.



Como $z_1 = z_2$, y $V_2 = (D_1/D_2)^2 V_1 = 9V_1$, sustituyendo,

$$\frac{V_1^2}{2g}(1 - 81) + \frac{6 \times 10^4}{0,85 \times 10^3} = 0$$

y $V_1 = 4,16$ m/seg, $V_2 = 37,4$ m/seg, $Q = 4,16\,\frac{\pi \times 75^2}{4}10^{-6} = 18,38 \times 10^{-3}$ m³/seg

= 18,38 l/seg. Sea $P_x$ (Fig. 3.20*b*) la fuerza ejercida sobre el cuerpo libre del líquido por la boquilla; entonces por la Ec. (3.11.9),

$$6 \times 10^4\,\frac{\pi \times 75^2}{4}\,10^{-6} - P_x = \frac{1.000}{9,8} \times 0,85 \times 18,38 \times 10^{-3}(37,4 - 4,16)$$

de donde $P_x = 212$ kg. El aceite ejerce una fuerza sobre la boquilla de 212 kg hacia la derecha, y una fuerza de tracción de 212 kg es ejercida por la boquilla sobre la tubería.

En muchos casos se puede convertir un problema de flujo no permanente en un problema de flujo permanente superponiendo una velocidad constante sobre el sistema y el medio, es decir, variando la velocidad de referencia. La dinámica de un sistema y el medio que le rodea no varía por la superposición de una velocidad constante; por tanto, las presiones y las fuerzas no cambian. En el estudio del próximo caso de flujo se utiliza este principio.

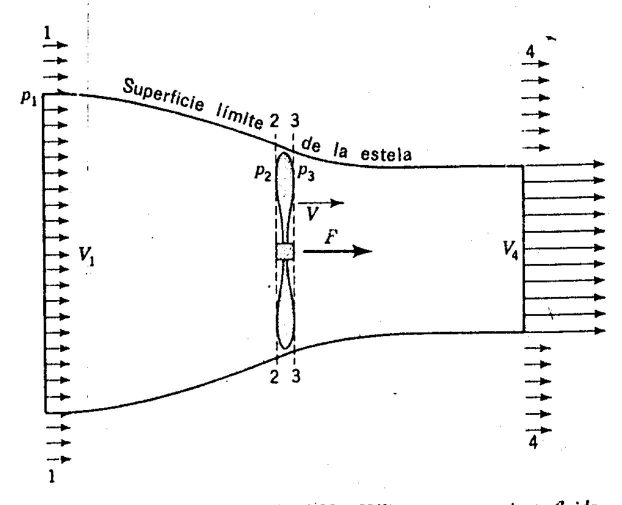



Fig. 3.28 Hélice en una corriente fluida.

*Aplicación de la teoría de la cantidad de movimiento a las hélices*

La acción de una hélice de propulsión consiste en cambiar la cantidad de movimiento del fluido en que se encuentra sumergida y así originar un empuje que se utiliza para la propulsión. Las hélices no pueden proyectarse de acuerdo únicamente con la teoría de la cantidad de movimiento, sin embargo, algunas de las relaciones que las gobiernan se hacen evidentes con su aplicación. En la Fig. 3.28 se representa una hélice con su estela de deslizamiento y la distribución de velocidades en dos secciones a una cierta distancia de ella. La hélice puede estar (*a*) quieta en un fluido que se mueve como se representa en la figura o (*b*) moviéndose hacia la izquierda con una velocidad $V_1$ en un fluido en reposo, en cuyo caso su imagen relativa es la misma. Se supone que el fluido está desprovisto de rozamiento y es incompresible.

El fluido no es perturbado por la hélice en la sección 1 de aguas arriba y se acelera al aproximarse a la hélice, debido a que la presión se ha reducido en la cara de aguas arriba de ésta. Al pasar a través de la hélice, el fluido aumenta su presión, se acelera y la sección se reduce en 4. La velocidad $V$ no cambia al pasar el fluido a través de la hélice desde la sección 2 hasta la 3. Las presiones en 1 y 4, así como a lo largo de la superficie límite de la estela, son las del fluido no perturbado.

Cuando se aplica la ecuación de la cantidad de movimiento (3.11.9) al cuerpo libre de fluido comprendido entre las secciones 1 y 4 y la superficie límite de la estela, la única fuerza $F$ que actúa sobre el fluido en la dirección del movimiento es la originada por la hélice, ya que en la superficie exterior del cuerpo libre la presión es la misma en todos los puntos. Por consiguiente:

$$F = \rho Q(V_4 - V_1) = (p_3 - p_2)A \qquad (3.12.1)$$

siendo $A$ el área barrida por las aspas de la hélice. La fuerza sobre la hélice debe ser igual y opuesta a la ejercida sobre el fluido. Sustituyendo $Q = AV$ y simplificando,

$$\rho V(V_4 - V_1) = p_3 - p_2 \qquad (3.12.2)$$

La ecuación de Bernoulli para las secciones 1 y 2 y para las secciones 3 y 4 es

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \qquad p_3 + \tfrac{1}{2}\rho V^2 = p_4 + \tfrac{1}{2}\rho V_4^2$$

ya que $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$. Despejando $p_3 - p_2$, con $p_1 = p_4$,

$$p_3 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho(V_4^2 - V_1^2) \qquad (3.12.3)$$



Eliminando $p_3 - p_2$ entre las Ecs. (3.12.2) y (3.12.3),

$$V = \frac{V_1 + V_4}{2} \qquad (3.12.4)$$

que demuestra que la velocidad a través de la hélice es la media de las velocidades aguas arriba y aguas abajo de ella.

El trabajo útil realizado en la unidad de tiempo por la hélice o potencia desarrollada por la hélice al moverse en el fluido en reposo, es el producto de su empuje por la velocidad, es decir,

$$\text{Potencia desarrollada} = FV_1 = \rho Q(V_4 - V_1)V_1 \qquad (3.12.5)$$

La potencia gastada es la necesaria para aumentar la velocidad del fluido desde $V_1$ hasta $V_4$ que es también igual a la suma de la potencia desarrollada más la energía cinética que en la unidad de tiempo se pierde en la estela.

$$\text{Potencia gastada} = \rho \frac{Q}{2}(V_4^2 - V_1^2) = \rho Q(V_4 - V_1)V_1 + \rho \frac{Q}{2}(V_4 - V_1)^2 \qquad (3.12.6)$$

Dividiendo las Ecs. (3.12.5) y (3.12.6) se obtiene el rendimiento teórico $e_t$,

$$e_t = \frac{2V_1}{V_4 + V_1} = \frac{V_1}{V} \qquad (3.12.7)$$

Si $\Delta V = V_4 - V_1$ es el aumento de velocidad en la estela, sustituyendo en la Ec. (3.12.7), resulta

$$e_t = \frac{V_1}{V_1 + \Delta V/2} \qquad (3.12.8)$$

que demuestra que el máximo rendimiento se obtiene con una hélice que aumente la velocidad de la estela lo menos posible, o con la que hace que $\Delta V/V_1$ sea mínimo.

Debido a los efectos de la compresibilidad, el rendimiento de una hélice de avión disminuye rápidamente cuando la velocidad supera los 650 km/hora. Las hélices de aviones tienen un rendimiento, en condiciones óptimas, menor que el teórico que es aproximadamente del 85 por 100. Las hélices de barcos tienen rendimientos menores, alrededor del 60 por 100, debido a la limitación del diámetro.

El molino de viento se puede estudiar aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento. Su chorro tiene una velocidad pequeña y su estela un diámetro grande.

*Ejemplo 3.15* Un avión vuela a 400 km/hora a través del aire en reposo, $\gamma$ = 1,222 kg/m³, pasando un caudal de 1.000 m³/seg a través de sus dos hélices de 2 m de diámetro. Determinar (*a*) el rendimiento teórico, (*b*) el empuje, (*c*) la diferencia de presiones en las dos caras de las palas y (*d*) la potencia teórica necesaria.

(*a*) $V_1 = \dfrac{400 \times 10^3}{60 \times 60} = 111$ m/seg $\qquad V = \dfrac{500}{\pi 2^2/4} = 159$ m/seg

De la Ec. (3.12.7)

$$e_t = \frac{V_1}{V} = \frac{111}{159} = 0{,}70 = 70 \text{ por } 100$$

(*b*) De la Ec. (3.12.4)

$$V_4 = 2V - V_1 = 2 \times 159 - 111 = 207 \text{ m/seg}$$

El empuje de ambas hélices es, según la Ec. (3.12.1),

$$F = \frac{1{,}222}{9{,}8} \times 1000(207 - 111) = 11.980 \text{ kg}$$

(*c*) La diferencia de presiones es, según la Ec. (3.12.2),

$$p_3 - p_2 = \frac{1{,}222}{9{,}8}\,159(207 - 111) = 1.902 \text{ kg/m}^2$$

(*d*) La potencia teórica en caballos de vapor es

$$\frac{FV_1}{75e_t} = \frac{11.980 \times 111}{75 \times 0{,}70} = 25.300 \text{ CV}$$

*Propulsión a chorro*

El propulsor a hélice se puede considerar como una forma de la propulsión a chorro, en la que la hélice crea un chorro y por esto se ejerce un empuje sobre la hélice, que es la fuerza de propulsión. En los motores a chorro propiamente dichos, el aire (inicialmente en reposo) entra en el aparato y quema una pequeña cantidad de combustible; los gases resultantes de la combustión se lanzan con una velocidad mucho más alta que en la estela de las hélices. En lo que atañe únicamente a la energía mecánica, el rendimiento teórico viene dado por el cociente del trabajo útil por el trabajo consumido, o bien por el cociente del trabajo útil por la suma del trabajo útil y de la energía cinética que por unidad de tiempo se pierde en el chorro. Si se desprecia la masa de combustible quemado, la fuerza de propulsión $F$ [Ec. (3.12.1)] es

$$F = \rho Q(V_2 - V_1) = \rho Q V_{abs} \qquad (3.12.9)$$



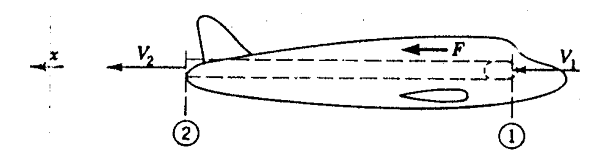



*Fig. 3.29 Paredes de paso del flujo a través de un motor a chorro considerado como parte impenetrable de la superficie de control para el avión cuando se trata como un problema de régimen permanente.*

en la cual $V_{abs}$ (Fig. 3.29) es la velocidad absoluta del fluido en el chorro y $\rho Q$ es el caudal en masa. El trabajo útil por unidad de tiempo es $FV_1$, siendo $V_1$ la velocidad del cuerpo. La energía cinética que por unidad de tiempo pasa al chorro es $\gamma Q\, V_{abs}^2/2g = \rho Q\, V_{abs}^2/2$, pues $\gamma Q$ es el peso descargado por unidad de tiempo y $V_{abs}^2/2g$ es la energía cinética por unidad de peso. Por consiguiente, el rendimiento mecánico teórico es

$$e_t = \frac{\text{potencia útil}}{\text{potencia útil + potencia perdida}} = \frac{FV_1}{FV_1 + \rho Q V_{abs}^2/2}$$

$$= \frac{\rho Q V_{abs} V_1}{\rho Q V_{abs}\, V_1 + \rho Q V_{abs}^2/2} = \frac{1}{1 + V_{abs}/2V_1} \qquad (3.12.10)$$

que tiene la misma expresión que el rendimiento de una hélice. Es obvio que, a igualdad de las restantes condiciones, $V_{abs}/V_1$ debe ser tan pequeño como sea posible. Para una velocidad dada $V_1$, la fuerza de resistencia $F$ está determinada por el cuerpo y el fluido en que se mueve; por tanto, en la Ec. (3.12.9) para que $V_{abs}$ sea muy pequeño debe ser $\rho Q$ muy grande.

Un ejemplo de propulsión a chorro es el sistema representado en la Fig. 3.30 para mover un bote en el agua. Si se necesita una fuerza de 200 kg para moverlo a 15 millas/hora, se puede considerar primeramente el sistema de propulsión a chorro consistente en tomar el agua en la proa

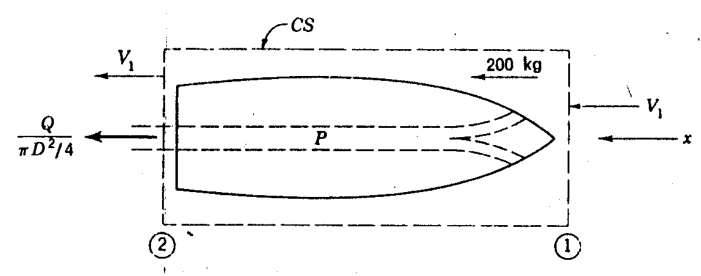



*Fig. 3.30 Flujo de régimen permanente alrededor de un bote.*

y hacerla salir por la popa, accionada por un sistema de bombeo que tiene un rendimiento de 100 por 100. Para analizar el sistema de propulsión se convierte en un problema de régimen permanente superponiendo $-V_1$ al bote y al medio (Fig. 3.30).

Si se utiliza una tubería de 150 mm de diámetro, $V_2 = 4Q/0{,}15^2\pi$. Sustituyendo en la Ec. (3.11.9) para $V_1 = 15$ millas/h $= 6{,}7$ m/seg,

$$200 = \frac{1000}{9{,}8} Q \left( \frac{4Q}{\pi \cdot 0{,}15^2} - 6{,}7 \right)$$

De aquí que $Q = 0{,}255$ m³/seg, $V_{abs} = 7{,}7$ m/seg, y el rendimiento vale

$$e_t = \frac{1}{1 + V_{abs}/2V_1} = \frac{1}{1 + 7{,}7/13{,}4} = 63{,}5 \text{ por } 100$$

La potencia necesaria es

$$\frac{FV_1}{75e_t} = \frac{200 \times 6{,}7}{75 \times 0{,}635} = 28{,}2 \text{ CV}$$

Si el diámetro de la tubería fuese de 200 mm, $V_2 = 4Q/\pi \cdot 0{,}2^2$, y

$$200 = \frac{1000}{9{,}8} Q \left( \frac{4Q}{\pi \cdot 0{,}20^2} - 6{,}7 \right)$$

de donde $Q = 0{,}375$ m³/seg, y también $V_{abs} = 5{,}25$ m/seg, $e_t = 72$ por 100, y la potencia necesaria es 24,8 CV.

El rendimiento se aumentó notablemente al aumentar el diámetro de la tubería y bombear más agua con menor altura de velocidad. El tipo de bomba que mejor se presta para grandes caudales y pequeñas cargas es la bomba de flujo axial. Aumentando el tamaño de la bomba y de la tubería se aumenta el peso y se reduce el espacio útil en el bote; la tendencia lógica es llevar el propulsor debajo o a popa y eliminar así la tubería, con lo que se obtiene la hélice usual de buques. Sin embargo, la propulsión a chorro de un bote con tubería se practica en aguas poco profundas donde el propulsor peligraría al poder chocar con el fondo u otros obstáculos.

Para tener en cuenta el peso del combustible en la propulsión a chorro de un avión, sea $\dot{m}_{air}$ la masa de aire por unidad de tiempo y $r$ la relación entre la masa de combustible quemado y la masa de aire. Entonces (Fig. 3.29), la fuerza de propulsión $F$ es

$$F = \dot{m}_{air}(V_2 - V_1) + r\dot{m}_{air}V_2$$

El segundo término del segundo miembro es la masa de combustible por



unidad de tiempo multiplicada por su cambio en velocidad. Reagrupando términos,

$$F = \dot{m}_{air}[V_2(1 + r) - V_1] \tag{3.12.11}$$

Definiendo de nuevo el rendimiento mecánico teórico como la potencia útil dividida por la suma de la potencia útil y la potencia de origen cinético que queda,

$$e_t = \frac{FV_1}{FV_1 + \dot{m}_{air}(1 + r)(V_2 - V_1)^2/2}$$

Utilizando la Ec. (3.12.11)

$$e_t = \frac{1}{1 + \dfrac{(1 + r)[(V_2/V_1) - 1]^2}{2[(1 + r)(V_2/V_1) - 1]}} \tag{3.12.12}$$

El rendimiento mecánico teórico se hace la unidad si $V_1 = V_2$, cuando los productos de combustión se dejan en reposo y no queda energía cinética en el chorro.

*Ejemplo 3.16* Un aeroplano consume 1 $kg_m$ de combustible por cada 20 $kg_m$ de aire y descarga los gases calientes por el tubo de cola a $V_2 = 1.800$ m/seg. Determinar el rendimiento mecánico teórico para las velocidades de 300 y 150 m/seg del aeroplano.

Para 300 m/seg, $V_2/V_1 = \frac{1.800}{300} = 6$, $r = 0{,}05$. De la Ec. (3.12.12)

$$e_t = \frac{1}{1 + \dfrac{(1 + 0{,}05)(6 - 1)^2}{2[6(1 + 0{,}05) - 1]}} = 0{,}287$$

Para 150 m/seg, $V_2/V_1 = \frac{1.800}{150} = 12$ y

$$e_t = \frac{1}{1 + \dfrac{(1 + 0{,}05)(12 - 1)^2}{2[12(1 + 0{,}05) - 1]}} = 0{,}154$$

*Propulsión a chorro de aviones o misiles*

La propulsión a través del aire o del agua se consigue en cualquier caso por la reacción a que da lugar la formación de un chorro detrás del

cuerpo. A continuación se describen someramente los diversos tipos, a saber: la hélice, el turborreactor, la turbohélice, el estatorreactor y el motor de cohete.

La relación de cantidades de movimiento en el caso de una hélice determina que su rendimiento teórico aumente cuando aumente la velocidad del avión y disminuye la velocidad absoluta de la estela. Cuando la velocidad de las palas se aproxima a la velocidad del sonido, el efecto de la compresibilidad aumenta grandemente la resistencia sobre las palas y, por consiguiente, disminuye el rendimiento del sistema de propulsión.

Un *turborreactor* es un ingenio compuesto de un compresor, una cámara de combustión, una turbina y una tobera. El aire se toma en el frente del aparato y se comprime, luego se le adiciona combustible que se quema con un gran exceso de aire. El aire y los gases de la combustión pasan a continuación a través de una turbina de gas que mueve el compresor. Solo una porción de la energía de los gases calientes se gasta en la turbina, ya que el único medio de propulsión de un turborreactor es la salida de los gases calientes a través de la tobera. El rendimiento total de un turborreactor aumenta con la velocidad del avión. Aunque hay muy poca información disponible sobre sistemas de propulsión cuando la velocidad se aproxima a la del sonido, parece ser que el rendimiento total de un turborreactor y de una hélice son aproximadamente los mismos a la velocidad del sonido.

La *turbohélice* es un sistema de propulsión que combina el empuje de una hélice con el empuje debido a la salida de gases calientes por una tobera. La turbina de gas debe mover a la hélice y al compresor. La relación de los empujes debidos a la hélice y al chorro puede elegirse arbitrariamente por el proyectista.

El *estatorreactor*† es un ingenio de gran velocidad que no tiene ni compresor ni turbina. La presión de ataque del aire obliga a éste a entrar dentro del ingenio donde parte de la energía cinética se convierte en energía de presión por ensanchamiento de la sección del flujo. A continuación entra en una cámara de combustión donde se quema el combustible y por último el aire y los gases de la combustión se lanzan fuera por una tobera. Se trata de un aparato supersónico que requiere una velocidad muy alta para la compresión del aire. El estatorreactor se usó por los alemanes en sus *bombas volantes* V-1. El aire se admite por la ojiva a través de válvulas planas cerradas por resortes. Al quemarse el combustible aumenta la presión, con lo que se cierran las válvulas y los gases calientes salen formando un chorro, y la presión de ataque abre las válvulas repitiéndose el ciclo. El número de ciclos por segundo es aproximadamente de 40. Un ingenio tal debe ser lanzado a gran velocidad para que se inicie el funcionamiento de sus ciclos.

† *N. T.* Otros autores utilizan el nombre de *chorro intermitente*.



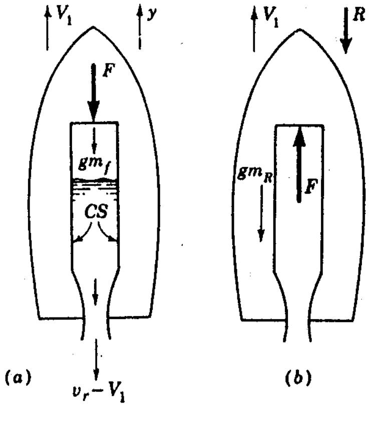



*Fig. 3.31 (a) Cantidad de movimiento no permanente aplicada al volumen de control que comprende el propulsor y los pasos del flujo. (b) Fuerzas sobre el cuerpo del cohete, excluido el propulsor.*

## *Mecánica del cohete*

El motor del cohete lleva consigo un agente oxidante para mezclar con el combustible con lo que desarrolla un empuje que es independiente del medio en que se mueve. Por el contrario, una turbina de gas puede lanzar una masa muchas veces mayor que la masa del combustible que lleva porque toma aire para mezclar con el combustible del exterior.

Como este problema no se puede reducir en general a un problema de flujo permanente por superposición de una velocidad constante, se aplica directamente la ecuación de la cantidad de movimiento no permanente (3.11.4) al volumen de control que comprende el espacio de almacenamiento de combustible y los pasos de flujo (Fig. 3.31*a*) de un cohete que está acelerándose.

$$-F - gm_f = \frac{d}{dt}(m_f V_1) - \dot{m}(v_r - V_1) \qquad (3.12.13)$$

$F$ es la fuerza que ejercen los pasos del cohete sobre el fluido en la dirección $-y$; $m_f$ es la masa del combustible y el oxidante dentro del volumen de control; $\dot{m}$ es la masa por segundo que se expulsa; $v_r$ es la velocidad de salida del gas respecto al cohete; y $V_1$ es la velocidad del cohete. Desarrollando la derivada, teniendo en cuenta que $dm_f/dt = -\dot{m}$,

$$F = -gm_f + \dot{m}v_r - m_f \frac{dV_1}{dt} \qquad (3.12.14)$$

A continuación consideremos el cohete como un cuerpo libre, excluido el combustible; las fuerzas que actúan sobre él son las de la Fig. 3.31*b*,

$$F - R - gm_R = m_R \frac{dV_1}{dt} \qquad (3.12.15)$$

$m_R$ es la masa del cuerpo del cohete, y $R$ es la resistencia debida a la atmósfera (las fuerzas másicas virtuales que se presentan debido a la aceleración del aire que rodea al cohete se desprecian). Combinando las Ecs. (3.12.14) y (3.12.15) y reagrupando términos,

$$\dot{m}v_r - g(m_f + m_R) - R = (m_R + m_f)\frac{dV_1}{dt} \qquad (3.12.16)$$

La masa del propulsor se reduce con el tiempo; para una velocidad de quemado constante $\dot{m}$, $m_f = m_{f_0} - \dot{m}t$, donde $m_{f_0}$ es la masa inicial de combustible y oxidante. La gravedad es función de $y$, y la resistencia del aire depende del número de Reynolds y del número de Mach (Cap. 4), así como de la forma y dimensiones del cohete.

Considerando juntas la masa del cohete y del combustible [Ec. (3.12.16)], el empuje $\dot{m}v_r$ menos el peso y la resistencia del aire es exactamente igual a la masa total multiplicada por su aceleración.

El rendimiento teórico de un cohete (basado en la energía mecánica utilizable) se demuestra que aumenta con la velocidad del cohete. Sea $E$ la energía mecánica utilizable del combustible por unidad de masa. Cuando se quema el combustible, su energía mecánica se convierte en energía cinética; $E = v_r^2/2$, siendo $v_r$ la velocidad del chorro relativa al cohete, o sea $v_r = \sqrt{2E}$. Para la velocidad del cohete $V_1$ referida a ejes fijos en la tierra, la potencia útil desarrollada es $\dot{m}v_rV_1$. La energía cinética utilizada por unidad de tiempo es debida a la pérdida de masa $\dot{m}V_1^2/2$ del propulsor no quemado y al quemado $\dot{m}E$, o sea

Energía mecánica gastada por unidad de tiempo

$$= \dot{m}\left(E + \frac{V_1^2}{2}\right) \qquad (3.12.17)$$

El rendimiento mecánico $e$ es

$$e = \frac{\dot{m}V_1\sqrt{2E}}{\dot{m}(E + V_1^2/2)} = \frac{2v_r/V_1}{1 + (v_r/V_1)^2} \qquad (3.12.18)$$

Derivando $e$ con respecto a $v_r/V_1$ e igualando a cero se obtiene $v_r/V_1 = 1$ para el rendimiento máximo, $e = 1$. En este caso la velocidad absoluta de salida del gas es cero.

Cuando la fuerza propulsora de un cohete es mayor que su peso más la fuerza de resistencia, el cohete se acelera. Su masa se reduce continuamente. Para elevar un cohete desde su rampa de lanzamiento, el empuje $\dot{m}v_r$ debe superar al peso total.

***Ejemplo 3.17*** (*a*) Determinar el tiempo de quemado para un cohete que pesa inicialmente 500.000 kg, del cual el 70 por 100 es el elemento propulsor. Consume combustible a velocidad constante, y su empuje inicial es un 10 por 100 mayor que su peso, $v_r$ = 3.700 m/seg. (*b*) Considerando que $g$ es constante y vale 10 m/seg y que el vuelo es vertical sin resistencia del aire, hallar la velocidad del cohete en el instante que se acaba el quemado, su altura sobre el suelo y la máxima altura que alcanzará.



(*a*) De la relación peso-empuje,

$$\dot{m}v_r = 1{,}1\,W_0 = 550.000 = \dot{m}3.700$$

y $\dot{m}$ = 148,6 UTM/seg. La masa utilizable del propulsor es

$$\frac{0{,}7 \times 500.000}{10} = 35.000 \text{ UTM}$$

Por consiguiente, el tiempo de quemado es

$$\frac{35.000}{148{,}6} = 235 \text{ seg}$$

(*b*) De la Ec. (3.12.16)

$$148{,}6 \times 3.700 = 10(35.000 - 148{,}6t) + 150.000 + \left(35.000 - 148{,}6t + \frac{150.000}{10}\right)\frac{dV_1}{dt}$$

Simplificando,

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{50.000 + 1.486t}{50.000 - 148{,}6t} = -10 + \frac{550.000}{50.000 - 148{,}6t}$$

$$V_1 = -10t - \frac{550.000}{148{,}6}\ln(50.000 - 148{,}6t) + \text{const}$$

Para $t = 0$, $V_1 = 0$, luego

$$V_1 = -10t - \frac{550.000}{148{,}6}\ln\left(1 - \frac{148{,}6t}{50.000}\right) = -10t - 3.700\ln\left(1 - \frac{148{,}6t}{50.000}\right)$$

Para $t$ = 235 seg, $V_1$ = 2.100 m/seg = 7.560 km/h. La altura para $t$ = 235 seg es

$$y = \int_0^{235} V_1\,dt = -10\frac{t^2}{2}\Big]_0^{235} - 3.700\int_0^{235}\ln\left(1 - \frac{148{,}6t}{50.000}\right)dt$$

$$= 149.375 \text{ m} \simeq 149{,}4 \text{ km}$$

El cohete aún ascenderá $V_1^2/2g$ m más arriba después del quemado total, o sea

$$149.375 + \frac{(2.100)^2}{20} = 369.875 \text{ m} \simeq 370 \text{ km}$$

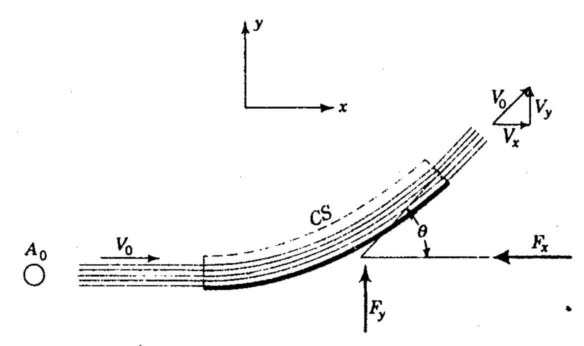



*Fig. 3.32* Chorro libre que incide sobre un álabe liso fijo.

## Alabes fijos y móviles

La teoría de las turbomáquinas se basa en las acciones entre chorro y álabes. La transferencia de energía desde un chorro fluido a unos álabes móviles se estudia como una aplicación del principio de la cantidad de movimiento. Cuando un chorro libre se encuentra con un álabe pulido y curvo, como en la Fig. 3.32, el chorro se desvía, cambia su cantidad de movimiento y ejerce una fuerza sobre el álabe. Se supone que el chorro encuentra al álabe en dirección tangencial, sin choque; y además el rozamiento entre el chorro y el álabe es despreciable. La velocidad se supone que es uniforme en una sección del chorro aguas arriba y abajo del álabe. Como el chorro está en contacto con el aire, existe la misma presión en los dos extremos del álabe. Despreciando la pequeña diferencia de altura de los extremos, la aplicación de la ecuación de Bernoulli demuestra que el módulo de la velocidad es invariable para álabes *fijos*.

*Ejemplo 3.18* Encontrar la fuerza ejercida sobre un álabe fijo cuando un chorro de caudal 50 l/seg a 40 m/seg es desviado 135°.

Refiriéndonos a la Fig. 3.32 y aplicando la Ec. (3.11.9) en las direcciones $x$ e $y$, se encuentra que

$$-F_x = \rho Q(V_0 \cos\theta - V_0)$$
$$F_y = \rho Q V_0 \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto,

$$F_x = -\frac{1000}{9{,}81} \times 50 \times 10^{-3}(40\cos 135^\circ - 40) = 348 \text{ kg}$$

$$F_y = \frac{1000}{9{,}81} \times 50 \times 10^{-3} \times 40 \operatorname{sen} 135^\circ = 144 \text{ kg}$$

Las componentes de la fuerza sobre el álabe fijo son iguales y opuestas a $F_x$ y $F_y$.



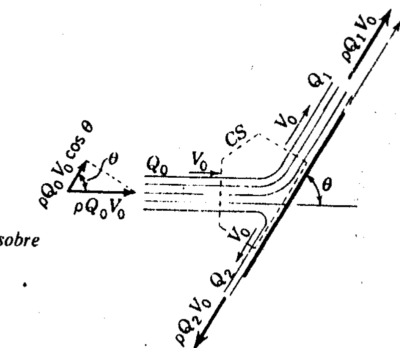



*Fig. 3.33* Chorro bidimensional que incide sobre una superficie plana inclinada fija.

*Ejemplo 3.19* El fluido que sale de una larga ranura choca contra una lámina plana pulida e inclinada como muestra la Fig. 3.33. Determinar la división del flujo y la fuerza ejercida sobre la lámina, despreciando las pérdidas de energía debidas al impacto.

Como no hay cambios de altura ni de presión antes y después del impacto, el módulo de la velocidad de salida es el mismo que el de la velocidad inicial del chorro. La división del caudal en $Q_1$ y $Q_2$ puede calcularse aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección $s$ paralela a la lámina. No se ejerce fuerza alguna sobre el fluido por la lámina en esta dirección; por consiguiente, la componente de la cantidad de movimiento final debe ser igual a la componente de la cantidad de movimiento inicial en la dirección $s$. Escribiendo la ecuación de la cantidad de movimiento de forma que aparezcan dos términos en la expresión de la cantidad de movimiento final,

$$F_s = 0 = \rho Q_1 V_0 - \rho Q_2 V_0 - \rho Q_0 V_0 \cos\theta$$

Después de simplificar,

$$Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos\theta$$

y por la ecuación de continuidad

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Estas dos ecuaciones permiten despejar $Q_1$ y $Q_2$

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1 - \cos\theta)$$

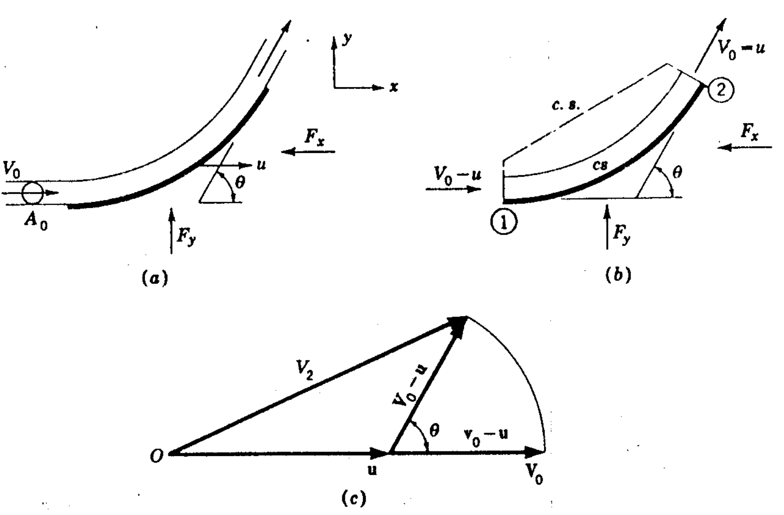



*Fig. 3.34 (a) Alabe móvil. (b) Movimiento del álabe considerado como un problema de régimen permanente por superposición de la velocidad u a la izquierda. (c) Diagrama vectorial polar.*

La fuerza $F$ ejercida sobre la lámina debe ser normal a ella. Escribiendo la componente de la cantidad de movimiento en dirección normal a la lámina,

$$F = \rho Q_0 V_0 \text{ sen } \theta$$

## *Alabes móviles*

Las turbomáquinas utilizan las fuerzas que resultan del movimiento de un fluido sobre álabes móviles. Ningún trabajo se realiza por o sobre un fluido que fluye sobre un álabe fijo. Cuando los álabes pueden desplazarse, el fluido puede realizar trabajo sobre el álabe o éste sobre el fluido. Un álabe móvil está representado en la Fig. 3.34*a* con un chorro dirigido en dirección tangencial a él. Las fuerzas ejercidas sobre el fluido por el álabe se representan mediante $F_x$ y $F_y$. Para analizar el movimiento, se reduce el problema al caso de flujo permanente superponiendo la velocidad $u$ del álabe dirigida hacia la izquierda (Fig. 3.34*b*) sobre el álabe y sobre el fluido. El volumen de control encierra al fluido en contacto con el álabe, con su superficie de control normal al movimiento en las secciones 1 y 2. La Fig. 3.34*c* muestra el *diagrama vectorial polar* para el movimiento a través del álabe. Los vectores de velocidad absoluta tienen de origen $O$, y el vector de velocidad relativa $\mathbf{V}_0 - \mathbf{u}$ está girado un ángulo $\theta$ respecto al álabe. $\mathbf{V}_2$ es la velocidad absoluta final de salida del álabe. La velocidad relativa no varía en su módulo cuando pasa por



el álabe. La masa por unidad de tiempo viene dada por $\rho A_0 v_r$, y no es el caudal en masa que sale por la boquilla en el caso de un álabe único móvil. Si se emplea una *serie de álabes*, colocados frecuentemente en la periferia de una rueda, dispuestos de tal manera que uno u otro desvíe el chorro entero de la boquilla y de manera que la velocidad sea sustancialmente $u$, entonces la masa por segundo es la masa total por segundo que sale.

***Ejemplo 3.20*** Determinar para el álabe único y móvil de la Fig. 3.35*a* las componentes de las fuerzas debidas al chorro de agua y el trabajo realizado sobre el álabe.

La Fig. 3.35*b* es la reducción a régimen permanente con el volumen de control indicado. En la Fig. 3.35*c* se ve el diagrama vectorial polar. La masa por segundo que entra en el volumen de control es

$$\rho A v_r = \frac{1000}{9{,}8}(40 - 20) \times 10 \times 10^{-4} = 2{,}04 \text{ UTM/seg}$$

De la ecuación de las cantidades de movimiento [Ec. (3.11.9)],

$$-F_x = 2{,}04(0{,}30 - 40) = -81 \text{ kg}$$
$$F_y = 2{,}04(3{,}48 - 0) = 7{,}1 \text{ kg}$$

Las componentes de las fuerzas sobre el álabe valen 81 kg en la dirección del eje $+x$ y 7,1 kg en la dirección de $-y$. La potencia obtenida es

$$uF_x = 81 \times 20 = 1620 \text{ kgm/seg}$$

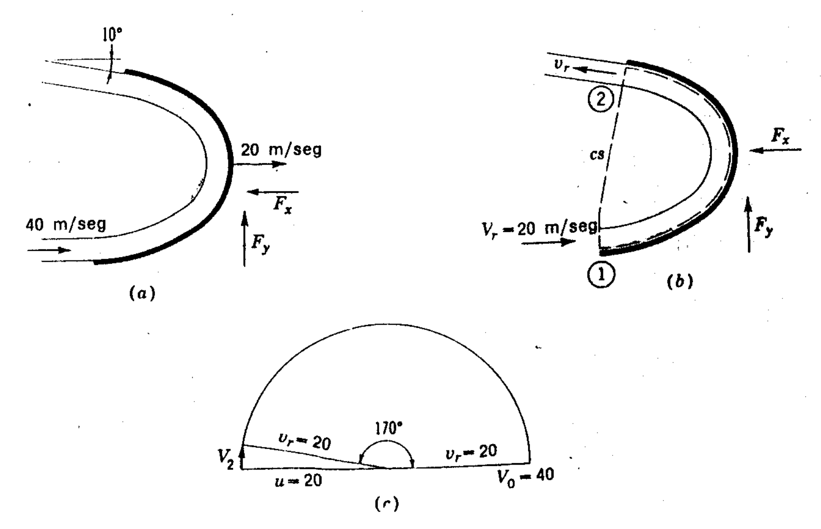



*Fig. 3.35 Chorro que actúa sobre un álabe móvil.*

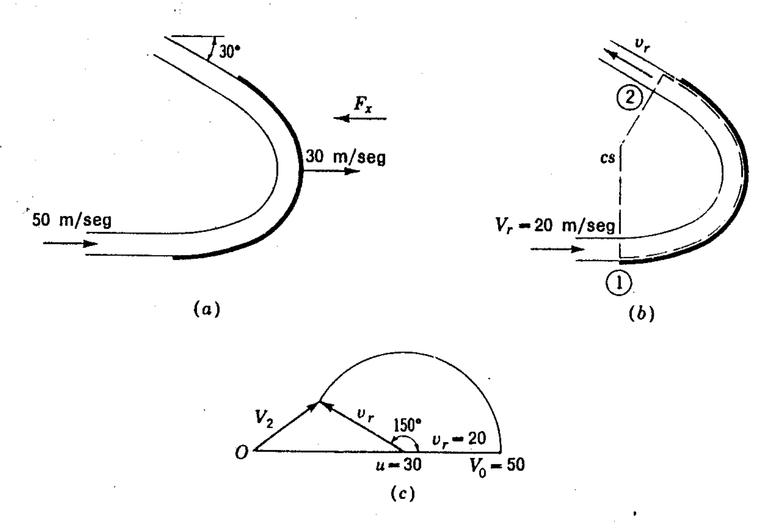



*Fig. 3.36* *Flujo a través de álabes móviles.*

***Ejemplo 3.21*** Determinar la potencia que se obtendría de una serie de álabes, curvados a 150°, que se mueven con velocidad de 30 m/seg bajo la acción de un chorro de 100 l/seg de sección recta de área 20 cm². Trazar el diagrama vectorial y determinar la energía remanente en el chorro.

La velocidad en el chorro es $V_0 = 100 \times 10^{-3}/20 \times 10^{-4} = 50$ m/seg. El diagrama vectorial es el de la Fig. 3.36*a*. La potencia es

$$\text{Potencia} = F_x\, 30 = -\frac{1000}{9{,}8} \times 100 \times 10^{-3}(12{,}68 - 50)30 = 11.400 \text{ kgm/seg}$$

y en caballos de vapor

$$\text{CV} = \frac{11.400}{75} = 152$$

Las componentes de la velocidad absoluta $V_2$ a la salida del álabe es, de la Fig. 3.36*c*,

$$V_{2x} = 30 - 20 \cos 30° = 12{,}68 \text{ m/seg}$$
$$V_{2y} = (50 - 30) \text{ sen } 30° = 10 \text{ m/seg}$$

y la altura de velocidad de salida es

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{12{,}68^2 + 10^2}{19{,}6} = 13{,}25 \text{ kgm/kg} = 13{,}30 \text{ m}$$

La energía cinética remanente en el chorro, en kilográmetros por segundo, es

$$Q\gamma \frac{V_2^2}{2g} = (100 \times 10^{-3}) \times 1000 \times 13{,}30 = 1330 \text{ kgm/seg}$$



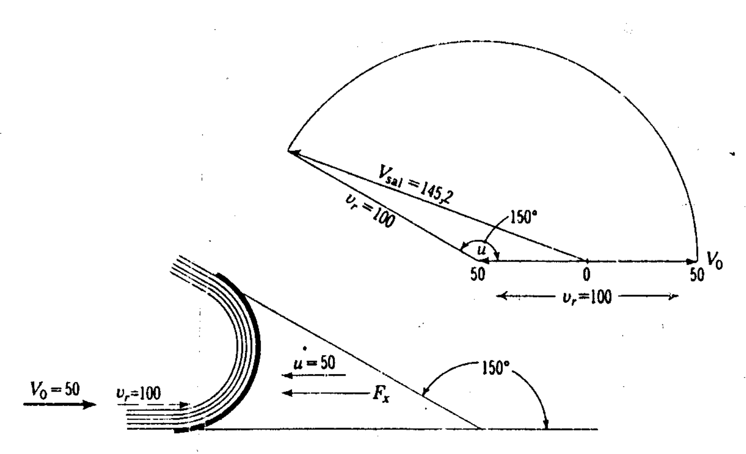



*Fig. 3.37* *Diagrama vectorial para un álabe que realiza trabajo sobre el chorro.*

La energía cinética inicial utilizable era

$$(100 \times 10^{-3}) \times 1000 \times \frac{50^2}{19{,}6} = 12.750 \text{ kgm/seg}$$

que es la suma del trabajo realizado y de la energía remanente por segundo.

Cuando un álabe, o serie de álabes, se mueve hacia un chorro, se realiza un trabajo por el sistema de álabes sobre el chorro, por eso se aumenta la energía del fluido. La Fig. 3.37 ilustra esta situación. La velocidad de salida es 145,2 m/seg como se representa y la velocidad de entrada es de 50 m/seg.

En flujo turbulento, la mayor parte de las veces las pérdidas de energía mecánica deben determinarse experimentalmente o con un modelo geométricamente semejante del sistema. En los dos casos siguientes, por aplicación de las ecuaciones de continuidad, de Bernoulli y de la cantidad de movimiento se pueden evaluar las pérdidas analíticamente.

### *Pérdida de energía mecánica debida al ensanchamiento brusco de una tubería*

La pérdida de energía mecánica debida a la expansión brusca de una tubería puede calcularse con las ecuaciones de Bernoulli y de la cantidad de movimiento. Para un flujo permanente y turbulento de un fluido incompresible que atraviesa el volumen de control entre las secciones 1 y 2 del ensanchamiento brusco de la Fig. 3.38*a*, *b*, la pequeña fuerza cortante ejercida sobre las paredes entre las dos secciones puede despre-

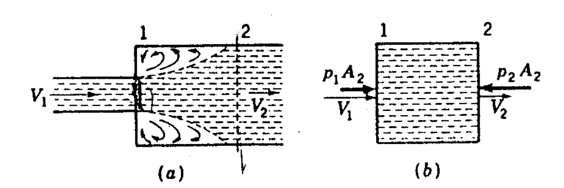



*Fig. 3.38 Expansión brusca en una tubería.*

ciarse. Suponiendo una velocidad uniforme en cada sección, a lo que se aproxima el flujo turbulento, la aplicación de la Ec. (3.11.9) da

$$p_1A_2 - p_2A_2 = \frac{Q\gamma}{g}(V_2 - V_1)$$

En la sección 1 la aceleración radial de las partículas fluidas en el remolino a lo largo de la superficie es pequeña, de forma que puede considerarse una distribución de presiones hidrostática a lo largo de la sección. La ecuación de la energía (3.10.1) aplicada a las secciones 1 y 2, con $h_l$ como término de las pérdidas, es (para $\alpha = 1$)

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_l$$

Despejando $(p_1 - p_2)/\gamma$ en cada ecuación e igualando los resultados,

$$\frac{Q}{A_2 g}(V_2 - V_1) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_l$$

Como $Q/A_2 = V_2$,

$$h_l = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \qquad (3.12.19)$$

que demuestra que la pérdida de energía mecánica en flujo turbulento es proporcional al cuadrado de la velocidad.

### *Resalto hidráulico*

El resalto hidráulico es la segunda aplicación de las ecuaciones fundamentales para determinar las pérdidas de energía mecánica en un caso de flujo turbulento.

En ciertas condiciones una corriente líquida a gran velocidad en un canal abierto disminuye bruscamente la velocidad con una brusca eleva-



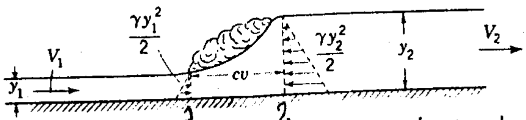



*Fig. 3.39 Resalto hidráulico en un canal rectangular.*

ción de la superficie líquida. Este fenómeno se conoce con el nombre de *resalto hidráulico* y es un ejemplo de flujo permanente no uniforme. En efecto, el chorro líquido a gran velocidad se expansiona (Fig. 3.39) y convierte su energía cinética en energía potencial y térmica. En la superficie inclinada se forma un rodillo que arrastra aire y lo introduce dentro del líquido. La superficie del resalto es muy irregular y turbulenta, la pérdida de energía mecánica es tanto mayor cuanto más alto es el resalto. Para pequeñas alturas, la forma del resalto cambia convirtiéndose en una ola estacionaria (Fig. 3.40). El resalto se estudia más ampliamente en la Sec. 1[illegible]4.

Las relaciones entre las variables de un resalto hidráulico en un canal horizontal rectangular se obtienen fácilmente usando las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía. Para facilitar los cálculos la anchura del canal se toma igual a la unidad, con lo que la ecuación de continuidad se convierte en (Fig. 3.39)

$$V_1 y_1 = V_2 y_2$$

La ecuación de la cantidad de movimiento es

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \frac{V_1 y_1 \gamma}{g}(V_2 - V_1)$$

y la ecuación de la energía (para puntos de la superficie líquida) es

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + h_j$$

siendo $h_j$ la pérdida de energía debida al resalto. Eliminando $V_2$ entre las dos primeras ecuaciones,

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 y_1}{g}} \qquad (3.12.20)$$

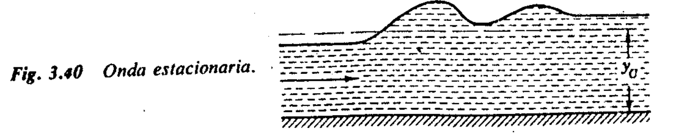



*Fig. 3.40 Onda estacionaria.*

tomando el signo más delante del radical (una $y_2$ negativa carece de significado físico). Las profundidades $y_1$ e $y_2$ se denominan profundidades *conjugadas*. Despejando en la ecuación de la energía $h_j$ y eliminando $V_1$ y $V_2$,

$$h_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \tag{3.12.21}$$

El resalto hidráulico, que es un medio muy efectivo de disipar la energía, se utiliza corrientemente al final de una cascada o en un vertedero para disminuir la energía cinética de la corriente. Es también una efectiva cámara de mezclado a causa de la violenta agitación que tiene lugar en el rodillo. Las medidas experimentales en los resaltos hidráulicos prueban que las ecuaciones anteriores dan el valor de $y_2$ con un error de solamente el 1 por 100. Las razones por las que las ecuaciones del resalto hidráulico no son exactas se deben a despreciar las tensiones de cortadura sobre las paredes y a la distribución no uniforme de velocidades.

*Ejemplo 3.22* Un caudal de 15.000 l/seg por metro de anchura de agua cae por un canal de desagüe de una presa hasta otro canal de solera horizontal. La velocidad es de 15 m/seg. Determinar la profundidad de la cola del agua necesaria para provocar un resalto hidráulico y la potencia disipada en el resalto por metro de anchura.

$$y_1 = \frac{15}{15} = 1{,}00 \text{ m}$$

Sustituyendo en la Ec. (3.12.20),

$$y_2 = -0{,}5 + \sqrt{0{,}5^2 + \frac{2 \times 15^2 \times 1}{9{,}8}} = 6{,}3 \text{ m}$$

Por la Ec. (3.12.21),

$$\text{Pérdida} = \frac{(6{,}3 - 1)^3}{4 \times 1 \times 6{,}3} = 5{,}91 \text{ kgm/kg}$$

o sea,

$$\text{CV/m} = \frac{15 \times 10^3 \times 5{,}91}{75} = 1.182$$

Antes de tratar de las relaciones del momento de la cantidad de movimiento, se considera un ejemplo adicional de la aplicación de la forma no permanente de la ecuación de la cantidad de movimiento.



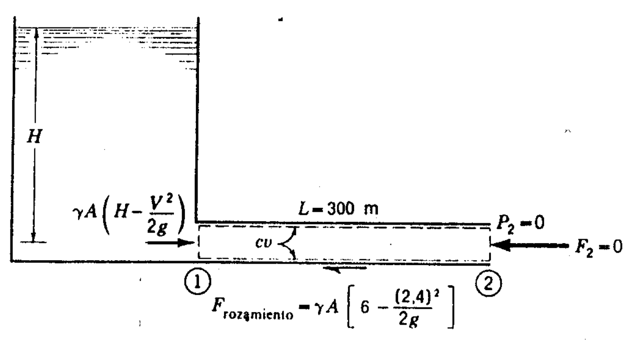



*Fig. 3.41 Aceleración del líquido en una tubería.*

*Ejemplo 3.23* Hallar la altura $H$ en el depósito de la Fig. 3.41 necesaria para acelerar el movimiento del aceite, $S = 0{,}85$, con una aceleración de 0,15 m/seg² cuando el flujo es de 2,4 m/seg. La altura en el caso permanente en la tubería es de 6 m. Despreciar las pérdidas a la entrada.

Se puede considerar que el aceite es incompresible y que se mueve uniformemente en la tubería. Al aplicar la Ec. (3.11.4), el último término es cero, cuando el caudal en masa saliente neto es cero,

$$\gamma A\left(H - \frac{V^2}{2g}\right) - \gamma A\left[6 - \frac{2{,}4^2}{2g}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma}{g}ALV\right)$$

o sea

$$H = 6 + \frac{300}{9{,}81} \times 0{,}15 = 10{,}6 \text{ m}$$

### 3.13 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento

La ecuación general no permanente de la cantidad de movimiento aplicada a un volumen de control se puede obtener de las ecuaciones componentes de la forma de la Ec. (3.11.4),

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \mathbf{v}\, d\mathcal{V} + \int_{cs} \rho \mathbf{v}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} \tag{3.13.1}$$

El momento de una fuerza **F** respecto a un punto $O$ (Fig. 3.42) viene dado por

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

que es el producto vectorial de **F** por el vector de posición **r** de un punto

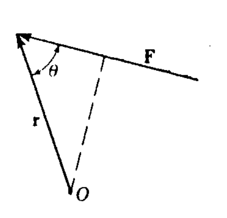



*Fig. 3.42 Notación para el momento de un vector.*

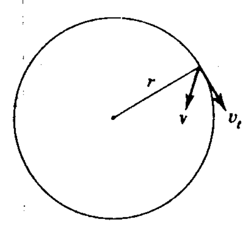



*Fig. 3.43 Notación para un flujo bidimensional.*

sobre la línea de acción del vector desde $O$. El producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular al plano definido por los dos vectores dichos y de módulo

$$Fr \text{ sen } \theta$$

que es el producto de $F$ por la distancia más corta desde $O$ a la línea de acción de **F**. El sentido del vector resultante viene dado por la regla de la mano derecha. En la Fig. 3.42 la fuerza tiende a producir un giro alrededor de $O$ en el sentido opuesto a las agujas del reloj. Si se hiciera girar en ese sentido un tornillo de rosca a derechas, tendería a ir hacia arriba, por tanto el vector estará dirigido de abajo a arriba del papel. Si se giran los dedos de la mano derecha en la dirección de la fuerza que tiende a producir la rotación, el pulgar da el sentido del vector.

Hallando $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ mediante la Ec. (3.13.1),

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d\mathcal{V} + \int_{cs} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{3.13.2}$$

El primer miembro de la ecuación es el par ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control, y los términos del segundo miembro representan la variación respecto al tiempo del *momento de la cantidad de movimiento* dentro del volumen de control más el flujo saliente neto, por unidad de tiempo, del momento de la cantidad de movimiento del volumen de control. Esta es la ecuación general del momento de la cantidad de movimiento para un volumen de control. Tiene gran valor en el análisis de determinados problemas de flujo, por ejemplo, en turbomáquinas, donde tienen más importancia los pares que las fuerzas.

Cuando se aplica la Ec. (3.13.2) a un caso de flujo en el plano $xy$, siendo $r$ la distancia a la componente tangencial de la velocidad $v_t$, como se ve en la Fig. 3.43, y $v_n$ es la componente normal de la velocidad,

$$F_t r = T_z = \int_{cs} \rho r v_t v_n \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho r v_t \, d\mathcal{V} \tag{3.13.3}$$



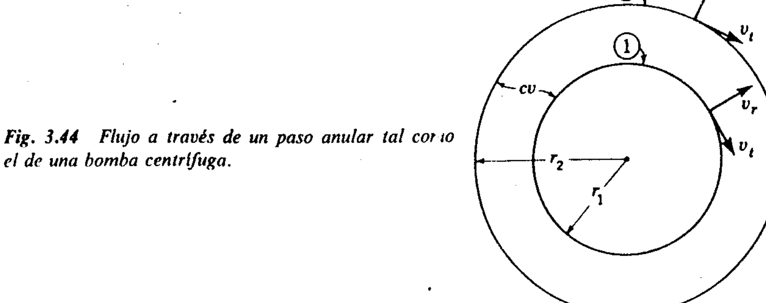



*Fig. 3.44 Flujo a través de un paso anular tal como el de una bomba centrífuga.*

donde $T_z$ es el par. Una forma útil de la Ec. (3.13.3), aplicada a un volumen de control anular, en flujo permanente (Fig. 3.44), es

$$T_z = \int_{A_2} \rho_2 r_2 v_{t_2} v_{n_2} \, dA_2 - \int_{A_1} \rho_1 r_1 v_{t_1} v_{n_1} \, dA_1 \tag{3.13.4}$$

Para simetría circular completa, donde $r$, $\rho$, $v_t$ y $v_n$ son constantes sobre las superficies de control interior y exterior, toma la sencilla forma

$$T_z = \rho Q[(rv_t)_2 - (rv_t)_1] \tag{3.13.5}$$

ya que $\int \rho v_n \, dA = \rho Q$, igual en la interior y en la exterior.

***Ejemplo 3.24*** Se ha de diseñar una turbina que descargue 10,8 m³/seg de manera que se ejerza un par de 1.500 m-kg sobre un rodete que gira a 200 r.p.m. y absorbe todo el momento de la cantidad de movimiento del fluido. En la periferia exterior del rodete $r = 0{,}9$ m. ¿Cuál debe ser la componente tangencial de la velocidad en este lugar?

La Ec. (3.13.5) es

$$T = \rho Q (r v_t)_{en}$$

en este caso, ya que el flujo de salida tiene $v_t = 0$. Despejando $v_{t_{en}}$

$$v_{t_{en}} = \frac{T}{\rho Q r} = \frac{1.500}{\frac{10^3}{9{,}81} \times 10{,}8 \times 0{,}9} = 1{,}51 \text{ m/seg}$$

***Ejemplo 3.25*** El aspersor de la Fig. 3.45 descarga 0,01 m³/seg por cada boquilla. Despreciando el rozamiento hallar la velocidad de giro. El área del orificio de cada boquilla es de 0,001 m².

El fluido que entra en el aspersor no tiene momento de la cantidad de movimiento, y no se ejerce ningún par exteriormente sobre el sistema; por consiguiente,

*Fig. 3.45* Sistema de chorro giratorio.

el momento de la cantidad de movimiento del fluido que sale debe ser cero. Sea $\omega$ la velocidad de rotación; entonces el momento de la cantidad de movimiento que sale es

$$\rho Q_1 r_1 v_{t1} + \rho Q_2 r_2 v_{t2}$$

donde $v_{t1}$ y $v_{t2}$ son velocidades absolutas. Entonces

$$v_{t1} = v_{r1} - \omega r_1 = \frac{Q_1}{0{,}001} - \omega r_1 = 10 - \omega$$

y

$$v_{t2} = v_{r2} - \omega r_2 = 10 - \tfrac{2}{3}\omega$$

Para que sea cero el momento de la cantidad de movimiento

$$\rho Q(r_1 v_{t1} + r_2 v_{t2}) = 0$$

o

$$10 - \omega + \tfrac{2}{3}(10 - \tfrac{2}{3}\omega) = 0$$

y $\omega = 11{,}54$ rad/seg, $N = 110{,}2$ r.p.m.

## Problemas

*3.1* Una tubería conduce agua de un depósito a otro que tiene su superficie de agua 6 m más abajo. Para un caudal de 30 dm³/seg determinar las pérdidas en kgm por UTM y en CV.

*3.2* Una bomba que está colocada 3 m por encima de la superficie de un lago lanza un chorro de agua verticalmente hasta una altura de 15 m. Si el motor eléctrico empleado es de 5 CV y a su máxima potencia bombea 14 l/seg, ¿cuál es el rendimiento del grupo motobomba? ¿Cuál es la irreversibilidad del sistema de bombeo al comparar el punto más alto alcanzado por el chorro y la superficie del lago? ¿Cuál es la irreversibilidad después que el agua ha caído sobre la superficie del lago?

*3.3* Un soplante libera 150 m³/min de aire, $\rho = 0{,}12$ UTM/m³, con un aumento de presión de 10 cm de columna de agua. Su rendimiento es 0,72. Determinar la irreversibilidad de la soplante en kgm por UTM y en CV y el par en el eje si la soplante gira a 1.800 r.p.m.

*3.4* Una distribución tridimensional de velocidades viene dada por $u = -x$, $v = 2y$, $w = 5 - z$. Hallar la ecuación de la línea de corriente que pasa por (2,1,1).

*3.5* Un flujo bidimensional se puede representar mediante $u = -y/b^2$, $v = x/a^2$.



Comprobar que éste es el flujo de un fluido incompresible y que la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una línea de corriente.

*3.6* Por una tubería de transporte circulan en régimen laminar 1.200 l/min (litros por minuto). Medida la irreversibilidad del flujo resultó ser igual a 6 kgm/kg$_m$. ¿Qué pérdida cabe esperar si el caudal se reduce a 800 l/min? ¿Qué pérdidas se obtendrán para un caudal de 1.800 l/min?

*3.7* En el movimiento de un líquido a través de una tubería las pérdidas son 3 CV para una velocidad media de 1,80 m/seg y 6 CV para 2,70 m/seg. ¿Cuál es la naturaleza del flujo?

*3.8* Al triplicar el caudal en una tubería se origina una pérdida 7,64 veces mayor; ¿cómo varían las pérdidas con la velocidad y cuál es la naturaleza del flujo?

*3.9* En flujo bidimensional alrededor de un cilindro circular (Fig. 3.2), el caudal entre líneas de corriente es 0,3 dm³/seg. A gran distancia las líneas de corriente están separadas 5 mm y en un punto próximo al cilindro están separadas 3 mm. Calcular el módulo de la velocidad en esos dos puntos.

*3.10* Una tubería transporta aceite, de densidad relativa 0,86, a $V = 2$ m/seg cuando su diámetro interior es de 20 cm. El diámetro de la tubería en otro tramo es de 25 cm. Determinar la velocidad en este tramo y el caudal en masa, medido en UTM/seg.

*3.11* En una tubería de 5 cm de diámetro fluye hidrógeno con un caudal en masa de 0,02 kg$_m$/seg. En la sección 1 la presión es 3 kg/cm² y $t = 5°$ C. ¿Cuál es la velocidad media?

*3.12* Una boquilla, de 8 cm de diámetro en la base y 3 cm en el otro extremo, desagua 1.200 l/min. Deducir una expresión que dé la variación de la velocidad del fluido a lo largo del eje de la boquilla. Medir la distancia $x$ a lo largo del eje, a partir del plano de mayor diámetro.

*3.13* Una tubería de presión de 5 m de diámetro tiene una velocidad de 3 m/seg. Después de pasar por un reductor de sección el flujo sigue en una tubería de 4,50 m de diámetro. Si las pérdidas varían con el cuadrado de la velocidad, ¿cuánto mayor serán en la tubería de 4,5 m que en la de 5 m por 1.000 m de tubería?

*3.14* ¿Satisface la distribución de velocidad del Prob. 3.4 para flujo incompresible la ecuación de continuidad?

*3.15* ¿Satisface la distribución de velocidad

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}(5x) + \mathbf{j}(5y) + \mathbf{k}(-10z)$$

el principio de conservación de la masa para flujo incompresible?

*3.16* Considerar un cubo de aristas de 30 cm paralelas a los ejes coordenados, situado en el primer cuadrante con un vértice en el origen. Utilizando la distribución de velocidad del Prob. 3,15, hallar el flujo a través de cada cara y demostrar que no se acumula masa en el interior del cubo si el fluido tiene densidad constante.

*3.17* Hallar el flujo (por metro en la dirección $z$) a través de cada lado del cuadrado de vértices en (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) debido a

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}(16y - 12x) + \mathbf{j}(12y - 9x)$$

y demostrar que se satisface la continuidad.

*3.18* Demostrar que la velocidad

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}\frac{4x}{x^2 + y^2} + \mathbf{j}\frac{4y}{x^2 + y^2}$$

satisface la continuidad en todo punto excepto el origen.

*3.19* El Prob. 3.18 es una distribución de velocidad que es radial en todas partes desde el origen y con módulo $v_r = 4/r$. Demostrar que el caudal a través de cada círculo concéntrico con el origen (por metro en la dirección $z$) es el mismo.

*3.20* Efectuar la operación $\nabla \cdot \mathbf{q}$ con los vectores de velocidad de los Problemas 3.15, 3.17 y 3.18.

*3.21* Introduciendo las relaciones siguientes entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares planas, obtener una forma de la ecuación de continuidad en estas últimas coordenadas:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$u = v_r \cos\theta - v_\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$v = v_r \operatorname{sen}\theta + v_\theta \cos\theta$$

¿Satisface la ecuación deducida la velocidad del Problema 3.19?

*3.22* Una tubería vertical de 6 m de diámetro y 15 m de altura está llena de agua. ¿Qué energía potencial tiene el agua si el plano de referencia de cotas se toma 3 m por debajo de la base inferior de la tubería?

*3.23* ¿Cuánto trabajo se puede obtener del agua del Prob. 3.22 si se utiliza en una turbina de rendimiento el 100 por 100 que descarga en un depósito situado a 10 m debajo de la base de la tubería de alimentación?

*3.24* ¿Cuál es la energía cinética, medida en kilográmetros por segundo, de un flujo de aceite de 800 l/min, densidad relativa 0,80, que desagua a través de una boquilla de 5 cm de diámetro?

*3.25* Despreciando la resistencia del aire, determinar la altura que alcanzará un chorro vertical de agua con velocidad inicial 12 m/seg.

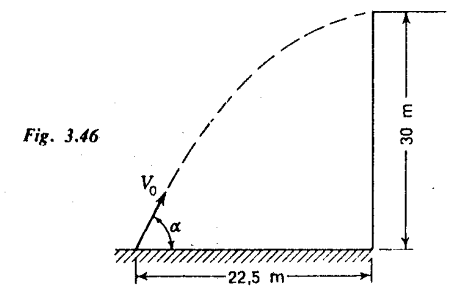



*Fig. 3.46*



*3.26* Si el chorro de agua del Prob. 3.25 forma con la horizontal un ángulo de 45° hacia arriba y se desprecia la resistencia del aire, ¿qué altura alcanzará y cuál será el valor de la velocidad en el punto de mayor flecha?

*3.27* Demostrar que el trabajo que puede hacer un líquido en virtud de su presión es $\int p\, d\mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}$ el volumen del líquido desplazado.

*3.28* ¿Qué ángulo α se requiere para alcanzar el tejado del edificio de la Figura 3.46 con una velocidad $V_0$ en la salida de la boquilla? ¿Cuál es el valor de $V_0$?

*3.29* La distribución de velocidades en flujo laminar de una tubería viene dada por $v = V_{max}[1 - (r/r_0)^2]$. Determinar la velocidad media y el factor de corrección de la energía cinética.

*3.30* Para flujo altamente turbulento la distribución de velocidades en una tubería viene dada por

$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/9}$$

siendo $y$ la distancia a la pared y $r_0$ el radio de la tubería. Determinar el factor de corrección de la energía cinética para este flujo.

*3.31* La distribución de velocidades entre dos placas paralelas separadas una distancia $a$ es

$$u = -10\frac{y}{a} + 20\frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

donde $u$ es la componente de la velocidad paralela a la placa e $y$ se mide normal a la placa inferior y desde ésta. Determinar el caudal en volumen y la velocidad media. ¿Cuál es el régimen de descarga del flujo de energía cinética entre las placas? ¿En qué dirección se desplaza la energía cinética?

*3.32* ¿Cuál es el flujo saliente, por unidad de tiempo, de energía cinética a través de la superficie del cubo dado en el Prob. 3.16 si la distribución de velocidades es la del Problema 3.15?

*3.33* El agua se mueve en un canal como muestra la Fig. 3.47. Despreciando todas las pérdidas, determinar las dos posibles profundidades del flujo $y_1$ e $y_2$.

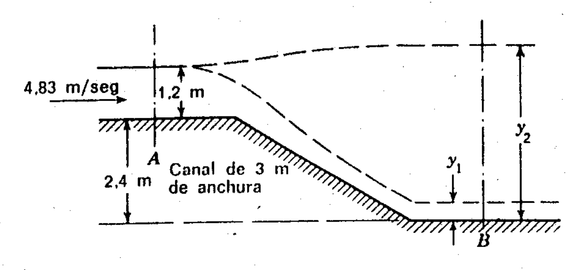



*Fig. 3.47*

*3.34* Una corriente de agua a velocidad elevada fluye hacia arriba por un plano inclinado, como se muestra en la Fig. 3.48. Despreciando todas las pérdidas, calcular las dos profundidades posibles del flujo en la sección $B$

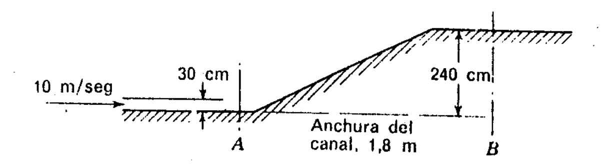



*Fig. 3.48*

***3.35*** Si las pérdidas entre la sección *A* y la sección *B* de la Fig. 3.47 son 0,5 kgm/kg, determinar las dos profundidades posibles en la sección *B*.

***3.36*** En la Fig. 3.48 el flujo es de tal naturaleza que cada kilogramo de agua aumenta su temperatura 0,0006° C, debido a las pérdidas, al pasar de la sección *A* a la *B*. Determinar la profundidad menor de la corriente en la sección *B*.

***3.37*** Despreciando todas las pérdidas, en la Fig. 3.47 el canal se estrecha en la bajada hasta 1,80 m de ancho en la sección *B*. Para flujo uniforme a través de la sección *B*, determinar las dos posibles profundidades del flujo.

***3.38*** En la Fig. 3.48 la anchura del canal cambia de 1,8 m en la sección *A* a 2,4 m en la sección *B*. Determinar las dos profundidades posibles en *B*, si las pérdidas entre las dos secciones *A* y *B* son de 0,3 kgm/kg.

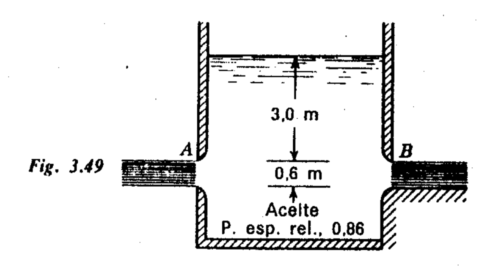



*Fig. 3.49*

***3.39*** Ciertas locomotoras de vapor tenían instalados cucharones que sacaban agua de un tanque situado entre las vías férreas y la elevaban al depósito de agua del ténder. Despreciando todas las pérdidas, ¿qué velocidad se necesita para elevar el agua 3,50 m con un cucharón? (*Nota*: Considerar parada la locomotora y el agua moviéndose hacia ella, para reducir el problema a un caso de flujo permanente.)

***3.40*** En la Fig. 3.49 se descarga aceite por una ranura «bidimensional» *A* en el aire. Por *B* se descarga por debajo de una compuerta sobre una solera. Despreciando todas las pérdidas determinar los caudales desaguados por metro de anchura a través de *A* y de *B*. ¿Por qué son diferentes?

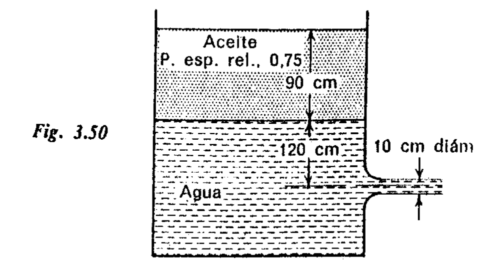



*Fig. 3.50*



***3.41*** En el punto *A* de una tubería que transporta agua el diámetro es 1 m, la presión 0,5 kg/cm y la velocidad 1 m/seg. En el punto *B*, situado 1,80 m más alto que *A*, el diámetro es 0,5 m y la presión 0,1 kg/cm. Determinar la dirección del flujo.

***3.42*** Despreciando las pérdidas, determinar el caudal desaguado en la Fig. 3.50.

***3.43*** Hallar la velocidad en el punto *A* de la Fig. 3.51 para unas pérdidas de 0,1 km/kg. La lectura del barómetro es 738 mm de mercurio.

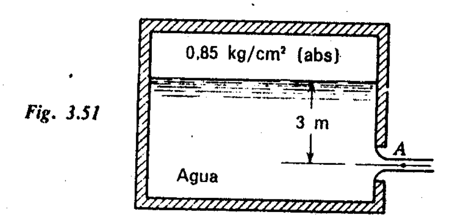



*Fig. 3.51*

***3.44*** Las pérdidas en la Fig. 3.52, para $H = 6$ m, son $3V^2/2g$ kgm/kg. ¿Cuál es el caudal desaguado?

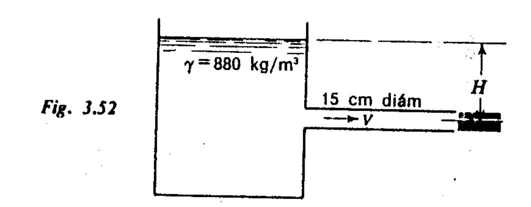



*Fig. 3.52*

***3.45*** En la Fig. 3.52 hay un flujo de 3.000 l/min, determinar *H* para unas pérdidas de $15V^2/2g$ km/kg.

***3.46*** Para un caudal de 6 m³/min y $H = 10$ m en la Fig. 3.52, calcular las pérdidas a través del sistema en alturas de velocidad, $KV^2/2g$.

***3.47*** En la Fig. 3.53 las pérdidas hasta la sección *A* son $4V_1^2/2g$ y las pérdidas en la tobera $0{,}05V_2^2/2g$. Determinar el caudal y la presión en *A*. $H = 7$ m.

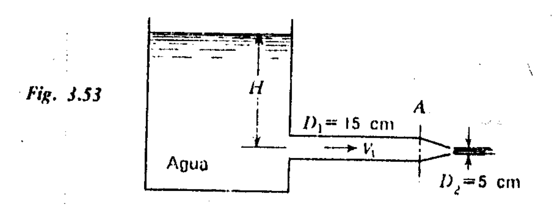



*Fig. 3.53*

***3.48*** Para una presión en *A* de 0,3 kg/cm² (man), Fig. 3.53, y las pérdidas dadas en el Prob. 3.47, determinar el caudal y la altura total *H*.

***3.49*** El sistema de bombeo de la Fig. 3.54 debe tener una presión de 0,4 kg/cm$^2$ en la línea de descarga cuando la cavitación es incipiente en la entrada de la bomba.

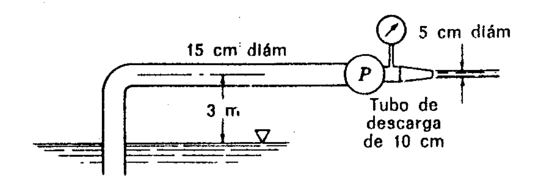



*Fig. 3.54*

Calcular la longitud de la tubería desde el depósito a la bomba para esta condición de operación si las pérdidas en esta tubería se pueden expresar mediante $V_1^2/2g$ (0,03) $L/D$. ¿Qué potencia se suministra al fluido por la bomba? ¿Qué tanto por ciento de esta potencia se utiliza para compensar las pérdidas?

***3.50*** Despreciando las pérdidas y el efecto de la tensión superficial, deducir la ecuación de la superficie exterior del chorro de agua de la Fig. 3.55, que relacione $r$ con $y/H$.

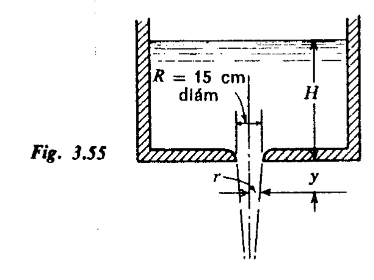



*Fig. 3.55*

***3.51*** En el sifón de la Fig. 3.56, $h_1$ = 1 m, $h_2$ = 3 m, $D_1$ = 3 m, $D_2$ = 4 m y las pérdidas son $1{,}6V_2^2/2g$, con el 10 por 100 de ellas antes de la sección 1. Hallar el caudal y la presión en la sección 1.

***3.52*** Determinar la presión en $A$ del Prob. 3.51, si $A$ es un punto de estancamiento (velocidad cero).

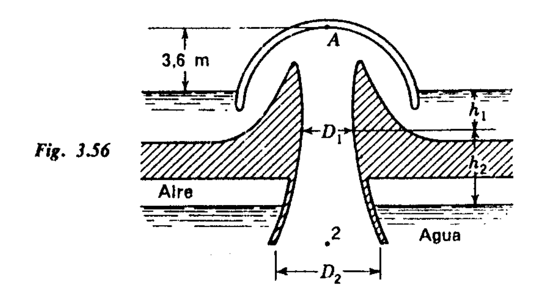



*Fig. 3.56*



***3.53*** El sifón de la Fig. 3.18 tiene una boquilla de 15 cm de longitud acoplada en la sección 3, que reduce el diámetro a 15 cm. No habiendo pérdidas, calcular el caudal y la presión en las secciones 2 y 3.

***3.54*** Para una velocidad de salida $V_E$ en el Prob. 3.53 y pérdidas entre 1 y 2 de $1{,}7V_2^2/2g$, entre 2 y 3 de $0{,}9V_2^2/2g$ y en la boquilla de $0{,}06V_E^2/2g$, calcular el caudal desaguado y la presión en las secciones 2 y 3.

***3.55*** Determinar la potencia en el eje para una bomba de rendimiento 0,8 que descarga 28 l/seg a través del sistema de la Fig. 3.57. Las pérdidas del sistema, excepto las de la bomba, son $10V^2/2g$ y $H$ = 15 m.

***3.56*** La potencia $(Q\gamma H_p/75)$ comunicada al fluido por la bomba de la Fig. 3.57 es de 10 CV. Para $H$ = 20 m y unas pérdidas en el sistema de $8V^2/2g$, determinar el caudal desaguado y la altura de agua de la bomba $H_p$.

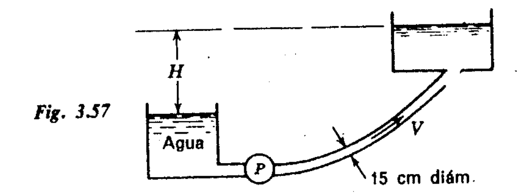



*Fig. 3.57*

***3.57*** Si el rendimiento global del sistema y la turbina de la Fig. 3.58 es 0,8, ¿qué potencia se produce para $H$ = 60 m y $Q$ = 30 m$^3$/seg?

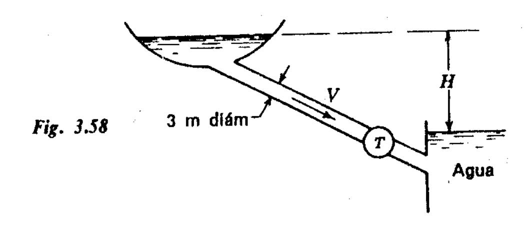



*Fig. 3.58*

***3.58*** Las pérdidas a través del sistema de la Fig. 3.58 son $4V^2/2g$, excluida la turbina. El rendimiento de la turbina es del 90 por 100 y gira a 240 r.p.m. Determinar el caudal y el par transmitido al eje de la turbina, para producir 1.000 CV, siendo $H$ = 100 m.

***3.59*** Despreciando las pérdidas, hallar el caudal a través del venturímetro de la Figura 3.59.

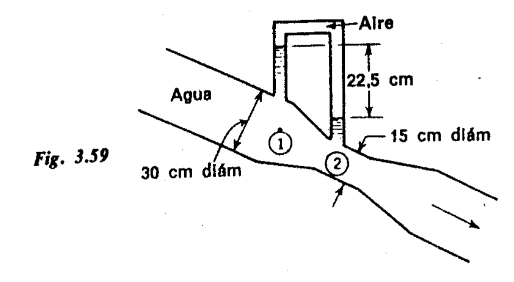



*Fig. 3.59*

*3.60* Para la instalación de venturímetro y manómetro de la Fig. 3.60 deducir una expresión que relacione el caudal con la lectura del manómetro.

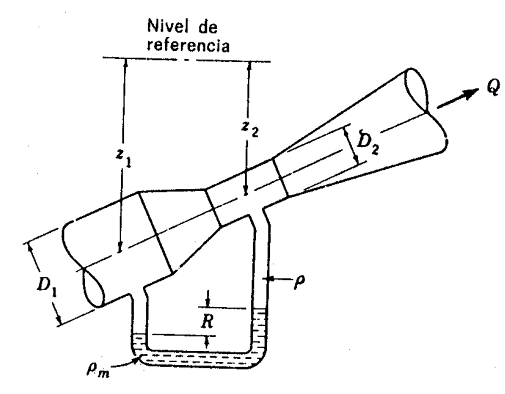



*Fig. 3.60*

*3.61* Con unas pérdidas de $0{,}2V_1^2/2g$ entre las secciones 1 y 2 de la Fig. 3.59, calcular el flujo en litros por minuto.

*3.62* En la Fig. 3.61 determinar $V$ para $R = 30$ cm.

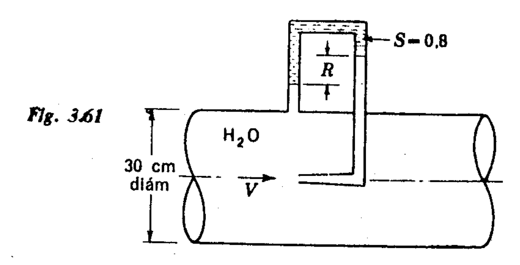



*Fig. 3.61*

*3.63* En la Fig. 3.62 $H = 6$ m y $h = 5{,}88$ m. Calcular el caudal y las pérdidas en km/kg y en CV.

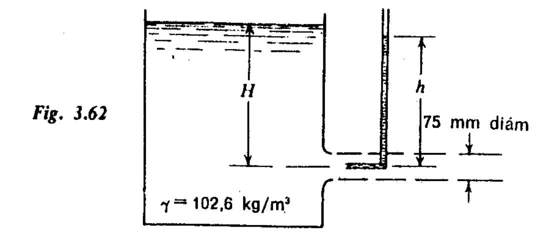



*Fig. 3.62*



*3.64* Despreciando las pérdidas calcular $H$ en función de $R$ para la Figura 3.63.

*3.65* Para pérdidas de valor $0{,}1H$ en la boquilla de la Fig. 3.63, ¿cuál es la diferencia manométrica $R$ en función de $H$?

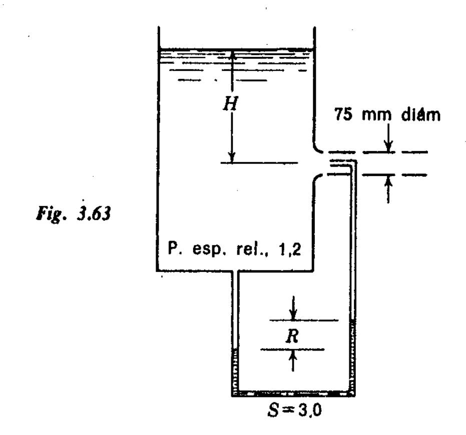



*Fig. 3.63*

*3.66* Un líquido circula por una larga tubería de transporte con unas pérdidas de 4 kgm/kg por 100 m de tubería. ¿Cuáles son las pendientes de la línea de alturas piezométricas y de la línea de alturas totales?

*3.67* En la Fig. 3.64 un caudal de 120 l/seg fluye de la sección 1 a la sección 2 con unas pérdidas de $0{,}4(V_1 - V_2)^2/2g$ y $p_1 = 0{,}7\text{kg/cm}^2$. Calcular $p_2$ y trazar las líneas de alturas piezométricas y de alturas totales a través del difusor.

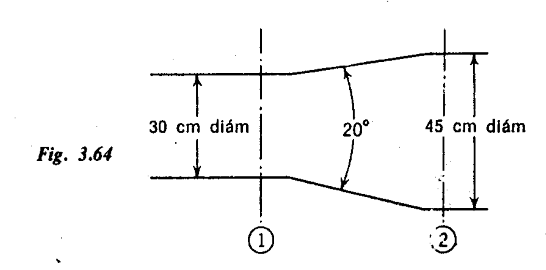



*Fig. 3.64*

*3.68* En un flujo reversible e isotermo que fluye a 100° C, se añaden 0,5 kcal/seg a las 20 UTM/seg que fluyen a través de un volumen de control. Calcular el aumento de entropía en kilográmetros por UTM y por grado Kelvin.

*3.69* En un flujo isotérmico de un fluido real a través de un sistema de tuberías las pérdidas son 60 km/UTM por 100 m y se necesita una transmisión de calor de 0,005 kcal/seg por 100 m para mantener la temperatura en 5° C. ¿Cuál es la variación de entropía $\Delta s$ en km/UTM° K por 100 m del sistema de tuberías para un caudal de 5 $kg_m$/seg?

*3.70* Determinar el factor de corrección de la cantidad de movimiento para la distribución de velocidades del Problema 3.29.

*3.71* Calcular la velocidad media y el factor de corrección de la cantidad de movimiento para la distribución de velocidades siguientes en una tubería

$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n}$$

siendo $y$ la distancia a la pared y $r_0$ el radio de la tubería.

*3.72* Introduciendo $V + v'$ en lugar de $v$ en la Ec. (3.11.11) demostrar que $\beta \geq 1$. El término $v'$ es la variación de $v$ desde la velocidad media $V$ y puede ser positivo o negativo.

*3.73* Determinar el flujo por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento en la dirección $x$ que sale del cubo del Prob. 3.16. (*Sugerencia*: Considerar las seis caras del cubo.)

*3.74* Calcular el flujo por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento que sale en dirección $y$ de la figura descrita en el Prob. 3.17 para la velocidad dada en él.

*3.75* Si la gravedad actuase en la dirección $z$ negativa, determinar la componente $z$ de la fuerza que actúa sobre el fluido del interior del cubo descrito en el Prob. 3.16 para la velocidad especificada en él.

*3.76* Hallar la componente $y$ de la fuerza que actúa sobre el volumen de control dado en el Prob. 3.17 para la velocidad dada en él. Considérese que la gravedad actúa en la dirección $y$ negativa.

*3.77* ¿Qué fuerzas componentes $F_x$, $F_y$ se necesitan para mantener quieta la «caja de distribución» de la Figura 3.65?

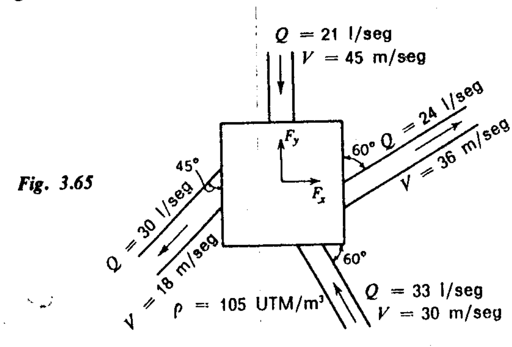



*Fig. 3.65*

*3.78* ¿Cuál es la fuerza $F$ (Fig. 3.66) requerida para mantener en su posición la placa, si el flujo es de aceite de densidad relativa 0,83, y $V_0 = 12$ m/seg?

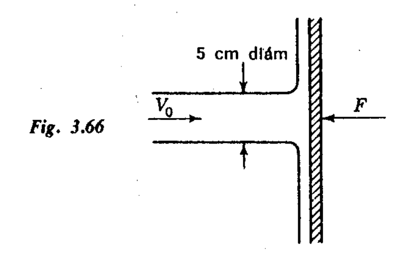



*Fig. 3.66*



*3.79* ¿En cuánto aumenta el peso aparente del depósito lleno de agua (Fig. 3.67) por el flujo del chorro permanente que entra en el depósito?

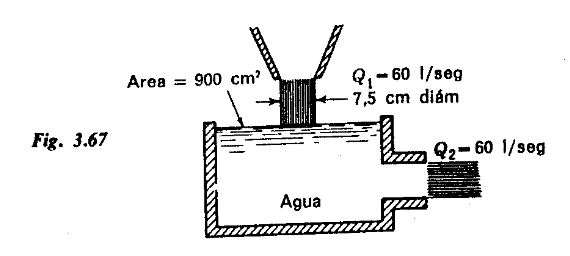



*Fig. 3.67*

*3.80* Una boquilla sobre una manguera de bomberos, ¿coloca la manguera en tracción o compresión?

*3.81* Cuando se emplea un chorro de una tobera para ayudar en la maniobra a una lancha contra incendios, ¿se puede obtener más fuerza dirigiendo el chorro contra una superficie sólida, tal como un muelle, o dejándolo descargar en el aire?

*3.82* Resolver el Ejemplo 3.14 invirtiendo la dirección del flujo y comparar los resultados.

*3.83* En la unión reductora de la Fig. 3.25, $D_1 = 4$ m, $D_2 = 3$ m, $\theta = -45°$, $Q = 60$ m³/seg, $W = 40.000$ kg, $z = 2,4$ m, $p_2 = 1,4$ kg/cm², $x = 2,8$ m y las pérdidas son despreciables. Hallar las componentes de las fuerzas y la línea de acción de la fuerza que debe resistir el anclaje.

*3.84* A través de una tubería de 50 cm de diámetro que tiene un codo de 90° circulan 600 l/seg de agua. La presión a la entrada del codo es de 7.000 kg/m² (man). Determinar las fuerzas componentes, paralela y normal a la velocidad de aproximación, que se requieren para mantener el codo en su sitio. Despreciar las pérdidas.

*3.85* Aceite de peso específico relativo 0,83 fluye por un codo de tubería de expansión de 90° que pasa de un diámetro de tubería de 45 a 60 cm. La presión a la entrada del codo es de 1,5 kg/cm² y las pérdidas son despreciables. Para un caudal de 40.000 l/min determinar las componentes (paralela y normal y la velocidad de aproximación) de la fuerza necesaria para soportar el codo.

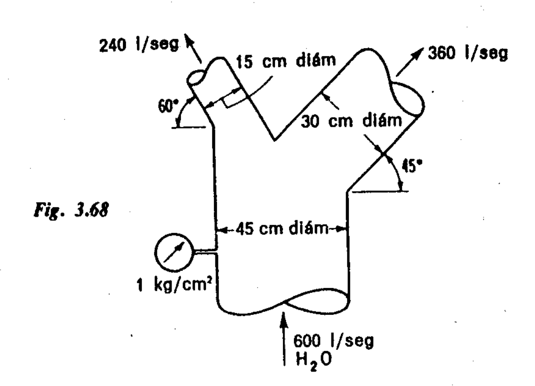



*Fig. 3.68*

*3.86* R[illegible] Prob. 3.85 cuando las pérdidas en el codo vienen dadas por $0{,}6V_1^2/2g$ [illegible]ndo $V_1$ la velocidad de aproximación, y comparar los resultados.

*3.87* Una tubería de vapor de 10 cm de diámetro transporta vapor saturado a la velocidad de 400 m/seg. El vapor arrastra un caudal de agua de 0,15 kg/seg. ¿Qué fuerza se necesita para mantener en su sitio un codo a 90° debido al agua arrastrada?

*3.88* Despreciando las pérdidas, determinar las componentes según $x$ e $y$ de la fuerza necesaria para mantener en su posición la te (Fig. 3.68). El plano de la te es horizontal.

*3.89* Determinar la fuerza neta sobre la compuerta de desagüe de la Fig. 3.69. Se despreciarán las pérdidas, teniendo en cuenta que la presión en $A$ y $B$ es la atmosférica; dibujar la distribución de presiones sobre la superficie $AB$. ¿Es una distribución hidrostática? ¿Cómo está relacionada con la fuerza recién calculada?

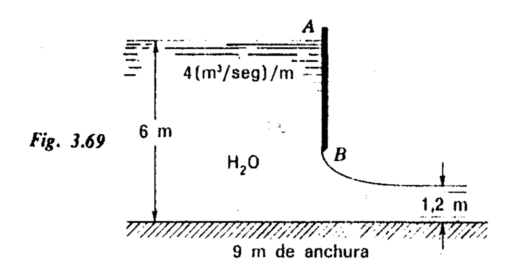


*Fig. 3.69*

*3.90* Por la reducción vertical mostrada en la Fig. 3.70 circula aceite, densidad relativa 0,86, hacia arriba, siendo el caudal de 450 l/seg. La presión manométrica en la sección mayor es de 1,4 kg/cm². Despreciando las pérdidas, pero teniendo en cuenta la gravedad, determinar la fuerza ejercida sobre la contracción.

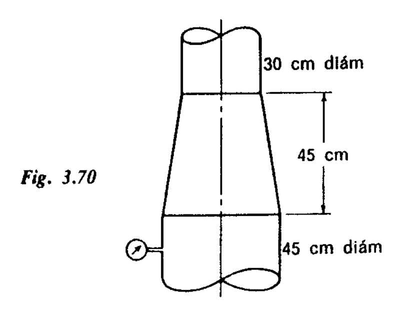


*Fig. 3.70*

*3.91* Aplicar las ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento a un molino de viento como si fuera un propulsor, teniendo en cuenta que la corriente de deslizamiento reduce su velocidad y se expande cuando pasa a través de las aspas. Demostrar que la velocidad a través del plano de las aspas es la media de las velocidades en la corriente de deslizamiento en las secciones aguas arriba y aguas abajo. Definiendo el rendimiento teórico (despreciando las pérdidas) como el cociente entre la potencia obtenida y la potencia útil en un chorro no perturbado que tenga el área en el plano de las aspas, determinar el rendimiento teórico máximo de un molino de viento.



*3.92* Un avión cuya hélice tiene un diámetro de 2,40 m vuela a través de aire en reposo ($\rho$ = 0,115 UTM/m³) a una velocidad de 340 km/h. La velocidad del aire a través de la sección de la hélice es de 450 km/h respecto del avión. Calcular (*a*) el empuje sobre el avión, (*b*) la energía cinética por segundo que queda en la estela, (*c*) la potencia teórica necesaria para mantener el giro de la hélice, (*d*) el rendimiento de la hélice y (*e*) la diferencia de presión a través de las palas de la hélice.

*3.93* Un barco que se mueve a 40 km/h tiene una hélice que descarga 4.800 l/seg a través de sus álabes. Determinar el empuje sobre el barco, el rendimiento teórico del sistema de propulsión y la potencia suministrada a la hélice.

*3.94* La hélice propulsora de un barco tiene un rendimiento teórico del 60 por 100. Si su diámetro es de 1,2 m y el barco navega a 20 nudos, ¿cuál es el empuje desarrollado y cuál la potencia teórica necesaria?

*3.95* Un avión de propulsión a chorro que vuela a 1.000 km/h toma 45 $kg_m$/seg de aire y lo expulsa a 540 m/seg respecto al avión. Despreciando el peso del combustible, ¿qué empuje se produce?

*3.96* Un avión de propulsión a chorro vuela a 1.100 km/h. En el interior del motor penetran 75 $kg_m$/seg de aire, quema 1,4 $kg_m$/seg de combustible y desarrolla un empuje de 3.600 kg. ¿Cuál es la velocidad de eyección de los gases?

*3.97* ¿Cuál es el rendimiento mecánico teórico del motor a chorro del Problema 3.96?

*3.98* Un bote requiere un empuje de 1.800 kg para navegar a una velocidad de 16 nudos. ¿Cuántos metros cúbicos de agua por segundo debe tomar y expulsar por una tubería de 45 cm de diámetro para mantener este movimiento? ¿Cuál es el rendimiento global si el sistema de bombeo tiene un rendimiento del 60 por 100?

*3.99* En el Prob. 3.98, ¿qué caudal se necesitaría si se tomara agua de un depósito del interior del barco y se lanzara desde la popa a través de una tubería de 45 cm de diámetro?

*3.100* Determinar el diámetro de la tubería de eyección y la potencia teórica necesaria para producir un empuje de 900 kg sobre un bote que navega a 12 m/seg, si el rendimiento de la propulsión es del 68 por 100.

*3.101* En la Fig. 3.71, un chorro, $\rho$ = 104 UTM/m³, es desviado 180° por un álabe. Suponer que el carro no tiene rozamiento y es libre de moverse en sentido horizontal. Su peso son 100 kg. Determinar la velocidad y la distancia que ha recorrido el carro 10 seg después de que el chorro se dirigiera contra el álabe. $A_0$ = 0,2 dm², $V_0$ = 30 m/seg.

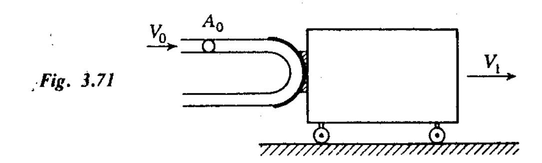


*Fig. 3.71*

*3.102* Un cohete quema 115 $kg_m$/seg de combustible, siendo la velocidad de eyección de los gases con relación al cohete de 1970 m/seg. ¿Cuál será el empuje desarrollado a 2500 km/h y a 5000 km/h?

*3.103* ¿Cuál es el rendimiento mecánico de un cohete que se mueve a 1.200 m/seg y que eyecta los gases a 1.800 m/seg respecto al cohete?

*3.104* ¿Puede un cohete moverse a una velocidad superior a la de eyección de los gases? ¿Qué valor tiene el rendimiento mecánico si su velocidad es de 3.600 m/seg y los gases son expulsados a 2.400 m/seg, respecto del cohete? ¿Se desarrolla un empuje positivo?

*3.105* En el Ejemplo 3.17, ¿cuál es el empuje exactamente antes de que se complete el quemado?

*3.106* Despreciando la resistencia del aire, ¿qué velocidad alcanzará en 68 seg un cohete *V*-2, si parte del reposo en dirección vertical, inicialmente pesa 13.000 kg, quema 125 $kg_m$/seg de combustible y la velocidad de eyección de los gases es $v_r$ = 1920 m/seg? Supóngase $g$ = 9,80 m/seg.

*3.107* ¿Qué altura alcanzará el cohete del Prob. 3.106 en 68 seg?

*3.108* Si el combustible se quema totalmente al cabo de 68 seg (punto de combustión total), ¿cuál es la altura máxima alcanzada por el cohete del Problema 3.106?

*3.109* ¿Cuál es el empuje del cohete del Prob. 3.106 a los 68 seg?

*3.110* Dibujar el diagrama vectorial polar para un álabe, de ángulo $\theta$, que trabaja sobre un chorro. Marcar todos los vectores.

*3.111* Determinar la fuerza resultante que se ejerce sobre el álabe de la Figura 3.32. $A_0$ = 100 cm²; $V_0$ = 30 m/seg; $\theta$ = 60°, $\gamma$ = 880 kg/m³. ¿Cómo se puede determinar la línea de acción?

*3.112* En la Fig. 3.33, el 45 por 100 del flujo es desviado en una de las direcciones. ¿Qué valor tiene el ángulo $\theta$ de la placa?

*3.113* Una placa plana se mueve con velocidad $u$ dentro de un chorro, como indica la Fig. 3.72. Deducir la expresión para la potencia necesaria para mover la placa.

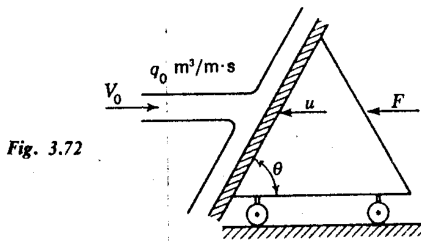



*Fig. 3.72*

*3.114* ¿A qué velocidad $u$ se debería mover el carro de la Fig. 3.72 alejándose del chorro a fin de obtener el trabajo máximo de este chorro?

*3.115* Calcular las componentes $F_x$, $F_y$ de la fuerza necesaria para mantener quieto el álabe de la Fig. 3.73. $Q_0$ = 90 l/seg; $\rho$ = 104 UTM/m³; $V_0$ = 90 m/seg.

*3.116* Si el álabe de la Fig. 3.73 se mueve en la dirección $x$ y una velocidad $u$ = 12 m/seg, y para $Q$ = 60 l/seg, $\rho$ = 102 UTM/m³ y $V_0$ = 50 m/seg, ¿cuáles son las fuerzas componentes $F_x$ y $F_y$?

*3.117* Hallar las componentes de la fuerza para el divisor de flujo de la Fig. 3.23 en las condiciones siguientes: $Q_0$ = 9 l/seg, $Q_1$ = 3 l/seg, $\theta_0$ = 45°, $\theta_1$ = −30°, $\theta_2$ = 120°, $V_0$ = 6 m/seg.

*3.118* Resolver el problema anterior por suma gráfica de vectores.

*3.119* ¿A qué velocidad $u$ se moverá el álabe de la Fig. 3.34 para obtener una potencia máxima del chorro? ¿Cuál sería en ese caso el ángulo $\theta$?

*3.120* Dibujar el diagrama vectorial polar para el álabe móvil de la Fig. 3.34 para $V_0$ = 30 m/seg, $u$ = 18 m/seg y $\theta$ = 160°.



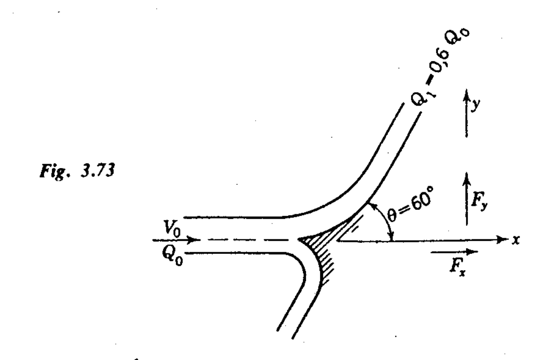



*Fig. 3.73*

*3.121* Dibujar el diagrama vectorial polar para el álabe móvil de la Fig. 3.34 para $V_0$ = 36 m/seg, $u$ = −15 m/seg y $\theta$ = 150°.

*3.122* Cuando fluye agua, ¿cuál es la potencia desarrollada mediante (*a*) un álabe único y (*b*) mediante una serie de álabes (Fig. 3.34) si $A_0$ = 60 cm², $V_0$ = 75 m/seg, $u$ = 25 m/seg y $\theta$ = 173°?

*3.123* Determinar los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ del álabe de la Fig. 3.74 de manera que el flujo entre en el álabe tangente al borde director y salga sin componente $x$ de la velocidad absoluta.

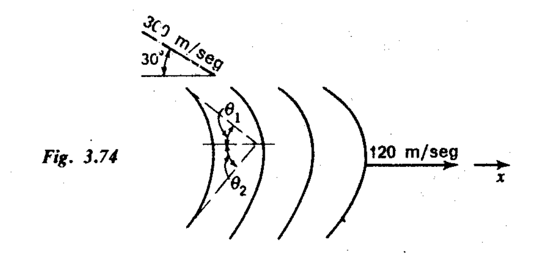



*Fig. 3.74*

*3.124* Determinar el ángulo del álabe requerido para desviar la velocidad absoluta del chorro 120° (Figura 3.75).

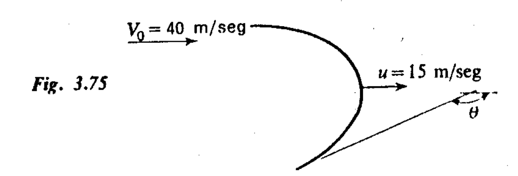



*Fig. 3.75*

*3.125* En el Prob. 3.39 para tomar 30 l/seg de agua a la velocidad de la locomotora de 70 km/h, ¿qué fuerza se ejerce paralela a los raíles?

*3.126* En la Fig. 3.76 se ve un orificio llamado boquilla de Borda. El tubo es lo suficientemente largo para que la velocidad del fluido próximo al fondo del depósito sea aproximadamente cero. Calcular la relación del área del chorro al área del tubo. Despréciese la gravedad.

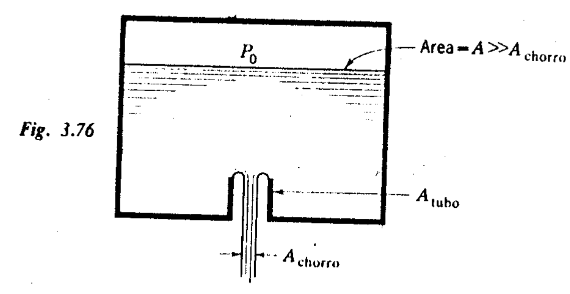


*Fig. 3.76*

***3.127*** Determinar la irreversibilidad en km/kg$_m$ para un flujo de 180 l/seg de un líquido para el que $\rho$ = 80 UTM/m$^3$, a través de una expansión brusca del diámetro de la tubería de 30 a 60 cm $g$ = 9 m/seg.

***3.128*** Por un conducto de 60 cm de diámetro circula aire a una presión absoluta $p$ = 0,7 kg/cm$^2$, $t$ = 5° C y $V$ = 60 m/seg. El conducto sufre un ensanchamiento brusco pasando a tener 75 cm de diámetro. Considerando el gas como incompresible, calcular las pérdidas en kilográmetros por kilogramo fuerza de fluido y la diferencia de presiones en centímetros de agua.

***3.129*** ¿Cuánto valen las pérdidas cuando se descarga un caudal de 5 m$^3$/seg de agua desde una tubería sumergida de diámetro 120 cm en un depósito?

***3.130*** Demostrar que en el caso límite en que $y_1 = y_2$ en la Ec. (3.12.20) se obtiene la relación $V = \sqrt{gy}$.

***3.131*** Se produce un resalto en un canal de 6 m de ancho que lleva 18 m$^3$/seg de agua con una profundidad de 30 cm. Determinar $y_2$, $V_2$ y las pérdidas en km/kg, en CV y en kcal/kg.

***3.132*** Deducir una expresión análoga a la Ec. (3.12.20) para un resalto hidráulico en un canal de sección recta (simétrica respecto a la vertical) igual a un triángulo equilátero.

***3.133*** Deducir la Ec. (3.12.21).

***3.134*** Suponiendo que no existen pérdidas a través de la compuerta de la Figura 3.77 y despreciando $V_0{}^2/2g$, determinar $y_2$ y las pérdidas en el resalto, para $y_0$ = 6 m e $y_1$ = 60 cm. ¿Cuál es la simplificación para despreciar $V_0{}^2/2g$?

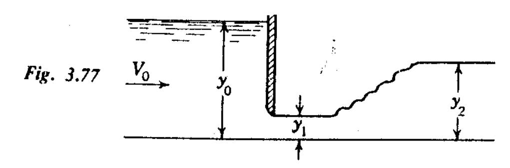


*Fig. 3.77*

***3.135*** Determinar $y_0$ bajo las mismas hipótesis que en el Prob. 3.134 para $y_1$ = 0,50 m e $y_2$ = 1,80 m.

***3.136*** Bajo los mismos supuestos que en el Prob. 3.134, e $y_0$ = 6,60 m e $y_2$ = 2,4 m; determinar el caudal por metro de anchura.

***3.137*** Determinar la elevación del suelo para que se produzca un resalto aguas abajo del aliviadero de la Fig. 3.78 con pérdidas de 2,5 km/kg y caudal por metro de 12 m$^3$/seg.

***3.138*** El agua está fluyendo a través de la tubería de la Fig. 3.79 a una velocidad $V$ = 2,40 m/seg y con unas pérdidas de 3 kgm/kg hasta la sección 1. Calcular



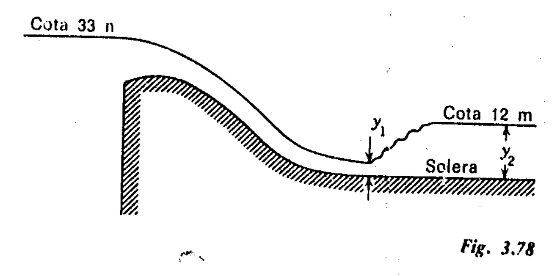


*Fig. 3.78*

la aceleración que sufre el agua de la tubería, cuando se quita la obstrucción del extremo de la misma.

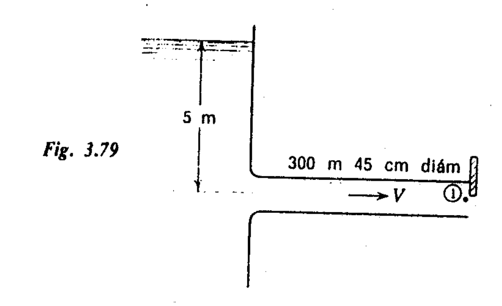


*Fig. 3.79*

***3.139*** El sistema de tuberías de la Fig. 3.80 está lleno de agua. En un instante determinado $p_1$ = 0,7 kg/cm$^2$, $p_2$ = 0, $V_1$ = 3 m/seg y el caudal aumenta en 11.400 l/min cada minuto. Hallar la fuerza $F_x$ necesaria para que el sistema de tuberías se mantenga quieto.

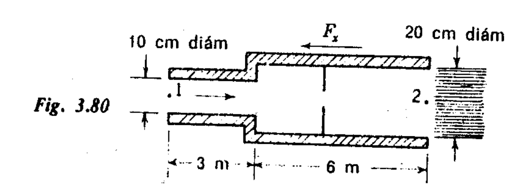


*Fig. 3.80*

***3.140*** Si en la Fig. 3.67 $Q_2$ es igual a 30 l/seg, ¿cuál es el peso aparente del depósito? Se supone que no existe sobreflujo, es decir, el régimen es permanente. El peso del depósito es 10 kg.

***3.141*** En la Fig. 3.44, $r_1$ = 10 cm, $r_2$ = 17,5 cm, $v_{t1}$ = 0 y $v_{t2}$ = 3 m/seg para un impulsor de bomba centrífuga de caudal 18 l/seg de agua. ¿Qué par se debe ejercer sobre el impulsor?

***3.142*** En una bomba centrífuga 1500 l/min de agua abandonan el rodete impulsor de 20 cm de diámetro a una velocidad de componente tangencial igual a 9 m/seg. El agua entra en el impulsor en dirección radial. Si la bomba gira 1200 r.p.m. y se desprecian las pérdidas, determinar el par sobre el eje de la bomba,

la potencia de entrada, a la energía comunicada al flujo en kilográmetros por kilogramo.

***3.143*** Una turbina de agua a 240 r.p.m. da un caudal de 45 m³/seg. Para producir 60.000 CV, ¿cuál debe ser la componente tangencial de la velocidad a la entrada del impulsor en $r = 1{,}8$ m? Cuando el agua abandona la turbina no existen remolinos. Despreciar las pérdidas. ¿Qué salto necesita la turbina?

***3.144*** Por el aparato simétrico de riego de la Fig. 3.81 circulan 50 l/min y carece de rozamiento. Determinar el número de r.p.m. a que gira si el diámetro de salida de la boquilla es de 6 mm.

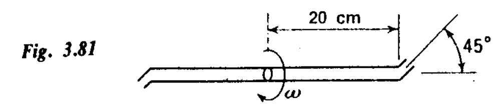


***Fig. 3.81***

***3.145*** ¿Qué par se necesita para mantener quieto el aspersor del Prob. 3.144? Flujo total, 160 l/min de agua.

***3.146*** Si el par resistente sobre el eje del Prob. 3.144 es de 0,07 mkg, ¿cuál es la velocidad de rotación?

***3.147*** Para un par resistente de $0{,}01\omega^2$ en el eje determinar la velocidad de rotación del aspersor del Prob. 3.144.

***3.148*** Un proceso *reversible* exige que

(*a*) no haya intercambio de calor;
(*b*) se satisfaga el principio de Newton de la viscosidad;
(*c*) sean iguales las temperaturas del sistema y del medio ambiente;
(*d*) no haya rozamiento viscoso o de Coulomb en el sistema
(*e*) la transferencia de calor sea solo desde el medio ambiente al sistema.

***3.149*** Un *sistema abierto* implica

(*a*) la presencia de una superficie libre;
(*b*) que se considere una masa específica;
(*c*) el uso de un volumen de control;
(*d*) no hay intercambio entre el sistema y el medio
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.150*** Un *volumen de control* se refiere a

(*a*) una región fija en el espacio;
(*b*) una masa específica;
(*c*) un sistema aislado;
(*d*) solo un proceso reversible;
(*e*) un sistema cerrado.

***3.151*** ¿Qué tres de las siguientes son sinónimas?

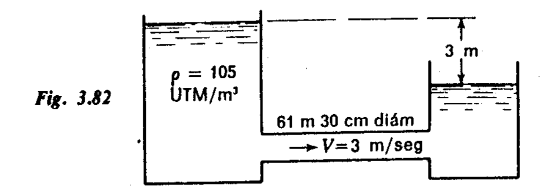
1. pérdidas;
2. irreversibilidades;
3. pérdidas de energía;
4. pérdidas de energía útil;
5. caída en la línea de alturas piezométricas.



(*a*) 1, 2, 3 (*b*) 1, 2, 5 (*c*) 1, 2, 4 (*d*) 2, 3, 4
(*e*) 3, 4, 5

***3.152*** La irreversibilidad del sistema de la Fig. 3.82 es

(*a*) 9,2 CV (*b*) 36,8 CV (*c*) 2,58 m (*d*) 3,52 m
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***Fig. 3.82***



***3.153*** El flujo isoentrópico es

(*a*) irreversible y adiabático;
(*b*) flujo de gas perfecto;
(*c*) flujo de fluido ideal
(*d*) adiabático y reversible;
(*e*) reversible sin rozamiento.

***3.154*** El flujo unidimensional es

(*a*) uniforme y permanente;
(*b*) uniforme;
(*c*) que desprecia los cambios en una dirección transversal;
(*d*) limitado al flujo en línea recta;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.155*** La ecuación de continuidad puede tomar la forma

(*a*) $Q = pAv$ (*b*) $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2$ (*c*) $p_1 A_1 v_1 = p_2 A_2 v_2$
(*d*) $\nabla . \mathbf{p} = 0$ (*e*) $A_1 v_1 = A_2 v_2$

***3.156*** El primer principio de la termodinámica, para flujo permanente,

(*a*) tiene en cuenta toda la energía que entra y sale de un volumen de control;
(*b*) es un balance de energía para una masa específica de fluido;
(*c*) es una expresión de la conservación de la cantidad de movimiento;
(*d*) se refiere principalmente al intercambio de calor;
(*e*) se limita su aplicación a los gases perfectos.

***3.157*** La entropía, para flujo reversible, se define mediante

(*a*) $ds = du + p\, d(1/\rho)$ (*b*) $ds = T\, dq_H$ (*c*) $s = u + pv_s$
(*d*) $ds = dq_H/T$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.158*** La ecuación $d$ (pérdidas) $= T\, ds$ se limita al

(*a*) flujo isoentrópico; (*b*) flujo reversible; (*c*) flujo adiabático;
(*d*) flujo de gas perfecto; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.159** En el flujo turbulento

(*a*) las partículas del fluido se mueven de una manera ordenada;
(*b*) la cohesión es más efectiva que el intercambio de cantidades de movimiento que origina una tensión de cortadura;
(*c*) el intercambio de cantidades de movimiento es solamente a escala molecular;
(*d*) una lámina del fluido se desliza sobre la otra;
(*e*) las tensiones de cortadura son generalmente mayores que en un flujo laminar semejante.

**3.160** La relación $\eta = \tau/(du/dy)$ para flujo turbulento es

(*a*) una propiedad física del fluido;
(*b*) depende únicamente del flujo y de la densidad;
(*c*) la viscosidad dividida por la densidad;
(*d*) una función de la temperatura y de la presión del fluido;
(*e*) independientemente de la naturaleza del flujo.

**3.161** El flujo turbulento generalmente se presenta en aquellos casos en que

(*a*) el fluido es muy viscoso;
(*b*) en pasos muy estrechos o tubos capilares;
(*c*) en movimientos muy lentos;
(*d*) en la combinación de (*a*), (*b*) y (*c*);
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.162** En flujo laminar

(*a*) se necesita recurrir a la experimentación aun en los más sencillos casos;
(*b*) se aplica la ley de Newton de la viscosidad;
(*c*) las partículas fluidas se mueven de forma irregular y siguiendo trayectorias elegidas al azar;
(*d*) la viscosidad no tiene importancia;
(*e*) la relación $\tau/(du/dy)$ depende únicamente de la clase de flujo.

**3.163** Un fluido ideal es

(*a*) muy viscoso;
(*b*) el que obedece a la ley de Newton de la viscosidad;
(*c*) una hipótesis útil en los problemas de conducción de fluidos;
(*d*) sin rozamiento e incompresible;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.164** ¿Cuál de las siguientes debe cumplirse para el flujo de cualquier fluido real o ideal?

1. La ley de Newton de la viscosidad.
2. El segundo principio del movimiento de Newton.
3. La ecuación de continuidad.
4. $\tau = (\mu + \eta)\, du/dy$.
5. La velocidad en los contornos debe ser nula en relación con los contornos.
6. El fluido no puede penetrar los contornos.



(*a*) 1, 2, 3 (*b*) 1, 3, 6 (*c*) 2, 3, 5 (*d*) 2, 3, 6
(*e*) 2, 4, 5

**3.165** El flujo permanente se presenta cuando

(*a*) las condiciones no cambian con el tiempo en ningún punto;
(*b*) las condiciones son las mismas en puntos adyacentes en cualquier instante;
(*c*) las condiciones cambian de manera permanente con el tiempo;
(*d*) $\partial v/\partial t$ es constante;
(*e*) $\partial v/\partial s$ es constante.

**3.166** El flujo uniforme se presenta

(*a*) siempre que el flujo es permanente;
(*b*) cuando $\partial \bar{v}/\partial t$ es en todos los puntos cero;
(*c*) solo cuando el vector velocidad es en todos los puntos constante;
(*d*) cuando $\partial \bar{v}/\partial s$ es constante;
(*e*) cuando el caudal a través de una tubería curvada de sección constante es constante.

**3.167** Seleccionar el ejemplo correcto de flujo permanente y no uniforme:

(*a*) el movimiento del agua alrededor de un barco en un lago;
(*b*) el movimiento del agua de un río alrededor de las pilas de un puente;
(*c*) cuando el caudal crece constantemente en una tubería;
(*d*) cuando el caudal disminuye y la sección se va reduciendo;
(*e*) cuando el caudal es constante en una tubería larga y recta.

**3.168** Una línea de corriente

(*a*) es la línea que une los puntos medios de todas las secciones rectas del flujo;
(*b*) está definida únicamente para un flujo uniforme;
(*c*) es normal al vector velocidad en cada punto;
(*d*) es siempre la trayectoria de la partícula;
(*e*) es fija en el espacio en el caso de flujo permanente.

**3.169** En un flujo bidimensional alrededor de un cilindro las líneas de corriente están separadas 2 cm a una gran distancia del cilindro donde la velocidad es de 100 m/seg. En un punto próximo al cilindro las líneas de corriente están separadas 1,5 cm. La velocidad media allí es

(*a*) 75 m/seg (*b*) 133 m/seg (*c*) 150 m/seg
(*d*) 200 m/seg (*e*) 300 m/seg

**3.170** Un aceite tiene un peso específico relativo de 0,80. Su densidad en UTM/m³ es

(*a*) 40,60 (*b*) 42,00 (*c*) 81,6 (*d*) 101,5 (*e*) 2.610

**3.171** La ecuación de continuidad

(*a*) requiere que el segundo principio del movimiento de Newton se satisfaga en todos los puntos del fluido;
(*b*) expresa la relación entre la energía y el trabajo;

(*c*) establece que la velocidad del fluido en los contornos con relación a los mismos debe ser nula en un fluido real;
(*d*) relaciona la cantidad de movimiento por unidad de volumen para dos puntos de una misma línea de corriente;
(*e*) relaciona el caudal en masa a lo largo de una línea de corriente.

*3.172* El agua tiene una velocidad media de 10 m/seg en una tubería de 200 mm de diámetro. El caudal en $m^3$/seg es

(*a*) 1,256 (*b*) 0,314 (*c*) 0,0314 (*d*) 12,56 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.173* Las hipótesis que sobre el flujo se necesitan hacer para llegar a la ecuación $gz + v^2/2 + \int dp/\rho = \text{const}$ son:

(*a*) permanente, sin rozamiento, incompresible, a lo largo de una línea de corriente;
(*b*) uniforme, sin rozamiento, a lo largo de una línea de corriente, $\rho$ es una función de $p$;
(*c*) permanente, uniforme, incompresible, a lo largo de una línea de corriente;
(*d*) permanente, sin rozamiento, $\rho$ es una función de $p$, a lo largo de una línea de corriente;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.174* Los términos de la ecuación $z + p/\gamma + v^2/2g = C$ tienen las unidades

(*a*) km/seg (*b*) kg (*c*) kgm/UTM (*d*) kgm/$m^3$
(*e*) kgm/kg

*3.175* El trabajo que un líquido es capaz de realizar en virtud de la presión que soporta es, en kgm/kg,

(*a*) $z$ (*b*) $p$ (*c*) $p/\gamma$ (*d*) $v^2/2g$ (*e*) $\sqrt{2gh}$

*3.176* La altura de velocidad es

(*a*) $v^2/2g$ (*b*) $z$ (*c*) $v$ (*d*) $\sqrt{2gh}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.177* El factor de corrección de la energía cinética

(*a*) se aplica a la ecuación de continuidad;
(*b*) tiene las dimensiones de una altura de velocidad;
(*c*) está expresado por $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right) dA$
(*d*) está expresado por $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA$
(*e*) está expresado por $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$



*3.178* El factor de corrección de la energía cinética para la distribución de velocidad dada en la Fig. 1.1 es

(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) $\frac{4}{3}$ (*d*) 2 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.179* Para deducir la ecuación $\Sigma F_x = \rho Q(V_{x_{sal}} - V_{x_{en}})$ se necesitan hacer las siguientes hipótesis:

1. Velocidad constante en las dos secciones extremas.
2. Flujo permanente.
3. Flujo uniforme.
4. Flujo compresible.
5. Fluido sin rozamiento.

(*a*) 1,2 (*b*) 1,5 (*c*) 1,3 (*d*) 3,5 (*e*) 2,4

*3.180* El factor de corrección de la cantidad de movimiento está expresado por

(*a*) $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right) dA$ (*b*) $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA$ (*c*) $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$

(*d*) $\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^4 dA$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.181* El factor de corrección de la cantidad de movimiento para la distribución de velocidades dada por la Fig. 1.1 es

(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) $\frac{4}{3}$ (*d*) 2 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.182* La velocidad en un tercio del área de una sección es nula y es uniforme en los restantes dos tercios del área. El factor de corrección de la cantidad de movimiento es

(*a*) 1 (*b*) $\frac{4}{3}$ (*c*) $\frac{3}{2}$ (*d*) $\frac{9}{4}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.183* El módulo de la fuerza resultante necesaria para mantener en su sitio un codo de 90° y de 150 mm de diámetro cuando no hay movimiento del agua y la presión en el interior es de 6 kg/$cm^2$ es, en kg,

(*a*) 2.120 (*b*) 1.500 (*c*) 1.060 (*d*) 0 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.184* Un codo a 90° de 300 mm de diámetro conduce agua con una velocidad media de 5 m/seg y una presión de $-0{,}2$ kg/$cm^2$. La componente de la fuerza en la dirección de la velocidad de aguas arriba necesaria para mantener el codo en su sitio es, en kg,

(*a*) $-1.810$ (*b*) 1.668,5 (*c*) 141,5 (*d*) 1.951,5
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*3.185* Un codo a 180° de 60 mm de diámetro conduce un líquido de $\rho = 100$

UTM/m³, a 5 m/seg y a una presión igual a la atmosférica. La fuerza que tiende a separar a la unión de la tubería es, en kg,

(*a*) 0 (*b*) 7,21 (*c*) 14,42 (*d*) 72,82 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.186*** El espesor de la pared de una larga tubería de alta presión está determinado por la consideración de

(*a*) la tensión de tracción axial en la tubería;
(*b*) las fuerzas ejercidas por la acción dinámica en las uniones;
(*c*) las fuerzas ejercidas por las acciones estática y dinámica en las uniones;
(*d*) la tensión circunferencial en las paredes de la tubería;
(*e*) las tensiones provocadas por la temperatura.

***3.187*** Seleccionar en la lista que sigue las hipótesis correctas para analizar el flujo de un chorro que es desviado por un álabe fijo o móvil:

1. La cantidad del movimiento del chorro no cambia.
2. La velocidad absoluta no cambia a lo largo del álabe.
3. El fluido fluye sobre el álabe sin choque.
4. El flujo desde la tobera es permanente.
5. El área de la sección del chorro no varía.
6. El rozamiento entre el chorro y el álabe es despreciable.
7. El chorro sale del álabe sin velocidad.
8. La velocidad es uniforme en la sección del chorro antes y después del contacto con el álabe.

(*a*) 1, 3, 4, 6 (*b*) 2, 3, 6, 7 (*c*) 3, 4, 5, 6 (*d*) 3, 4, 6, 8 (*e*) 3, 5, 6, 8

***3.188*** Cuando un chorro de fluido en flujo permanente choca con una superficie plana inclinada,

(*a*) la cantidad de movimiento en la dirección de la velocidad aguas arriba es invariable;
(*b*) ninguna fuerza se ejerce sobre el chorro por el plano;
(*c*) el flujo se divide en partes directamente proporcionales al ángulo de inclinación de la superficie;
(*d*) la velocidad se reduce en la porción del chorro que ha girado más de 90° y aumenta en la otra porción;
(*e*) la componente de la cantidad de movimiento en dirección paralela a la superficie no varía.

***3.189*** Un chorro con velocidad inicial de 25 m/seg en la dirección del eje $+x$ es desviado por un álabe fijo de ángulo 120°. Las componentes de la velocidad a la salida del álabe en dirección normal y paralela a la velocidad de aguas arriba son

(*a*) $v_x = -12{,}5$, $v_y = 21{,}65$ (*b*) $v_x = 25$, $v_y = 0$
(*c*) $v_x = 12{,}5$, $v_y = 12{,}5$ (*d*) $v_x = 12{,}5$, $v_y = 21{,}65$
(*e*) $v_x = -21{,}65$, $v_y = 12{,}5$

***3.190*** Un chorro de aceite, $S = 0{,}80$, incide con un álabe fijo que desvía el chorro 90°, siendo el caudal en masa 0,744 UTM/seg. La velocidad del chorro a la salida del álabe es de 30,5 m/seg. La componente de la fuerza sobre el álabe en la dirección de la velocidad de aguas arriba es, en kg,



(*a*) 32,1 (*b*) 22,7 (*c*) 18,15 (*d*) 16,05 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.191*** Un chorro de agua a velocidad de 36,6 m/seg y de sección recta de área 46,5 cm² fluye dentro de un álabe que se mueve a 12,2 m/seg en la misma dirección del chorro. La masa que por unidad de tiempo cambia su cantidad de movimiento, en UTM/seg, es

(*a*) 5,96 (*b*) 11,5 (*c*) 17,25 (*d*) 23,0 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.192*** Un chorro que tiene una velocidad de 30,50 m/seg fluye dentro de un álabe de ángulo $\theta = 150°$, que tiene una velocidad de 15,25 m/seg en la misma dirección del chorro. Las componentes de la velocidad absoluta final en las direcciones paralela y normal a la velocidad de aproximación son

(*a*) $v_x = 2{,}04$, $v_y = 7{,}62$ (*b*) $v_x = 7{,}32$, $v_y = 13{,}2$
(*c*) $v_x = 11{,}16$, $v_y = 15{,}25$ (*d*) $v_x = 4{,}47$, $v_y = 10{,}78$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.193*** Un álabe se mueve hacia una tobera a velocidad de 30 m/seg, y el chorro que sale de la tobera tiene una velocidad de 40 m/seg. El ángulo del álabe es de $\theta = 90°$. Las componentes de la velocidad absoluta del chorro a la salida del álabe, paralela y normalmente a la dirección del chorro sin perturbar son

(*a*) $v_x = 10$, $v_y = 10$ (*b*) $v_x = -30$, $v_y = 10$
(*c*) $v_x = -30$, $v_y = 40$ (*d*) $v_x = -30$, $v_y = 70$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.194*** Una fuerza de 27,2 kg se ejerce sobre un álabe móvil en la dirección de su movimiento, $u = 16{,}8$ m/seg. La potencia en CV que se obtiene es

(*a*) 0,1 (*b*) 3 (*c*) 5,5 (*d*) 10 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.195*** Una serie de álabes móviles, $u = 20$ m/seg, $\theta = 90°$, intercepta un chorro, $Q = 25$ l/seg, $\rho = 75$ UTM/m³, $V = 40$ m/seg. La potencia sobre los álabes, en km/seg, es

(*a*) 375 (*b*) 400 (*c*) 750 (*d*) 1.500 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.196*** La potencia utilizable en CV en un chorro de agua de sección de área 28,2 cm² y de velocidad 24,46 m/seg es

(*a*) 1,13 (*b*) 36,35 (*c*) 39 (*d*) 72,7 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***3.197*** Un barco se mueve en el agua a velocidad de 9,15 m/seg. La velocidad del agua detrás del barco en la estela de deslizamiento es 6,10 m/seg y el diámetro de la hélice es de 0,915 m. El rendimiento teórico de la hélice es, en tanto por ciento,

(*a*) 0 (*b*) 60 (*c*) 75 (*d*) 86 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.198** El empuje sobre el barco del Prob. 3.197, en kg, es

(*a*) 618 (*b*) 1.857 (*c*) 2.474 (*d*) 3.714 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.199** Un cohete ejerce un empuje horizontal constante de 25 kg sobre un proyectil durante 3 seg. Si el proyectil pesa 4 kg y parte del reposo, su velocidad al final del periodo, despreciando la aceleración de la gravedad y la reducción en peso del cohete es, en m/seg,

(*a*) 61,3 (*b*) 184 (*c*) 10,2 (*d*) 193,8 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.200** ¿Cuál es la reducción en peso del cohete del Prob. 3.199 si el chorro sale a 1.800 m/seg en relación con el cohete?

(*a*) 0,616 (*b*) 0,272 (*c*) 0,136 (*d*) 0,308 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.201** Un tubo de vidrio con un codo a 90° está abierto por ambos extremos. Se mete dentro de una corriente de aceite, $S = 0{,}9$, de tal forma que uno de los extremos está dirigido hacia aguas arriba y el otro está dirigido hacia arriba. El aceite dentro del tubo está 10 cm más alto que la superficie del aceite. La velocidad en m/seg medida por el tubo es

(*a*) 1,55 (*b*) 1,4 (*c*) 1,26 (*d*) 2,26 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.202** La altura manométrica de la Fig. 8.7, $R'$ para $v_1 = 1{,}525$ m/seg, $S = 0{,}08$, $S_0 = 1{,}2$, es, en metros,

(*a*) 0,119 (*b*) 0,238 (*c*) 0,189 (*d*) 0,357 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.203** La velocidad teórica de un aceite, $S = 0{,}75$, que sale por un orificio de un depósito bajo una altura de 3 m, es, en m/seg,

(*a*) 5,42 (*b*) 7,66 (*c*) 12,0 (*d*) indeterminable con los datos dados; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.204** ¿En cuál de los siguientes casos es posible que un fluido fluya desde la baja a la alta presión?

(*a*) en el flujo en una tubería de sección convergente;
(*b*) en el flujo adiabático en una tubería horizontal;
(*c*) en el flujo de un líquido hacia arriba en una tubería vertical;
(*d*) en el flujo del aire hacia abajo en una tubería;
(*e*) imposible en una conducción de sección constante.

**3.205** La pérdida, medida en altura, en flujo turbulento en una tubería

(*a*) varía en razón directa de la velocidad;
(*b*) varía en razón inversa al cuadrado de la velocidad;
(*c*) varía en razón inversa al cuadrado del diámetro;
(*d*) depende únicamente de la orientación de la tubería;
(*e*) varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad.



**3.206** La pérdida debida a una expansión brusca viene dada por

(*a*) $\dfrac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$ (*b*) $\dfrac{V_1 - V_2}{2g}$ (*c*) $\dfrac{V_2^2 - V_1^2}{g}$

(*d*) $\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{g}$ (*e*) $\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$

**3.207** Si se desprecian todas las pérdidas, la presión en el vértice de un sifón

(*a*) es un mínimo para el sifón;
(*b*) depende solamente de la altura del vértice por encima de la superficie del líquido;
(*c*) es independiente de la longitud de la rama descendente;
(*d*) es independiente del caudal a través del sifón;
(*e*) es independiente de la densidad del líquido.

**3.208** La profundidad conjugada para $y = 30{,}5$ cm y $V = 6{,}1$ m/seg es

(*a*) 0,71 m (*b*) 1,37 m (*c*) 1,53 m (*d*) 1,68 m
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.209** La profundidad conjugada para $y = 3{,}05$ m y $V = 6{,}1$ m/seg es

(*a*) 3,27 m (*b*) 3,51 m (*c*) 5,03 m (*d*) 6,56 m
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.210** La profundidad conjugada para $y = 3{,}05$ m y $V = 0{,}3$ m/seg es

(*a*) 0,018 m (*b*) 0,445 m (*c*) 1,542 m (*d*) 3,070 m
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**3.211** La ecuación de continuidad para el flujo de un fluido ideal

(*a*) establece que el caudal en masa de entrada menos el de salida dentro de un pequeño volumen debe ser nulo;
(*b*) establece que la energía es constante a lo largo de una línea de corriente;
(*c*) establece que la energía es constante en cualquier punto del fluido;
(*d*) se aplica solamente al flujo irrotacional;
(*e*) implica la existencia de un potencial de velocidad.

# 4

# Análisis dimensional y semejanza dinámica

Los parámetros adimensionales han prestado una gran ayuda a nuestro conocimiento de los fenómenos del flujo de los fluidos, de una manera análoga al caso de un gato hidráulico, donde la relación de los diámetros de pistón determina la ventaja mecánica, un número sin dimensiones que es independiente del tamaño de conjunto del gato. Ellos permiten aplicar los resultados de experiencias a otros casos con diferentes medidas físicas y a fluidos con propiedades diversas. En este capítulo se introduce el análisis dimensional como un medio para la determinación de los parámetros adimensionales. Los conceptos de semejanza dinámica combinados con la cuidadosa selección y uso de los parámetros adimensionales hacen posible la generalización de los datos experimentales. La consecuencia de dicha generalización es múltiple, ya que se es capaz ahora de representar el fenómeno en su totalidad y no se está limitado a estudiar el experimento particular que se produjo. Por tanto, se pueden efectuar menos experiencias, aunque más selectivas, para descubrir las facetas ocultas del problema y de este modo lograr ahorros importantes en tiempo y dinero, también se pueden presentar los resultados de una investigación a otros ingenieros y científicos de una manera más resumida y fácil de entender para facilitar su uso. Igualmente importante es el hecho de que a través de dichas presentaciones incisivas y ordenadas de la información, los investigadores son capaces de descubrir nuevos caracteres y conceptos no tenidos en cuenta en el problema que se trata. Este avance directo de nuestro entendimiento de un fenómeno se echaría a perder si no se dispusiera de los procedimientos del análisis dimensional. En el capítulo siguiente, en que se estudiarán los efectos de la viscosidad, será muy significativo el número de Reynolds. En el Cap. 6 que trata del flujo compresible, el número de Mach es el parámetro adimensional más importante. En el Cap. 11 que trata de los canales abiertos, el número de Froude tiene la mayor significación.

La mayor parte de los grupos adimensionales se pueden considerar



como una relación de un par de las fuerzas que actúan sobre el fluido, indicando el valor de la relación la importancia de una de las fuerzas respecto a la otra. Si en un estado particular de flujo, algunas fuerzas son mucho mayores que otras pocas, con frecuencia se puede despreciar el efecto de las fuerzas más pequeñas y tratar el fenómeno como si estuviera completamente determinado por las mayores. Esto quiere decir que se pueden emplear los procedimientos matemáticos y experimentales más sencillos, aunque no necesariamente fáciles, para resolver el problema. Para situaciones con varias fuerzas del mismo orden de magnitud, como fuerzas de inercia, viscosas y de gravedad, se necesitan técnicas especiales. Después del estudio de las dimensiones, del análisis dimensional y de los parámetros adimensionales, se estudian la semejanza dinámica y la teoría de modelos.

## *4.1 Homogeneidad dimensional y relaciones adimensionales*

La resolución de los problemas de mecánica de los fluidos que se presentan en los proyectos de ingeniería requieren generalmente desarrollos teóricos y datos experimentales. Agrupando las magnitudes significativas para formar parámetros adimensionales es posible reducir el número de variables que intervienen y estos resultados más concisos (ecuaciones o gráficos de datos experimentales) que sean luego aplicables a otros casos semejantes.

Si se escribiera la ecuación del movimiento de una partícula fluida, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, incluyendo todas las fuerzas que intervienen, tales como el peso, las fuerzas debidas a la presión, a la viscosidad, a la elasticidad y a la tensión superficial, resultaría una ecuación con la suma de todas estas fuerzas igualada a $m\mathbf{a}$, la fuerza de inercia. Como en todas las ecuaciones físicas, en ésta cada término tiene las mismas dimensiones, en este caso las dimensiones de la magnitud fuerza. Dividiendo cada término de la ecuación por uno cualquiera de los términos resultaría una ecuación sin dimensiones. Por ejemplo, al dividir por el término de la fuerza de inercia daría una suma de parámetros adimensionales igualada a la unidad. El valor relativo de un parámetro cualquiera, comparado con la unidad, indicaría su importancia. Si se dividiera la ecuación de la fuerza por un término distinto, por ejemplo el término de la fuerza de la viscosidad, resultaría otro conjunto de parámetros adimensionales. Sin experiencia en el tipo de flujo es difícil determinar qué parámetros serán más útiles.

Un ejemplo del uso del análisis dimensional y sus ventajas se dio al considerar el resalto hidráulico tratado en la Sec. 3.12. La ecuación de la cantidad de movimiento para este caso era

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \frac{V_1 y_1 \gamma}{g}(V_2 - V_1)$$



que se puede escribir de la forma

$$\frac{\gamma}{2} y_1^2 \left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right] = V_1^2 \frac{\gamma}{g} y_1 \left(1 - \frac{y_2}{y_1}\right) \frac{y_1}{y_2}$$

Evidentemente, el segundo miembro representa las fuerzas de inercia y el primer miembro las fuerzas de presión debidas a la gravedad. Estas dos fuerzas tienen el mismo módulo, ya que en esta ecuación una determina a la otra. Además, el término $\gamma y_1^2/2$ tiene las dimensiones de una fuerza, y multiplica a un número adimensional que viene determinado por la geometría del resalto hidráulico.

Si se divide esta ecuación por el término geométrico $(1 - y_2/y_1)$ y se simplifica, se tiene

$$\frac{V_1^2}{g y_1} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right) \tag{4.1.2}$$

Ahora, el primer miembro es la relación de las fuerzas de inercia y gravitatoria, aun cuando la representación explícita de las fuerzas se ha modificado un poco al eliminar términos comunes al numerador y al denominador. Esta relación equivale a un parámetro sin dimensiones llamado número de Froude, que se estudiará con mayor detalle más adelante en este mismo capítulo. Es también interesante notar que esta relación de fuerzas es conocida una vez que se dé la relación $y_2/y_1$, independiente de los valores de $y_2$ e $y_1$. A partir de esta observación se puede obtener una apreciación del mayor alcance de la Ec. (4.1.2) sobre la Ec. (4.1.1) aun cuando una sea solamente una simple reordenación de la otra.

Al escribir la ecuación de la cantidad de movimiento que conduce a la Ec. (4.1.2) solo se han incluido en el enunciado original del problema las fuerzas de gravedad y de inercia. Pero hay otras fuerzas, como las de tensión superficial y viscosidad. Estas se han despreciado al ser pequeñas frente a las de inercia y gravedad; sin embargo, solo la experiencia del fenómeno, o de otro análogo, justificaría dicha simplificación inicial. Por ejemplo, si se ha incluido la viscosidad porque no se estaba seguro de la magnitud de su efecto, la ecuación de la cantidad de movimiento se convertiría en

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} - F_{\text{viscosa}} = V_1 \frac{y_1 \gamma}{g} (V_2 - V_1)$$

resultando

$$\frac{V_1^2}{g y_1} + \frac{F_{\text{viscosa}}\ y_2}{\gamma y_1^2 (y_1 - y_2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right)$$

Este enunciado es más completo que el dado por la Ec. (4.1.2). Sin embargo, los experimentos demostraron que el segundo término del primer miembro es, normalmente, una fracción pequeña del primer término y se puede despreciar al hacer los ensayos iniciales de un resalto hidráulico.



En la última ecuación se puede considerar que la relación $y_2/y_1$ es una variable dependiente que se determina para cada uno de los diversos valores de las relaciones de fuerza, $V_1^2/gy_1$ y $F_{\text{viscosa}}/\gamma y_1^2$, que son las variables independientes. Del estudio anterior parece desprenderse que la última variable solo tiene una influencia pequeña en la determinación de los valores de $y_2/y_1$. Sin embargo, si se observa que las relaciones de las fuerzas, $V_1^2/gy_1$ y $F_{\text{viscosa}}/\gamma y_1^2$, tienen los mismos valores, en dos ensayos distintos, se debe esperar, basándonos en la última ecuación, que los valores de $y_2/y_1$ serían los mismos en las dos situaciones. Si la relación $V_1^2/gy_1$ fuera la misma en los dos ensayos, pero la relación $F_{\text{viscosa}}/\gamma y_1$, que solo tiene una influencia mínima en este caso, no es igual, se puede sacar una conclusión que los valores de $y_2/y_1$ para los dos casos sería casi la misma.

Esta es la clave para la mayor parte de lo que sigue. Porque si se pueden crear en un modelo las mismas relaciones geométricas y de fuerza que se presentan a escala natural, entonces la solución adimensional del modelo será siempre válida para el prototipo. Con frecuencia, como veremos, no es posible que sean iguales todas las relaciones en el modelo y en el prototipo. Entonces se intenta plantear el experimento de manera que las relaciones de las fuerzas dominantes sean lo más próximas a la igualdad posible. Los resultados que se obtienen con dicho empleo de modelos incompletos son a menudo suficientes para representar el fenómeno con el detalle deseado.

La escritura de la ecuación con todas las fuerzas que actúan sobre la partícula puede no ser factible en casos complejos de un determinado flujo fluido y el *análisis dimensional* puede ayudar al planteamiento si se conocen las magnitudes físicas que intervienen.

En un caso dado, algunas de las fuerzas pueden ser de escasa importancia, quedando acaso solo dos o tres fuerzas del mismo orden de magnitud. Con tres fuerzas del mismo orden de magnitud se obtienen dos parámetros adimensionales; un juego de valores experimentales medidos sobre un modelo proporciona una relación entre los parámetros que se conserva para cualquier otro caso semejante.

## 4.2 Dimensiones y unidades

Las dimensiones de mecánica son fuerza, longitud y tiempo, o bien masa, longitud y tiempo. La fuerza está relacionada con la masa, la longitud y el tiempo por el segundo principio del movimiento de Newton,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} \tag{4.2.1}$$

*Tabla 4.1 Dimensiones de las cantidades físicas empleadas en la mecánica de fluidos*

| *Cantidad* | *Símbolo* | *Dimensiones (MLT)* |
|---|---|---|
| Longitud | $l$ | $L$ |
| Tiempo | $t$ | $T$ |
| Masa | $M$ | $M$ |
| Fuerza | $F$ | $MLT^{-2}$ |
| Velocidad | $V$ | $LT^{-1}$ |
| Aceleración | $a$ | $LT^{-2}$ |
| Area | $A$ | $L^2$ |
| Caudal | $Q$ | $L^3T^{-1}$ |
| Presión | $\Delta p$ | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| Gravedad | $g$ | $LT^{-2}$ |
| Densidad | $\rho$ | $ML^{-3}$ |
| Peso específico | $\gamma$ | $ML^{-2}T^{-2}$ |
| Viscosidad dinámica | $\mu$ | $ML^{-1}T^{-1}$ |
| Viscosidad cinemática | $\nu$ | $L^2T^{-1}$ |
| Tensión superficial | $\sigma$ | $MT^{-2}$ |
| Módulo de elasticidad volumétrico | $K$ | $ML^{-1}T^{-2}$ |

En la Sec. 1.2 se estudiaron las unidades de fuerza y masa. Para todos los sistemas físicos, será probablemente necesario introducir dos dimensiones más, una para los efectos electromagnéticos y otra para los efectos térmicos. Para los desarrollos en este texto, no es necesario incluir una unidad térmica, ya que las ecuaciones de estado relacionan la presión, la densidad y la temperatura.

El segundo principio del movimiento puede escribirse dimensionalmente en la forma:

$$F = MLT^{-2} \tag{4.2.2}$$

en la cual $F$ es la dimensión de la fuerza; $M$, la dimensión de la masa; $L$, la dimensión de la longitud, y $T$, la dimensión del tiempo. Cuando tres de las dimensiones son conocidas, la cuarta se determina por la anterior ecuación. Por consiguiente, hay tres dimensiones independientes en mecánica. Un sistema comúnmente utilizado en análisis dimensional es el sistema $M$-, $L$-, $T$-. La Tabla 4.1 es una lista de algunas de las magnitudes que se usan en el flujo de fluidos, junto con sus dimensiones y símbolos.



## 4.3 El teorema de Π

El teorema Π de Buckingham† expresa que en un problema físico en que intervengan $n$ magnitudes en las que hay $m$ dimensiones fundamentales, las $n$ magnitudes pueden agruparse en $n - m$ parámetros adimensionales. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ las magnitudes que intervienen, tales como la presión, viscosidad, velocidad, etc. Si se sabe que todas las magnitudes son esenciales a la solución, entre ellas debe de existir una relación funcional.

† E. Buckingham, Model Experiments and the Form of Empirical Equations, *Trans. ASME*, vol. 37, págs. 263-296, 1915.



$$F(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0 \tag{4.3.1}$$

Si $\Pi_1$, $\Pi_2$, etc., representan los grupos adimensionales de las magnitudes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, entonces si son $m$ las dimensiones independientes que intervienen, se puede formar una ecuación de la forma

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m}) = 0 \tag{4.3.2}$$

La demostración del teorema de Π se encuentra en los escritos de Buckingham. El método de determinación de los parámetros Π consiste en elegir $m$ de las $A$ magnitudes, con diferentes dimensiones, que contengan entre ellas las $m$ dimensiones, y usarlas como variables repetidas todas ellas junto con otra de las $A$ magnitudes para cada Π. Por ejemplo, sean $A_1$, $A_2$, $A_3$, que contienen $M$, $L$ y $T$, no necesariamente en cada una, sino colectivamente. Entonces, el primer parámetro Π se forma así:

$$\Pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4 \tag{4.3.3}$$

el segundo,

$$\Pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5$$

y así sucesivamente, hasta

$$\Pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

En estas ecuaciones los exponentes tienen que determinarse de tal manera que cada Π sea adimensional. Para esto, se sustituyen las dimensiones de las $A$ magnitudes y los exponentes de $M$, $L$ y $T$ se igualan a cero respectivamente. Esto origina tres ecuaciones con tres incógnitas para cada parámetro Π, de tal forma que los exponentes $x$, $y$, $z$ se pueden determinar y, por consiguiente, el parámetro Π.

Si solo intervienen dos dimensiones, entonces dos de las magnitudes $A$ se eligen como variables que se repiten y se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas para cada parámetro Π.

En muchos casos las magnitudes $A$ son tales que los grupos adimensionales son evidentes y se forman sin necesidad de cálculos. El caso más simple es aquel en que dos de las magnitudes tienen la misma dimensión, por ejemplo longitudes, entonces el cociente de estos dos términos es un parámetro Π.

El procedimiento se ilustra con algunos ejemplos.

*Ejemplo 4.1* El caudal a través de un tubo capilar horizontal se cree que depende de la caída de presión por unidad de longitud, del diámetro y de la viscosidad. Encontrar la forma de la ecuación.

Se tabulan las magnitudes y sus dimensiones:

| *Magnitud* | *Símbolo* | *Dimensiones* |
|---|---|---|
| Caudal | $Q$ | $L^3T^{-1}$ |
| Caída de presión/longitud | $\Delta p/l$ | $ML^{-2}T^{-2}$ |
| Diámetro | $D$ | $L$ |
| Viscosidad | $\mu$ | $ML^{-1}T^{-1}$ |

Entonces

$$F\left(Q, \frac{\Delta p}{l}, D, \mu\right) = 0$$

Las magnitudes fundamentales que intervienen son tres, por lo que con las cuatro magnitudes del problema podrá formarse un único monomio $\Pi$:

$$\Pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{y_1} D^{z_1}\mu$$

Sustituyendo las dimensiones

$$\Pi = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1}L^{z_1}ML^{-1}T^{-1} = M^0L^0T^0$$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación. Para $L$, primeramente

$$3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0$$

y de forma semejante para $M$ y $T$

$$y_1 + 1 = 0$$
$$-x_1 - 2y_1 - 1 = 0$$

de las que se deduce $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -4$, por tanto,

$$\Pi = \frac{Q\mu}{D^4\,\Delta p/l}$$

despejando $Q$

$$Q = C\,\frac{\Delta p}{l}\,\frac{D^4}{\mu}$$

El análisis adimensional no nos proporciona información sobre el valor numérico de la constante adimensional $C$. Experimental (o analíticamente) se demuestra que la constante $C$ vale $\pi/128$ [ver la Ec. (5.2.10*a*)].

Para usar el análisis dimensional es necesario conocer las variables que intervienen en el problema. En el último ejemplo, si se hubiese elegido la viscosidad cinemática en lugar de la dinámica, se hubiese obtenido una fórmula incorrecta.



*Ejemplo 4.2* En un canal abierto se coloca un vertedero vertical con una entalla en forma de V de ángulo $\phi$ por la que fluye el líquido represado por el vertedero. El caudal $Q$ es una función de la elevación $H$ de la superficie libre del líquido aguas arriba por encima del vértice de la entalla y depende también de la gravedad y de la velocidad de aproximación del líquido al vertedero $V_0$. Determinar la forma de la ecuación que da el caudal.

La relación funcional

$$F(Q, H, g, V_0, \phi) = 0$$

puede transformarse en otra en la que solo intervienen parámetros adimensionales. $\phi$ es adimensional; por consiguiente, es ya un parámetro $\Pi$. Unicamente existen dos dimensiones $L$ y $T$. Si $g$ y $H$ son las variables que se repiten

$$\Pi_1 = H^{x_1}g^{y_1}Q = L^{x_1}(LT^{-2})^{y_1}L^3T^{-1}$$
$$\Pi_2 = H^{x_2}g^{y_2}V_0 = L^{x_2}(LT^{-2})^{y_2}LT^{-1}$$

Entonces

$$x_1 + y_1 + 3 = 0 \qquad x_2 + y_2 + 1 = 0$$
$$-2y_1 - 1 = 0 \qquad -2y_2 - 1 = 0$$

de donde $x_1 = -\frac{5}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, y

$$\Pi_1 = \frac{Q}{\sqrt{g}\,H^{5/2}} \qquad \Pi_2 = \frac{V_0}{\sqrt{gH}} \qquad \Pi_3 = \phi$$

o sea

$$f\left(\frac{Q}{\sqrt{g}\,H^{5/2}}, \frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right) = 0$$

Esta puede también escribirse

$$\frac{Q}{\sqrt{g}\,H^{5/2}} = f_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right),$$

en las que tanto $f$ como $f_1$ son funciones desconocidas. Despejando $Q$

$$Q = \sqrt{g}\,H^{5/2} f_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right)$$

Para determinar la forma de la función $f_1$ será necesario recurrir al estudio teórico, o bien a la experimentación.

Si $H$ y $V_0$ se toman como variables en lugar de $g$ y $H$,

$$\Pi_1 = H^{x_1}V_0^{y_1}Q = L^{x_1}(LT^{-1})^{y_1}L^3T^{-1}$$
$$\Pi_2 = H^{x_2}V_0^{y_2}g = L^{x_2}(LT^{-1})^{y_2}LT^{-2}$$

y

$$x_1 + y_1 + 3 = 0 \qquad x_2 + y_2 + 1 = 0$$
$$-y_1 - 1 = 0 \qquad -y_2 - 2 = 0$$

de donde $x_1 = -2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_2 = -2$; por consiguiente,

$$\Pi_1 = \frac{Q}{H^2 V_0} \qquad \Pi_2 = \frac{gH}{V_0^2} \qquad \Pi_3 = \phi$$

o

$$f\left(\frac{Q}{H^2 V_0}, \frac{gH}{V_0^2}, \phi\right) = 0$$

Como se pueden invertir los parámetros Π o elevar a cualquier potencia sin que afecte a su carácter adimensional,

$$Q = V_0 H^2 f_2\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right)$$

La función incógnita $f_2$ tiene los mismos parámetros que $f_1$, pero no puede ser la misma función. La última forma, en general, no es muy útil porque $V_0$ se puede despreciar con frecuencia en vertederos con entallas en V. Esto demuestra que un término de importancia mínima no se debe .omar como variable de repetición.

Otro método para determinar conjuntos alternados de parámetros Π sería una combinación arbitraria del primer conjunto. Si se conocen cuatro parámetros Π independientes $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ y $\Pi_4$, el término

$$\Pi_a = \Pi_1^{a_1}\Pi_2^{a_2}\Pi_3^{a_3}\Pi_4^{a_4}$$

cuyos exponentes se eligen a voluntad, dará un nuevo parámetro. Entonces $\Pi_a$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ constituirá un nuevo conjunto. Este procedimiento se puede continuar para hallar todos los conjuntos posibles.

*Ejemplo 4.3* La pérdida de energía mecánica por unidad de longitud en una tubería lisa $\Delta h/l$ en flujo turbulento depende de la velocidad $V$, del diámetro $D$, de la gravedad $g$, de la viscosidad dinámica $\mu$ y de la densidad $\rho$. Por el análisis dimensional determinar la forma general de la ecuación

$$F\left(\frac{\Delta h}{l}, V, D, \rho, \mu, g\right) = 0$$

Evidentemente, $\Delta h/l$ es un parámetro Π. Si $V$, $D$ y $\rho$ son las variables que se repiten,

$$\Pi_1 = V^{x_1}D^{y_1}\rho^{z_1}\mu = (LT^{-1})^{x_1}L^{y_1}(ML^{-3})^{z_1}ML^{-1}T^{-1}$$

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0$$
$$-x_1 - 1 = 0$$
$$z_1 + 1 = 0$$

de donde $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -1$

$$\Pi_2 = V^{x_2}D^{y_2}\rho^{z_2}g = (LT^{-1})^{x_2}L^{y_2}(ML^{-3})^{z_2}LT^{-2}$$

$$x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0$$
$$x_2 - 2 = 0$$
$$z_2 = 0$$



de donde $x_2 = -2$, $y_2 = 1$, $z_2 = 0$, y

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{VD\rho} \qquad \Pi_2 = \frac{gD}{V^2} \qquad \Pi_3 = \frac{\Delta h}{l}$$

o

$$f\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{V^2}{gD}, \frac{\Delta h}{l}\right) = 0$$

pues los monomios Π pueden invertirse si se desea. El primer parámetro, $VD\rho/\mu$, es el *número de Reynolds*, uno de los parámetros adimensionales más importantes de la mecánica de los fluidos. El valor del número de Reynolds determina la naturaleza del flujo. Se estudiará en la Sec. 5.3. Despejando $\Delta h/l$

$$\frac{\Delta h}{l} = f_1\left(\mathbf{R}, \frac{V^2}{gD}\right)$$

La fórmula usualmente empleada es

$$\frac{\Delta h}{l} = f(\mathbf{R})\,\frac{1}{D}\,\frac{V^2}{2g}$$

*Ejemplo 4.4* Un cierto estado de flujo de un fluido depende de la velocidad $V$, la densidad $\rho$, varias dimensiones lineales $l$, $l_1$, $l_2$, la caída de presión $\Delta p$, la gravedad $g$, la viscosidad $\mu$, la tensión superficial $\sigma$ y el módulo de elasticidad volumétrico $K$. Por aplicación del análisis dimensional a estas variables encontrar un conjunto de parámetros adimensionales Π.

$$F(V, \rho, l, l_1, l_2, \Delta p, g, \mu, \sigma, K) = 0$$

Como intervienen tres dimensiones, hay que elegir tres variables para repetir. Hay siete parámetros Π:

$$\Pi_1 = V^{x_1}\rho^{y_1}l^{z_1}\Delta p \qquad \Pi_2 = V^{x_2}\rho^{y_2}l^{z_2}g \qquad \Pi_3 = V^{x_3}\rho^{y_3}l^{z_3}\mu$$
$$\Pi_4 = V^{x_4}\rho^{y_4}l^{z_4}\sigma \qquad \Pi_5 = V^{x_5}\rho^{y_5}l^{z_5}K \qquad \Pi_6 = l/l_1$$
$$\Pi_7 = l/l_2$$

Sustituyendo las dimensiones de las diversas magnitudes

$$\Pi_1 = (LT^{-1})^{x_1}(ML^{-3})^{y_1}L^{z_1}ML^{-1}T^{-2}$$

$$x_1 - 3y_1 + z_1 - 1 = 0$$
$$-x_1 - 2 = 0$$
$$y_1 + 1 = 0$$

de donde $x_1 = -2$, $y_1 = -1$, $z_1 = 0$

$$\Pi_2 = (LT^{-1})^{x_2}(ML^{-3})^{y_2}L^{z_2}LT^{-2}$$

$$x_2 - 3y_2 + z_2 + 1 = 0$$
$$-x_2 - 2 = 0$$
$$y_2 = 0$$

de donde $x_2 = -2,\ y_2 = 0,\ z_2 = 1$

$$\Pi_3 = (LT^{-1})^{x_3}(ML^{-3})^{y_3}L^{z_3}ML^{-1}T^{-1}$$

$$\begin{aligned} x_3 - 3y_3 + z_3 - 1 &= 0 \\ -x_3 \qquad\quad - 1 &= 0 \\ y_3 \qquad + 1 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x_3 = -1,\ y_3 = -1,\ z_3 = -1$

$$\Pi_4 = (LT^{-1})^{x_4}(ML^{-3})^{y_4}L^{z_4}MT^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_4 - 3y_4 + z_4 \qquad &= 0 \\ -x_4 \qquad\quad - 2 &= 0 \\ y_4 \qquad + 1 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x_4 = -2,\ y_4 = -1,\ z_4 = -1$

$$\Pi_5 = (LT^{-1})^{x_5}(ML^{-3})^{y_5}L^{z_5}ML^{-1}T^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_5 - 3y_5 + z_5 - 1 &= 0 \\ -x_5 \qquad\quad - 2 &= 0 \\ y_5 \qquad + 1 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x_5 = -2,\ y_5 = -1,\ z_5 = 0$

Por consiguiente,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \qquad \Pi_2 = \frac{gl}{V^2} \qquad \Pi_3 = \frac{\mu}{Vl\rho} \qquad \Pi_4 = \frac{\sigma}{V^2\rho l}$$

$$\Pi_5 = \frac{K}{\rho V^2} \qquad \Pi_6 = \frac{l}{l_1} \qquad \Pi_7 = \frac{l}{l_2}$$

y

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \frac{gl}{V^2}, \frac{\mu}{Vl\rho}, \frac{\sigma}{V^2\rho l}, \frac{K}{\rho V^2}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) = 0$$

es conveniente invertir algunos de estos parámetros y tomar la raíz cuadrada de $\Pi_5$,

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \frac{V^2}{gl}, \frac{Vl\rho}{\mu}, \frac{V^2 l\rho}{\sigma}, \frac{V}{\sqrt{K/\rho}}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) = 0$$

El primer parámetro, que usualmente se escribe $\Delta p/(\rho V^2/2)$, es el *coeficiente de presión*; el segundo parámetro es el número de *Froude* **F**; el tercero es el número de *Reynolds* **R**; el cuarto es el número de *Weber* **W**, y el quinto es el número de *Mach* **M**. Por tanto,

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) = 0$$

Despejando la caída de presión

$$\Delta p = \rho V^2 f_2\left(\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right)$$

en la que $f_1$, $f_2$ deben determinarse teórica o experimentalmente. Eligiendo otras variables para repetir podría obtenerse otro conjunto de parámetros $\Pi$.



La Fig. 5.32 es una representación de una relación funcional del tipo recién dado cuando se aplica al movimiento en tuberías. Aquí los parámetros **F**, **W** y **M** se desprecian por no ser importantes; $l$ es el diámetro $D$ de la tubería, $l_1$ es la longitud de la tubería $L$ y $l_2$ es una dimensión que es representativa de la altura efectiva de la rugosidad de la superficie de la tubería y viene dada por $\epsilon$. Por tanto,

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_3\left(\mathbf{R}, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

El hecho de que la caída de presión en la tubería varíe linealmente con la longitud (es decir, al doblar la longitud de la tubería, se dobla la pérdida de presión) parece razonable, de modo que

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{L}{D} f_4\left(\mathbf{R}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

o

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2 (L/D)} = f_4\left(\mathbf{R}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

El término del primer miembro viene dado normalmente mediante la notación $f$, como en la Fig. 5.32. Las curvas de esta figura tienen $f$ en ordenadas y **R** en abscisas, con $\epsilon/D$ un parámetro que toma un valor dado para cada curva. La naturaleza de estas curvas se ha determinado experimentalmente. Dichos experimentos demuestran que cuando el parámetro **R** está por debajo del valor 2.000, todas las curvas para los diversos valores de $\epsilon/D$ se unen en una sola. Por consiguiente, $f$ es independiente de $\epsilon/D$, y resulta

$$f = f_5(\mathbf{R})$$

Esta relación se obtendrá en el Cap. 5 basándonos en consideraciones teóricas, pero permanece para una comprobación experimental de estas predicciones, para indicar el poder de los métodos teóricos desarrollados.

***Ejemplo 4.5*** El empuje producido por una hélice cualquiera de un conjunto de hélices de aeroplano geométricamente semejantes se determina experimentalmente a partir de un ensayo en un túnel aerodinámico con un modelo. Hallar mediante el análisis dimensional parámetros adecuados para representar los resultados del ensayo.

El empuje $F_T$ depende de la velocidad de rotación $\omega$, de la velocidad de avance $V_0$, del diámetro $D$, de la viscosidad del aire $\mu$, de la densidad $\rho$ y de la velocidad del sonido $c$. La función

$$f(F_T, V_0, D, \omega, \mu, \rho, c) = 0$$

se debe disponer en cuatro parámetros adimensionales, ya que hay siete magnitudes y tres dimensiones fundamentales. Tomando en primer lugar $\rho$, $\omega$ y $D$ como variables de repetición,

$$\Pi_1 = \rho^{x_1}\omega^{y_1}D^{z_1}F_T = (ML^{-3})^{x_1}(T^{-1})^{y_1}L^{z_1}MLT^{-2}$$
$$\Pi_2 = \rho^{x_2}\omega^{y_2}D^{z_2}V_0 = (ML^{-3})^{x_2}(T^{-1})^{y_2}L^{z_2}LT^{-1}$$
$$\Pi_3 = \rho^{x_3}\omega^{y_3}D^{z_3}\mu = (ML^{-3})^{x_3}(T^{-1})^{y_3}L^{z_3}ML^{-1}T^{-1}$$
$$\Pi_4 = \rho^{x_4}\omega^{y_4}D^{z_4}c = (ML^{-3})^{x_4}(T^{-1})^{y_4}L^{z_4}LT^{-1}$$

Escribiendo como antes los sistemas de ecuaciones simultáneas en $x_1$, $y_1$, $z_1$, etcétera, y despejándolas,

$$\Pi_1 = \frac{F_T}{\rho\omega^2D^2} \qquad \Pi_2 = \frac{V_0}{\omega D} \qquad \Pi_3 = \frac{\mu}{\rho\omega D^2} \qquad \Pi_4 = \frac{c}{\omega D}$$

Despejando el grupo adimensional del empuje,

$$\frac{F_T}{\rho\omega^2D^4} = f_1\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right)$$

Como se pueden volver a combinar los parámetros para obtener otras formas, se sustituye el segundo grupo por el producto de los grupos primero y segundo, $VD\rho/\mu$, y el tercero por el primero dividido por el tercero, $V_0/c$; así

$$\frac{F_T}{\rho\omega^2D^4} = f_2\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{V_0D\rho}{\mu}, \frac{V_0}{c}\right)$$

De los parámetros adimensionales, probablemente el primero es el más importante, ya que relaciona la velocidad de avance y la de rotación. El segundo parámetro es el número de Reynolds y tiene en cuenta los efectos de la viscosidad. El último parámetro es el número de Mach, que será importante para velocidades próximas o superiores a la del sonido. El efecto del número de Reynolds es normalmente pequeño; por tanto, una representación de $F_T/\rho\omega^2D^4$ en función de $V_0/\omega D$ será la más informativa.

Las etapas de un análisis dimensional se pueden resumir de la manera siguiente:

1. Se eligen las variables adecuadas. Esto requiere cierto conocimiento del proceso.
2. Se escriben las relaciones funcionales, es decir,

$$f(V,D,\rho,\mu,c,H) = 0$$

3. Se eligen las variables de repetición. (No hacer variable de repetición a una magnitud dependiente.) Dichas variables contendrán las $m$ dimensiones del problema. A menudo se elige una variable porque determina la escala, otra para las condiciones cinemáticas y en los casos más interesantes de este capítulo se toma una variable que esté relacionada con las fuerzas o las masas del sistema; por ejemplo, $D$, $V$, $\rho$.



4. Se escriben los parámetros $\Pi$ en función de exponentes desconocidos, por ejemplo,

$$\Pi_1 = V^{x_1}D^{y_1}\rho^{z_1}\mu = (LT^{-1})^{x_1}L^{y_1}(ML^{-3})^{z_1}ML^{-1}T^{-1}$$

5. Para cada expresión $\Pi$ se escriben las ecuaciones de los exponentes de manera que la suma de los exponentes de cada dimensión sea cero.
6. Se resuelven los sistemas de ecuaciones.
7. Se llevan a la etapa 4 los exponentes obtenidos en la etapa 6.
8. Se establece la relación funcional

$$f_1(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m}) = 0$$

o, se despeja una de las $\Pi$:

$$\Pi_2 = f(\Pi_1, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m})$$

9. Se vuelven a cambiar, si se desean, para variar las formas de los parámetros $\Pi$, conservando el mismo número de parámetros.

### 4.4 *Estudio de los parámetros adimensionales*

Los cinco parámetros adimensionales, a saber: el coeficiente de presión, el número de Reynolds, el número de Froude, el número de Weber y el número de Mach, son de importancia para correlacionar los valores que se obtienen en experiencias. Todos se estudian en este número, haciendo énfasis en la relación del coeficiente de presión con los otros grupos.

#### *Coeficiente de presión*

El coeficiente de presión $\Delta p/(\rho V^2/2)$ es la relación entre la presión y la presión dinámica. Cuando se multiplica por el área es la relación de la fuerza de presión a la fuerza de inercia, ya que $(\rho V^2/2)A$ sería la fuerza necesaria para reducir la velocidad a cero. Puede también expresarse en la forma $\Delta h/(V^2/2g)$ dividiendo por $\gamma$. Este coeficiente aparece de diversas formas y es la relación de las fuerzas de presión a las fuerzas de inercia. La ecuación de Darcy-Weisbach para flujo en tuberías relaciona las pérdidas $h_l$ con la longitud de la tubería $L$, el diámetro $D$ y la velocidad $V$ mediante el factor† $f$ de rozamiento adimensional,

$$h_l = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

o

$$\frac{fL}{D} = \frac{h_l}{V^2/2g} = f_2\left(\mathbf{R},\mathbf{F},\mathbf{W},\mathbf{M},\frac{l}{l_1},\frac{l}{l_2}\right)$$

† Hay varios coeficientes de rozamiento de uso general. Este es el coeficiente de rozamiento de Darcy-Weisbach que es cuatro veces mayor que el coeficiente de rozamiento de *Fanning*, también llamado $f$.

en la que se demuestra que $fL/D$ es igual al coeficiente de presión (ver el Ejemplo 4.4). En el flujo en tuberías, la gravedad no influye en las pérdidas; por tanto, se puede prescindir de **F**. Análogamente, la tensión superficial no la afecta tampoco con lo que **W** se suprime. Para un líquido en régimen permanente, la compresibilidad no es importante y así se elimina **M**. $l$ se puede poner en función de $D$, $l_1$ en función de la proyección en altura $\epsilon$ de la rugosidad en la pared de la tubería y $l_2$ en función de su separación $\epsilon'$; por lo que la anterior expresión se reduce a

$$\frac{fL}{D} = f_2\left(\mathbf{R}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D}\right) \tag{4.4.1}$$

En los Caps. 5, 6 y 10 se estudian los problemas de flujo en tuberías. Si la compresibilidad es importante:

$$\frac{fL}{D} = f_2\left(\mathbf{R}, \mathbf{M}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D}\right) \tag{4.4.2}$$

En el Cap. 6 se estudian los problemas de movimiento compresible. La velocidad de salida por un orificio, estudiada en el Cap. 8, es $V = C_v\sqrt{2gH}$, de donde

$$\frac{H}{V^2/2g} = \frac{1}{C_v^2} = f_2\left(\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) \tag{4.4.3}$$

en la cual $l_1$ y $l_2$ pueden referirse a dimensiones aguas arriba y $l$ al diámetro del orificio. La viscosidad y la tensión superficial carecen de importancia cuando los orificios son grandes y los fluidos son de pequeña viscosidad. Los efectos del número de Mach pueden ser muy importantes para movimiento de gases con grandes caídas de presión; es decir, con el número de Mach próximo a la unidad.

En el movimiento permanente y uniforme en un canal abierto, estudiado en el Cap. 11, la fórmula de Chézy relaciona la velocidad media $V$, la pendiente del canal $S$ y el radio hidráulico $R$ de la sección recta (área de la sección dividida por el perímetro mojado) según

$$V = C\sqrt{RS} = C\sqrt{R\frac{\Delta h}{L}} \tag{4.4.4}$$

$C$ es un coeficiente que depende del tamaño, forma y rugosidad del canal. Entonces

$$\frac{\Delta h}{V^2/2g} = \frac{2gL}{R}\frac{1}{C^2} = f_2\left(\mathbf{F}, \mathbf{R}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) \tag{4.4.5}$$

pues la tensión superficial y la compresibilidad son generalmente de escasa importancia.



El arrastre $F$, fuerza ejercida por un fluido en movimiento sobre un cuerpo, o la resistencia que se opone al movimiento del cuerpo en el fluido, se expresa por $F = C_D A \rho V^2/2$, siendo $A$ un área típica del cuerpo, usualmente la proyección del cuerpo sobre un plano normal a la dirección del movimiento. Entonces $F/A$ es equivalente a $\Delta p$, y

$$\frac{F}{A\rho V^2/2} = C_D = f_2\left(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) \tag{4.4.6}$$

El término **R** está relacionado con el arrastre o resistencia superficial, así como con la resistencia de *forma* originada por el fenómeno de la *separación* de las líneas de corriente del cuerpo; **F** se relaciona con la resistencia de las olas en la superficie libre cuando ésta existe; para grandes números de Mach $C_D$ varía más marcadamente con **M** que son los otros parámetros; las relaciones de longitudes se refieren a la forma y a la rugosidad relativa de la superficie.

### *Número de Reynolds*

El número de Reynolds $VD\rho/\mu$ es la relación de las fuerzas de inercia y las de viscosidad. Un número de Reynolds «crítico» distingue entre regímenes de flujo, tales como laminar o turbulento en tuberías, en la capa límite o alrededores de objetos sumergidos. El valor particular depende de la situación. En flujo compresible, el número de Mach es generalmente más significativo que el número de Reynolds.

### *Número de Froude*

El número de Froude $V^2/gl$, multiplicado y dividido por $\rho A$, da la relación de la fuerza dinámica (o fuerza de inercia) al peso. En los movimientos con superficie libre de líquido, la naturaleza del movimiento (rápido† o tranquilo) depende de si el número de Froude es mayor o menor que la unidad. Es útil en los cálculos del resalto hidráulico, en el diseño de estructuras hidráulicas y en el diseño de barcos.

### *Número de Weber*

El número de Weber $V^2 l\rho/\sigma$ es la relación de las fuerzas de inercia a las de tensión superficial (como es evidente el multiplicar numerador y denominador por $l$). Es importante en las superficies de separación de gas-líquido o líquido-líquido y también donde dichas superficies están en contacto con el contorno. La tensión superficial produce pequeñas ondas

† El flujo en un canal abierto con profundidad y es *rápido* cuando su velocidad es mayor que la velocidad $\sqrt{gy}$ de una onda elemental en un líquido en reposo. Se presenta flujo *tranquilo* cuando la velocidad es menor que $\sqrt{gy}$.

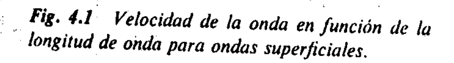
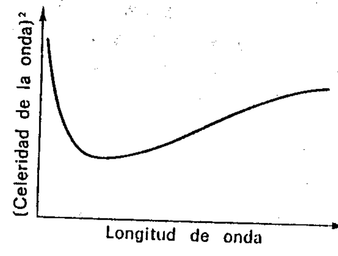


*Fig. 4.1 Velocidad de la onda en función de la longitud de onda para ondas superficiales.*




(capilares) y la formación de gotitas y tiene un efecto en el caudal por orificios y vertederos con muy pequeña altura de carga.

El efecto de la tensión superficial en la propagación de una onda se ve en la Fig. 4.1. A la izquierda del mínimo de la curva controla la celeridad de la onda la tensión superficial (las ondas se llaman capilares) y a la derecha del mínimo son dominantes los efectos gravitatorios.

### *Número de Mach*

La velocidad del sonido en un líquido se escribe $\sqrt{K/\rho}$, si $K$ es el módulo volumétrico de elasticidad (Secs. 1.7 y 6.2), o $c = \sqrt{kRT}$ ($k$ es la relación de calores específicos y $T$ la temperatura absoluta para un gas perfecto). $V/c$ o $V/\sqrt{K/\rho}$ es el número de Mach. Mide la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas elásticas. Elevando al cuadrado $V/c$ y multiplicando por $\rho A/2$ el numerador y el denominador, el numerador es la fuerza de inercia y el denominador es la fuerza dinámica en flujo sónico. Se puede demostrar que también mide la relación entre la energía cinética del movimiento y la energía interna del fluido. Es el parámetro de correlación más importante cuando las velocidades están próximas o sobrepasan la velocidad local del sonido.

## 4.5 Semejanza. Estudio sobre modelos

Los estudios sobre modelos de maquinaria o estructuras hidráulicas en proyecto sirven frecuentemente de valiosa ayuda al proyectista, ya que permiten una inspección visual del flujo y hacen posible la obtención de ciertos datos numéricos, como, por ejemplo, calibrado de vertederos y compuertas, profundidades de flujo, distribuciones de velocidades, fuerzas sobre compuertas, rendimientos y capacidades de bombas y turbinas, distribuciones de presiones y pérdidas de energía mecánica.

Si se quieren obtener valores precisos para un proyecto a partir del estudio de un modelo ha de existir semejanza dinámica entre el modelo y el prototipo. Esta semejanza requiere: (1) que exista una semejanza geométrica exacta y (2) que la relación de las presiones dinámicas en puntos



correspondientes sea constante. La parte segunda se puede expresar también como una semejanza cinemática, es decir, las líneas de corriente deben ser geométricamente semejantes.

La semejanza geométrica se refiere también a la rugosidad superficial del modelo y del prototipo. Si cada dimensión lineal del modelo es una décima parte de la correspondiente dimensión lineal del prototipo, las alturas de las rugosidades han de estar en la misma proporción. Para que sean iguales las relaciones de las presiones dinámicas en puntos correspondientes de modelo y prototipo, las relaciones de los diversos tipos de fuerzas deben ser iguales en puntos correspondientes. Por consiguiente, para la semejanza dinámica estricta. los números de Mach, Reynolds, Froude y Weber deben ser iguales en el modelo y en el prototipo.

El que se cumplan estrictamente todos estos requisitos es generalmente imposible de conseguir excepto cuando la escala sea 1:1, pero afortunadamente en muchas situaciones solo dos o tres fuerzas son del mismo orden de magnitud. El estudio de varios casos hará esto más claro.

### *Ensayos en túneles aerodinámicos y canales hidrodinámicos*

Se emplea este equipo para examinar las líneas de corriente y las fuerzas que se producen cuando un fluido se mueve alrededor de un cuerpo totalmente sumergido en él. El tipo de ensayo que se va a realizar y la disponibilidad del equipo determinan qué tipo de túnel se va a utilizar. Como la viscosidad cinemática del agua es aproximadamente un décimo de la del aire, se empleará un túnel de agua para estudios de modelos con números de Reynolds relativamente altos. El efecto de arrastre de diversos paracaídas se estudia en un túnel de agua. A muy altas velocidades del aire se deben tener en cuenta los efectos de la compresibilidad, y por consiguiente, el número de Mach, y deben ser la razón principal para realizar el estudio. La Fig. 4.2 representa el modelo de un portaaviones que se ensaya en un túnel de baja velocidad para estudiar la forma del flujo alrededor de la superestructura del barco. El modelo se ha invertido y se ha suspendido del techo de manera que se puedan usar jirones de lana negra para dar una indicación de la dirección del flujo. Detrás del modelo hay un aparato para medir la velocidad y dirección del aire en varios puntos a lo largo del camino de deslizamiento del portaaviones.

### *Flujo en tuberías*

En el flujo permanente en una tubería las únicas fuerzas de importancia son las fuerzas de inercia y las viscosas; por consiguiente, cuando existe la semejanza geométrica y los números de Reynolds son iguales en el modelo y en el prototipo, también se da la semejanza dinámica. Los diversos coeficientes de presión correspondientes son los mismos.



*Fig. 4.2 Ensayo en un túnel aerodinámico de la superestructura de un portaaviones. El modelo está invertido y suspendido del techo. (Fotografía tomada en Aeronautical and Astronautical Laboratories of The University of Michigan para el Dynasciences Corp.)*

En experiencias con fluidos que tienen la misma viscosidad cinemática en el modelo y prototipo, el producto $VD$ deben ser los mismos. Frecuentemente esto requiere velocidades muy altas en pequeños modelos.

*Estructuras hidráulicas abiertas*

En las estructuras tales como vertederos, remansos, transiciones en canales y presas existen fuerzas debidas a la gravedad (por los cambios de elevación de las superficies líquidas) y fuerzas de inercia que son más grandes que las fuerzas viscosas y que las turbulentas de cortadura. En estos casos la semejanza geométrica y el mismo valor del número de Froude es suficiente para, con una aproximación bastante aceptable, tener la semejanza dinámica; así,

$$\frac{V_m^2}{g_m l_m} = \frac{V_p^2}{g_p l_p}$$

Como la gravedad es la misma, la relación de velocidades varía con la



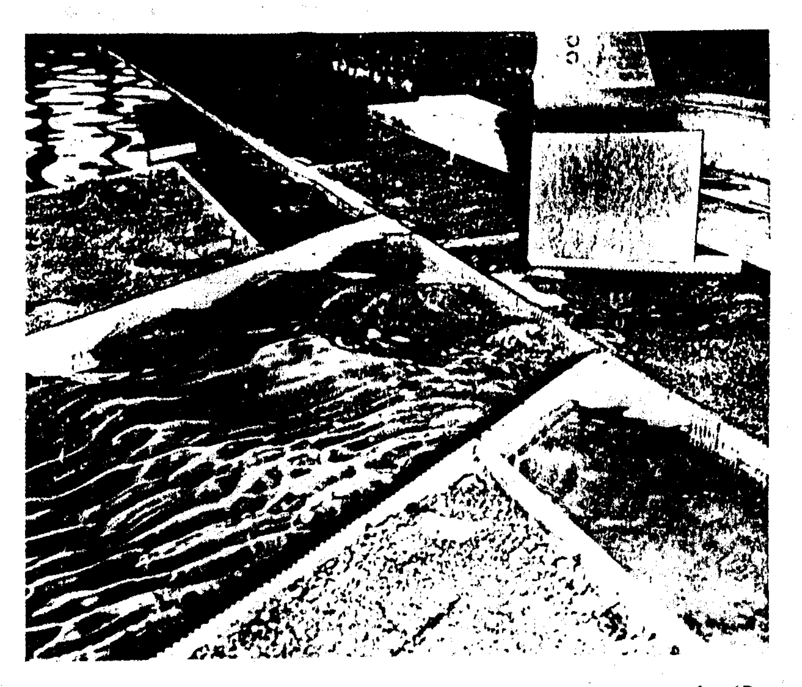


*Fig. 4.3 Ensayo en modelo de una bahía para determinar el efecto de un rompeolas. (Department of Civil Engineering, The University of Michigan.)*

raíz cuadrada de la escala de longitudes $\lambda = l_p/l_m$,

$$V_p = V_m\sqrt{\lambda}$$

Los tiempos correspondientes para sucesos en estudio (como, por ejemplo, el tiempo de paso de una partícula a través de una transición) están también en una relación, así:

$$t_m = \frac{l_m}{V_m} \qquad t_p = \frac{l_p}{V_p}$$

y

$$t_p = t_m \frac{l_p}{l_m}\frac{V_m}{V_p} = t_m\sqrt{\lambda}$$

La relación de los caudales $Q_p/Q_m$ es

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{l_p^3/t_p}{l_m^3/t_m} = \lambda^{5/2}$$

La relación de fuerzas, como, por ejemplo, las fuerzas sobre compuertas $F_p/F_m$, es

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma h_p l_p^2}{\gamma h_m l_m^2} = \lambda^3$$

De manera análoga pueden deducirse otras relaciones entre las diversas magnitudes que intervienen y de este modo los resultados del modelo pueden traducirse al prototipo.

La Fig. 4.3 representa un ensayo realizado con un modelo para determinar el efecto de un rompeolas en la formación de las olas en un puerto.

*Resistencia en barcos*

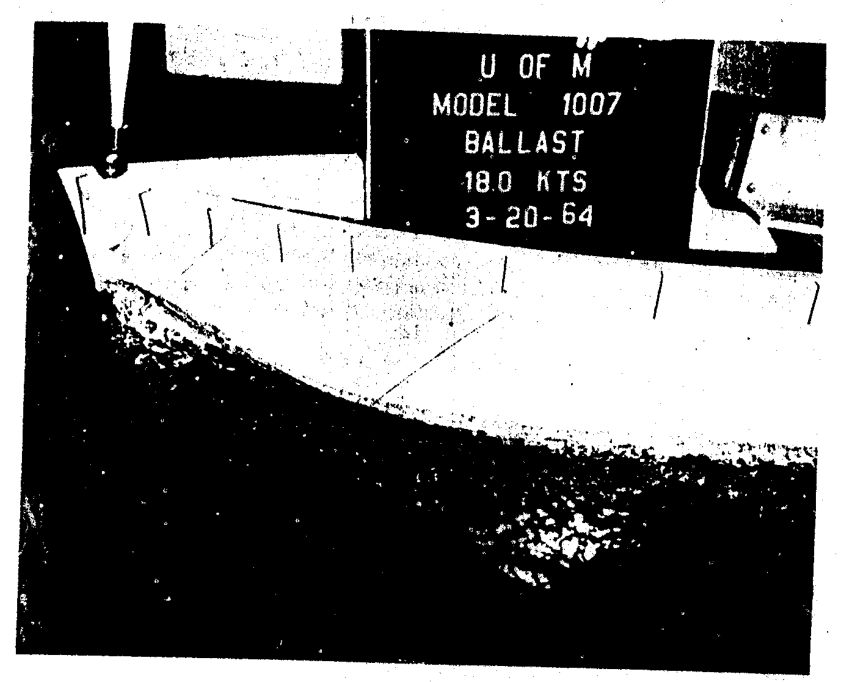
La resistencia que se opone al movimiento de un barco a través del agua se compone del arrastre de presión, rozamiento viscoso superficial y resistencia de las olas. El estudio sobre modelos se complica por los tres tipos de fuerzas que son significativas, las de inercia, las viscosas y las gravitatorias. El estudio de la resistencia superficial se fundamenta en la igualdad de los números de Reynolds en modelo y prototipo, pero la resistencia de las olas depende del número de Froude. Para satisfacer simultáneamente ambos requisitos, el modelo y el prototipo han de tener el mismo tamaño.

La dificultad se soslaya usando un pequeño modelo y midiendo la resistencia total sobre él cuando se remolca. El rozamiento pelicular en el modelo se calcula a continuación y se resta de la resistencia total. El resto se traduce a la escala del prototipo por la ley de Froude, y se le suma el rozamiento pelicular del prototipo que se calcula, obteniéndose así la resistencia total debida al agua. La Fig. 4.4 representa el cambio brusco en el perfil de las olas que resulta de una proa diseñada de nuevo. De dichos ensayos es posible predecir según la ley de Froude la formación de la ola y la resistencia al avance que se producirá en el prototipo.

*Maquinaria hidráulica*

Debido a las partes móviles de una máquina hidráulica se necesita otro parámetro para poder asegurar que las imágenes de las líneas de corriente son semejantes en el modelo y en el prototipo. Este parámetro debe relacionar los caudales con las velocidades de las partes móviles. En el caso de máquinas geométricamente semejantes, si los diagramas vectoriales de velocidades a la entrada y salida de las partes móviles son semejantes, las unidades son *homólogas*; es decir, prácticamente existe la semejanza dinámica. El número de Froude tiene escasa importancia, pero los efectos del número de Reynolds (llamados *efectos de la escala*





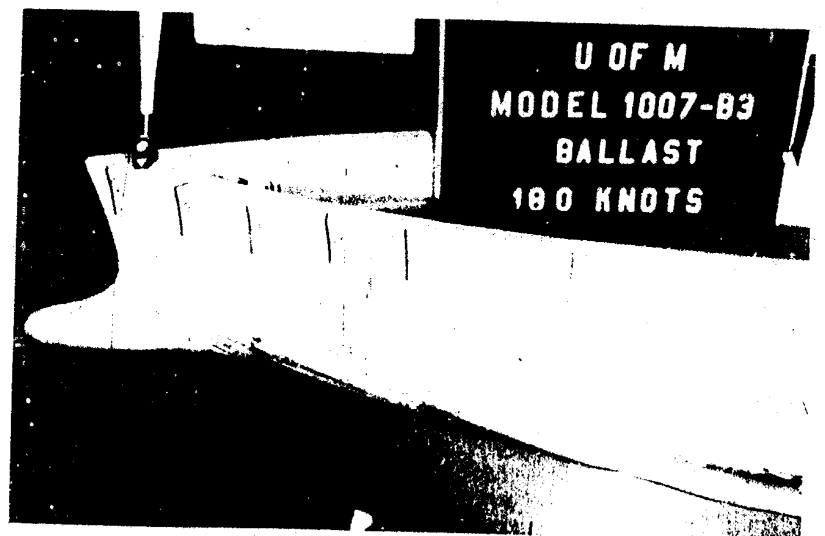




*Fig. 4.4 Ensayo en modelo para mostrar la influencia de una proa en bulbo en la formación de las olas de proa. (Department of Naval Architecture and Marine Engineering, The University of Michigan.)*

porque es imposible mantener el mismo número de Reynolds en unidades homólogas) puede causar una discrepancia del 2 al 3 por 100 del rendimiento entre el modelo y el prototipo. El número de Mach es también de importancia en los compresores axiales y en las turbinas de gas.

*Ejemplo 4.6* El número de Reynolds para una esfera se determina normalmente mediante la velocidad del fluido a una gran distancia de la esfera, del diámetro de la esfera y de la viscosidad cinemática del fluido. Cuando este número de Reynolds es menor que la unidad, la fuerza de arrastre sobre la esfera viene dada por $3\pi\mu DU$. Estudiar la posibilidad de hacer un modelo en agua del caso de esferas de 0,4 mm de diámetro que caen en el aire con una velocidad de 0,3 cm/seg.

$$\mathbf{R}_p = \frac{UD}{\nu} = \frac{0{,}3 \times 0{,}4 \times 10^{-5}}{0{,}135 \times 10^{-5}} = 0{,}88$$

$$\frac{\text{Arrastre}}{\pi D^2/4\ (\rho U^2/2)} = C_D = \frac{3\pi\mu DU}{\pi D^2(\rho U^2/8)} = \frac{24}{\mathbf{R}}$$

Sea $\nu$ para el agua $1{,}35 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{seg}$:

$$U_m D_m = U_p D_p \frac{0{,}135}{0{,}0135} = 10 U_p D_p$$

Para el mismo $\mathbf{R}$, $C_D$ es igual para el modelo y el prototipo, de modo que

$$\frac{24}{\mathbf{R}_m} = \frac{24}{\mathbf{R}_p}$$

Por consiguiente, en este caso no se ponen nuevas limitaciones. Por conveniencia sea $D_m = D_p$; entonces $U_m = 10U_p$. El arrastre en el modelo es

$$F = 3\pi\ (1{,}35 \times 10^{-6} \times 102)0{,}4 \times 10^{-3} \times 0{,}03 = 1{,}55 \times 10^{-8}\ \text{kg}$$

El arrastre en la esfera debe igualar a su peso sumergido cuando se alcanza la velocidad final, de modo que

$$\gamma = \frac{1{,}55 \times 10^{-8} \times 6/\pi}{(0{,}4 \times 10^{-3})^3} = 464\ \text{kg/m}^3$$

Por consiguiente, se deben hallar esferas cuyo peso específico relativo sea

$$S = \frac{1.000 + 464}{1.000} = 1{,}464$$

## Problemas

*4.1* Demostrar que las Ecs. (3.6.4), (3.7.5) y (3.9.15) son homogéneas dimensionalmente.



*4.2* Formar con las magnitudes de los siguientes grupos parámetros adimensionales:

(*a*) $\Delta p, \rho, V$ (*b*) $\rho, g, V, F$ (*c*) $\mu, F, \Delta p, t$

*4.3* Por el simple examen, formar con las magnitudes de los grupos siguientes parámetros adimensionales:

(*a*) $a, l, t$ (*b*) $\nu, l, t$ (*c*) $A, Q, \omega$ (*d*) $K, \sigma, A$

*4.4* Deducir la unidad de masa acorde con el sistema de unidades centímetro, minuto, tonelada fuerza.

*4.5* En función de $M$, $L$, $T$ determinar las dimensiones de radianes, velocidad angular, potencia, trabajo, par y momento de la cantidad de movimiento.

*4.6* Encontrar las dimensiones de las magnitudes del Prob. 4.5 en el sistema $F$-, $L$-, $T$-.

*4.7* Resolver el Prob. 4.2 tomando a $Q$ y $H$ como variables que se repiten.

*4.8* Suponiendo que en un problema de flujo a través de una tubería lisa intervienen las magnitudes $Q$, $D$, $\Delta h/l$, $\rho$, $\mu$, $g$, agruparlas en parámetros adimensionales siendo $Q$, $\rho$, $\mu$ las variables que se repiten.

*4.9* Si se conoce que la tensión cortante $\tau$ depende de la viscosidad y la variación de la deformación angular $du/dy$ en flujo laminar unidimensional, determinar la forma de la ley de Newton de la viscosidad por razonamiento dimensional.

*4.10* La variación $\Delta p$ de la presión en líquidos en reposo depende del peso específico $\gamma$ y de la diferencia de alturas $\Delta z$. Determinar por razonamiento dimensional la forma de la ley hidrostática de la variación de presión.

*4.11* Despreciando los efectos de la viscosidad y de la tensión superficial, se considera que la velocidad $V$ de salida de un líquido de un depósito depende de la caída de presión $\Delta p$ del líquido y de su densidad $\rho$. Determinar la forma de la expresión de $V$.

*4.12* La fuerza de empuje $F_B$ sobre un cuerpo depende del volumen sumergido $V$ y de la fuerza másica gravitacional que actúa sobre el fluido. Determinar la forma de la ecuación de la fuerza de empuje.

*4.13* En un fluido que gira como un sólido alrededor de un eje vertical con velocidad angular $\omega$, el aumento de presión $p$ en dirección radial depende de la velocidad $\omega$, el radio $r$ y la densidad del fluido $\rho$. Obtener la forma de la ecuación de $p$.

*4.14* En el Ejemplo 4.3 encontrar otros dos conjuntos de parámetros adimensionales combinando los parámetros adimensionales dados.

*4.15* Hallar los parámetros adimensionales del Ejemplo 4.4 usando como variables que se repiten $\Delta p$, $\rho$ y $l$.

*4.16* El número de Mach $\mathbf{M}$ para el flujo de un gas perfecto por una tubería depende de la relación de calores específicos $k$ (sin dimensiones), la presión $p$, la densidad $\rho$ y la velocidad $V$. Obtener por razonamiento dimensional la forma de la expresión del número de Mach.

*4.17* Hallar la relación de desmultiplicación para el par $T$ sobre un disco de radio $r$ que gira en un fluido de viscosidad $\mu$ con velocidad angular $\omega$ y huelgo $y$ entre el disco y la placa fija.

*4.18* La velocidad en un punto del modelo del rebosadero de una presa es de 1 m/seg. Para una relación de prototipo a modelo de 10:1, ¿cuál es la velocidad en el punto correspondiente del prototipo bajo condiciones análogas?

*4.19* La potencia interna de una bomba depende del caudal $Q$, aumento de presión $\Delta p$, densidad del fluido $\rho$, tamaño $D$ y rendimiento $e$. Encontrar la expresión de la potencia por análisis dimensional.

*4.20* El par desarrollado por una turbina depende del caudal $Q$, altura $H$, peso específico $\gamma$, velocidad angular $\omega$ y rendimiento $e$. Determinar la ecuación del par.

*4.21* Un modelo de venturímetro tiene unas dimensiones lineales un quinto de las del prototipo. El prototipo trabaja con agua a 20 C y el modelo con agua a 100 C. Para un diámetro de garganta de 60 cm y una velocidad en ella de 6 m/seg en el prototipo, ¿qué caudal será necesario en el modelo para que haya semejanza?

*4.22* La resistencia $F$ sobre un proyectil de alta velocidad depende de la velocidad $V$ del proyectil, de la densidad del fluido $\rho$, la velocidad del sonido $c$, el diámetro del proyectil $D$ y la viscosidad $\mu$. Desarrollar una expresión de la resistencia.

*4.23* La resistencia a las olas sobre un modelo de barco es 1,80 kg a una velocidad de 2,40 m/seg. Para un prototipo quince veces más largo, ¿cuáles serían la velocidad y la resistencia a las olas correspondientes si el líquido es el mismo?

*4.24* Determinar el peso específico relativo de las partículas del prototipo empleado en el Ejemplo 4.6.

*4.25* Una pequeña esfera de radio $r_0$ y densidad $\rho_0$ se sedimenta a velocidad $U$ en un líquido de densidad $\rho$ y viscosidad $\mu$. Los ensayos se realizan en el interior de tubos verticales de radio $r$. Determinar por análisis dimensional un conjunto de parámetros adimensionales que se emplearan para determinar la influencia de la pared del tubo sobre la velocidad de sedimentación.

*4.26* Las pérdidas en una Y en una tubería de 1,20 m de diámetro, que transporta gas ($\rho$ = 4,20 UTM/m$^3$, $\mu$ = 0,002 poise, $V$ = 23 m/seg), quieren determinarse mediante ensayo sobre modelo con agua a 21° C. El laboratorio dispone de un caudal de 4500 l/min. ¿A qué escala se construirá el modelo y cómo se convertirán los resultados en las pérdidas en el prototipo?

*4.27* Las ondas tienen una velocidad de propagación que depende de la tensión superficial y de la densidad del fluido así como de la longitud de onda. Justificar por análisis dimensional la forma de la Fig. 4.1 para longitudes de onda pequeñas.

*4.28* En agua muy profunda la velocidad de propagación de las olas depende de la longitud de onda, pero en agua poco profunda depende de esta dimensión. ¿De qué variables dependerá la velocidad de avance de olas en agua poco profunda? ¿Está de acuerdo la Fig. 4.1 con este problema?

*4.29* Si un conducto circular vertical que no está completamente lleno gira a alta velocidad, el fluido se pegará uniformemente a la pared interior cuando fluye hacia abajo (ver la Sec. 2.9). Bajo estas condiciones la aceleración radial del fluido da un campo de fuerzas radiales que es análogo a la atracción gravitatoria y se puede producir un resalto hidráulico en la parte interior del tubo, con lo que el espesor del fluido varía de repente. Determinar un conjunto de parámetros adimensionales para estudiar este resalto hidráulico.

*4.30* Una gota de líquido aproximadamente esférica oscila al caer. La tensión superficial desempeña un papel predominante. Determinar un parámetro adimensional significativo para esta frecuencia natural.

*4.31* En la Fig. 5.23 se dan los coeficientes de sustentación y resistencia para un ala. Si el ala tiene una cuerda de 3 m determinar la sustentación y la resistencia por metro de longitud cuando el ala trabaja con ángulo de ataque cero y con un número de Reynolds, basado en la longitud de la cuerda, de 4,5 × 10$^7$ en aire a 10 C. ¿Qué fuerza se originaría sobre un modelo a escala 1:20 si se realizaran los ensayos con agua a 20° C? ¿Cuál sería la velocidad del agua? Comentar la conveniencia de realizar los ensayos de modelos en agua.



*4.32* Para determinar las pérdidas de carga globales en el sistema de tuberías de una estación de bombeo de agua se ensaya sobre un modelo reducido a escala 1:5. Se dispone de aire a 27° C y 1 kg/cm$^2$ de presión absoluta. Para un prototipo por el que circula agua a 15° C por una tubería de 4 m de diámetro a una velocidad de 0,5 m/seg, determinar la velocidad del aire y el caudal necesario, así como la forma de determinar las pérdidas en el prototipo a partir de las medidas en el modelo.

*4.33* En un túnel de pruebas aerodinámico a escala 1:1 se va a medir la sustentación y la resistencia del aire sobre los flotadores de un bote. El bote va a moverse en el agua a 20° C a velocidad de 40 km/h. ¿Qué velocidad del aire a 25° C (760 mm de mercurio) se necesita para determinar los coeficientes de empuje y de resistencia? (*Nota*: El coeficiente de sustentación $C_L$ no tiene dimensiones. Sustentación = $C_L A \rho V^2/2$.)

*4.34* La resistencia al ascenso de un globo aerostático se quiere determinar estudiando la ascensión de un globo a escala 1:50 en el agua. ¿Cómo debe realizarse este estudio con el modelo y cómo pueden convertirse las medidas sobre el modelo en valores sobre el prototipo?

*4.35* El par ejercido por el timón sobre un submarino se va a estudiar con un modelo a escala 1:20 en un canal de agua. Si el par medido sobre el modelo es de 0,5 mkg con una velocidad en el canal de 15 m/seg, ¿cuál es el par y la velocidad del prototipo?

*4.36* Para que dos máquinas hidráulicas sean homólogas deben (*a*) ser geométricamente semejantes; (*b*) tener el mismo coeficiente de desagüe cuando se consideran como un orificio, $Q_1/(A_1\sqrt{2gH_1}) = Q_2/(A_2\sqrt{2gH_2})$, y (*c*) tener la misma relación de velocidad periférica a la velocidad del fluido, $\omega D/(Q/A)$. Demostrar que las relaciones de desmultiplicación se deben expresar de la forma $Q/ND^3$ = const y $H/(ND)^2$ = const. $N$ es la velocidad de rotación.

*4.37* Utilizando las relaciones de desmultiplicación del Prob. 4.36, determinar la altura y el caudal de un modelo 1:4 de una bomba centrífuga que eleva 600 l/seg a 29 m de altura cuando gira a 240 r.p.m. El modelo gira a 1.200 r.p.m.

*4.38* Una recombinación arbitraria *incorrecta* de los parámetros $\Pi$

$$F\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0$$

es

(*a*) $F\left(\frac{c}{V_0}, \frac{\rho C D}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0$

(*b*) $F\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{\rho c D^2}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0$

(*c*) $F\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{V_0 C \rho}{\omega \mu}, \frac{\rho c D}{\mu}\right) = 0$

(*d*) $F\left(\frac{V_0 \mu}{\omega^2 D^3 \rho}, \frac{V_0 \rho D}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0$

(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.39* Las variables que se repiten en un análisis dimensional deben

(*a*) incluir la variable dependiente;
(*b*) tener dos variables con las mismas dimensiones si es posible;
(*c*) excluir una de las dimensiones de cada variable si es posible;
(*d*) incluir aquellas variables nó consideradas factores muy importantes;
(*e*) no satisface ninguna de estas respuestas.

*4.40* Entre las magnitudes que siguen, elegir un parámetro adimensional muy usado en mecánica de los fluidos:

(*a*) velocidad angular; (*b*) viscosidad cinemática; (*c*) peso específico relativo; (*d*) peso específico; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.41* De las siguientes magnitudes elegir la que *no* es un parámetro adimensional:

(*a*) coeficiente de presión; (*b*) número de Froude (*c*) coeficiente de rozamiento de Darcy-Weisbach; (*d*) viscosidad cinemática; (*e*) número de Weber.

*4.42* ¿Cuál de los siguientes parámetros tiene la forma de un número de Reynolds?

(*a*) $ul/v$ (*b*) $VD\mu/\rho$ (*c*) $u_w v/l$ (*d*) $V/gD$ (*e*) $\Delta p/\rho V^2$

*4.43* El número de Reynolds puede definirse como la relación de

(*a*) las fuerzas viscosas a las fuerzas de inercia;
(*b*) las fuerzas viscosas a las fuerzas de gravedad;
(*c*) las fuerzas de gravedad a las fuerzas de inercia;
(*d*) las fuerzas elásticas a las fuerzas de presión;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.44* El coeficiente de presión puede ponerse en la forma

(*a*) $\Delta p/\gamma H$ (*b*) $\Delta p/(\rho V^2/2)$ (*c*) $\Delta p/l\mu V$ (*d*) $\Delta p\, \rho/\mu^2 l^4$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.45* Elegir la respuesta correcta. El coeficiente de presión es una relación de las fuerzas de presión a

(*a*) las fuerzas viscosas;
(*b*) las fuerzas de inercia;
(*c*) las fuerzas de gravedad;
(*d*) las fuerzas de tensión superficial;
(*e*) las fuerzas de energía elástica.

*4.46* ¿Cuántos parámetros Π se necesitan para expresar la función

$F(a,V,t,v,L) = 0$?

(*a*) 5 (*b*) 4 (*c*) 3 (*d*) 2 (*e*) 1

*4.47* ¿Cuál de los siguientes puede ser un parámetro Π de la función

$F(Q,H,g,V_0,\phi) = 0$

cuando $Q$ y $g$ se toman como variables repetidas?



(*a*) $Q^2/gH^4$ (*b*) $V_0^2/g^2Q$ (*c*) $Q/g\phi^2$ (*d*) $Q/\sqrt{gH}$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.48* Elegir el caso en que las fuerzas de inercia son de *escasa importancia*:

(*a*) flujo sobre la cresta de un vertedero;
(*b*) flujo a través de la transición en un canal abierto;
(*c*) las olas del mar rompiendo contra una pared;
(*d*) el flujo a través de un largo tubo capilar;
(*e*) el flujo a través de una válvula semiabierta.

*4.49* ¿Qué dos fuerzas son más importantes en el flujo laminar entre dos láminas paralelas muy próximas?

(*a*) de inercia y viscosa; (*b*) de presión y de inercia; (*c*) de gravedad y de presión; (*d*) viscosas y de presión; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.50* Una combinación adimensional de $\Delta p$, $\rho$, $l$, $Q$ es

(*a*) $\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}\frac{Q}{l^2}$ (*b*) $\frac{\rho Q}{\Delta p\, l^2}$ (*c*) $\frac{\rho l}{\Delta p\, Q^2}$ (*d*) $\frac{\Delta p\, lQ}{\rho}$

(*e*) $\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}\frac{Q}{l^2}$

*4.51* ¿Cuál debe ser la velocidad de un aceite, $\rho = 83{,}84$ UTM/m³, $\mu = 0{,}20$ poise, en una tubería de 24 mm de diámetro para que sea dinámicamente semejante al flujo del agua en una tubería de 6 mm de diámetro a velocidad de 3,05 m/seg y temperatura del agua de 20° C?

(*a*) 0,183 m/seg (*b*) 2,928 m/seg (*c*) 1,22 m/seg
(*d*) 18,30 m/seg (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.52* La velocidad medida en un punto de la coronación de un modelo de presa es de 2,5 m/seg. La velocidad en m/seg en el punto correspondiente del prototipo, para $\lambda = 25$, es

(*a*) 62,5 (*b*) 12,5 (*c*) 0,5 (*d*) 0,10 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.53* La altura de un resalto hidráulico se encontró que era de 4 cm en un modelo ($\lambda = 36$). La altura del resalto en el prototipo será

(*a*) 1,44 m (*b*) 0,24 m (*c*) no puede determinarse con los datos dados; (*d*) menor que 4 cm (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.54* Para un modelo de barco a escala 1 : 100 la resistencia de las olas es de 2,5 kg a su velocidad de proyecto. La resistencia de las olas sobre el correspondiente prototipo es, en kg,

(*a*) 2.500 (*b*) 25.000 (*c*) 250.000 (*d*) 2.500.000
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.55* El modelo de un proyectil a escala 1 : 5 tiene un coeficiente de resistencia

de 3,5 para M = 2,0. ¿Cuántas veces mayor será la resistencia sobre el prototipo cuando se dispara con el mismo número de Mach en el aire a la misma temperatura y densidad mitad?

(*a*) 3,12 (*b*) 12,5 (*c*) 25 (*d*) 100 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*4.56* Si la altura capilar $\Delta h$ de un líquido en un tubo circular de diámetro $D$ depende de la tensión superficial $\sigma$, y del peso específico $\gamma$, la fórmula de la altura capilar debe ser de la forma

(*a*) $\Delta h = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}}\, F\left(\frac{\sigma}{\gamma D^2}\right)$ (*b*) $\Delta h = c\left(\frac{\sigma}{\gamma D^2}\right)^n$ (*c*) $\Delta h = cD\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^n$

(*d*) $\Delta h = \sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}}\, F\left(\frac{\gamma D^2}{\sigma}\right)$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

## *Referencias*

Bridgman, P. W.: «Dimensional Analysis», Yale University Press, New Haven, Conn., 1922.

Chick, A. C.: «Dimensional Analysis and the Principle of Similitude as Applied to Hydraulic Experiments with Models», ASME Hydraulic Laboratory Practice, págs. 775-827, 1929.

Holt, M.: Dimensional Analysis, sec. 15 en «Handbook of Fluid Dynamics», ed. por V. L. Streeter, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.

«Hydraulic Models», ASCE Manual of Engineering Practice, n.º 25, 1942.

Ipsen, D. C.: «Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1960.

Langhaar, H. L.: «Dimensional Analysis and Theory of Models», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1951.

Murphy, G.: «Similitude in Engineering», The Ronald Press Company, Nueva York, 1950.

Sedov, L. I.: «Similarity and Dimensional Methods in Mechanics» (traducción inglesa ed. por M. Holt), Academic Press Inc., Nueva York, 1959.

# 5

# *Efecto de la viscosidad: resistencia fluida*

En el Cap. 3 se han estudiado las ecuaciones fundamentales que se usan en el análisis del movimiento de un fluido. En general, se consideró el fluido sin rozamientos internos, es decir, sin pérdidas de energía, y en los casos en que se supuso existían pérdidas de energía, éstas se calcularon sin entrar en las causas que las originan. En este capítulo se estudian los fluidos reales, es decir, aquellos fluidos en que la conversión de energía mecánica en térmica es importante. La viscosidad es la propiedad del fluido que origina la tensión de cortadura; es también el medio mediante el que se desarrollan las irreversibilidades o pérdidas. Sin viscosidad no existe resistencia al movimiento de un fluido. En este capítulo se desarrollan en primer lugar casos sencillos de flujo laminar permanente e incompresible. Ya que en estos casos se pueden calcular las pérdidas. Entonces se desarrolla mejor el concepto del número de Reynolds, presentado en el Cap. 4. Se introducen las relaciones de cortadura del movimiento turbulento utilizando la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl y se aplican a las distribuciones turbulentas de velocidad. A continuación vienen los conceptos de capa límite y de arrastre sobre cuerpos sumergidos. Después se examinan la resistencia al movimiento permanente, uniforme, incompresible y turbulento para conductos abiertos y cerrados, con una sección dedicada a los canales abiertos y al movimiento en tuberías. El capítulo termina con una sección sobre la mecánica de la lubricación.

### *5.1 Flujo laminar incompresible entre placas paralelas*

El caso general de flujo entre placas paralelas inclinadas se desarrolla primero para flujo laminar, teniendo la placa superior una velocidad constante $U$ (Fig. 5.1). El flujo entre placas fijas es un caso especial que se obtiene haciendo $U = 0$. En la Fig. 5.1 la placa superior se mueve paralela a la dirección del flujo, y hay una variación de presión en la dirección $l$. Se analiza considerando una delgada lámina de anchura unidad como

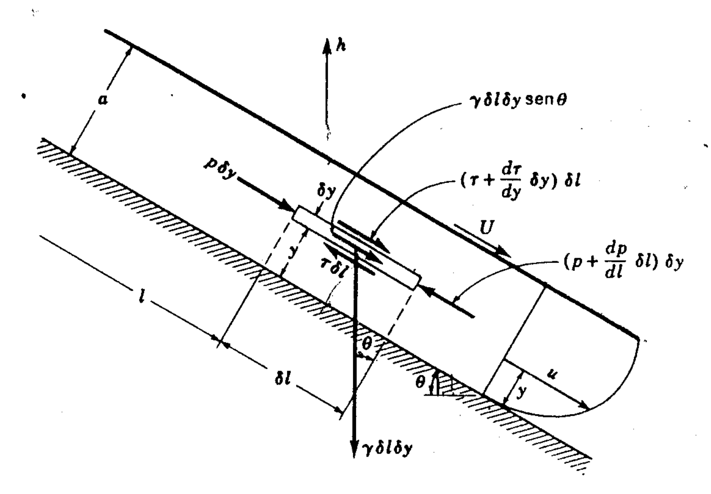



*Fig. 5.1 Flujo entre placas paralelas inclinadas con la placa superior en movimiento.*

un cuerpo libre. En flujo permanente la lámina se mueve con velocidad $u$ constante. La ecuación del movimiento para la lámina en movimiento permanente en la dirección de $l$ es

$$p\,\delta y - \left(p\,\delta y + \frac{dp}{dl}\delta l\,\delta y\right) - \tau\,\delta l + \left(\tau\,\delta l + \frac{d\tau}{dy}\delta y\,\delta l\right) + \gamma\,\delta l\,\delta y \operatorname{sen}\theta = 0$$

Después de dividir por el volumen del elemento y simplificar, resulta:

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \qquad (5.1.1)$$

donde se ha sustituido sen $\theta = -dh/dl$. Como no hay aceleración en la dirección $y$, el segundo miembro de la ecuación no es función de $y$. Integrando con respecto a $y$ nos da

$$\tau = y\frac{d}{dl}(p + \gamma h) + A$$

Ahora, sustituyendo de la ley de Newton de la viscosidad [Ec. (1.1.1)], el valor

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

de $\tau$,

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)y + \frac{A}{\mu}$$



Integrando de nuevo con respecto a $y$,

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B$$

en la cual $A$ y $B$ son constantes de integración que pueden calcularse teniendo en cuenta que la velocidad del fluido en contacto con las placas es igual a la velocidad de éstas; es decir, $u = U$ para $y = a$ y $u = 0$ para $y = 0$. Sustituyendo estos valores resulta:

$$B = 0 \qquad U = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2 + \frac{Aa}{\mu} + B$$

Eliminando $A$ y $B$,

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)(ay - y^2) \qquad (5.1.2)$$

Para placas horizontales, $h = 0$; ya que no hay gradiente debido a la presión o elevación, es decir, una distribución de presiones hidrostática $p + \gamma h = 0$, y la velocidad tiene una distribución lineal. Para placas fijas, $U = 0$, y la distribución de velocidades es parabólica. El caudal se calcula a partir de la Ec. (5.1.2) por integración:

$$Q = \int_0^a u\,dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^3 \qquad (5.1.3)$$

La velocidad máxima generalmente no se da en el plano medio.

***Ejemplo 5.1*** En la Fig. 5.2 una placa se mueve en relación con la otra como se ilustra. $\mu = 0{,}80$ poise, $\rho = 93{,}5$ UTM/m$^3$. Determinar la distribución de velocidades, el caudal y la tensión de cortadura sobre la placa superior.

En el punto superior

$$p + \gamma z = 1{,}5 \times 10^4 + 93{,}5 \times 9{,}8 \times 3 = 17.750 \text{ kg/m}^2$$

y en el punto más bajo

$$p + \gamma z = 1 \times 10^4 = 10.000 \text{ kg/m}^2$$

con el mismo origen. Por consiguiente,

$$\frac{d(p + \gamma z)}{dl} = \frac{10.000 - 17.750}{3\sqrt{2}} = -1.825 \text{ kg/m}^3$$

De la figura, $a = 5 \times 10^{-3}$ m, $U = -1$ m/seg, y de la Ec. (5.1.2),

$$u = -\frac{y}{5 \times 10^{-3}} + \frac{1.825}{2(0{,}8/98)}(0{,}005y - y^2)$$

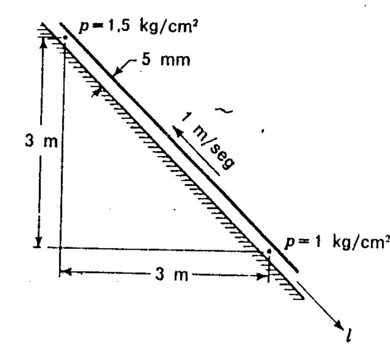



*Fig. 5.2 Flujo entre placas planas inclinadas.*

Después de simplificar

$$u = 359y - 111.800y^2$$

la velocidad máxima se presenta donde $du/dy = 0$, o sea, $y = 0{,}0016$ m = 1,6 mm. Vale $u_{max} = 0{,}289$ m/seg, y la velocidad mínima se presenta en la placa superior.

El caudal es

$$Q = \int_0^{0{,}005} u\, dy = 179{,}5y^2 - 37.266{,}7y^3 \Big]_0^{0{,}005}$$

$$= -0{,}17 \times 10^{-3}(\text{m}^3/\text{seg})\text{m} = -0{,}17(\text{l/seg})\text{m}$$

y es hacia arriba.

Para calcular la tensión de cortadura en la placa superior,

$$\frac{du}{dy}\Big]_{y=0{,}005} = 359 - 223.600y\Big]_{y=0{,}005} = -759$$

y

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{0{,}8}{98}(-759) = -6{,}19 \text{ kg/m}^2$$

Esta es la tensión de cortadura sobre el fluido en la placa; por tanto, la tensión de cortadura sobre la placa es 6,19 kg/m², oponiéndose al movimiento de la placa.

### Pérdidas mecánicas en flujo laminar

Vamos a deducir una expresión de las pérdidas para un flujo laminar unidimensional, aplicando las ecuaciones del movimiento y de la energía. En un flujo permanente en un tubo o entre placas paralelas no hay incremento de energía cinética, por lo que, en flujo horizontal, la caída de presión representa el trabajo realizado por el fluido por unidad de volumen y que se convierte en energía térmica por la acción de la tensión



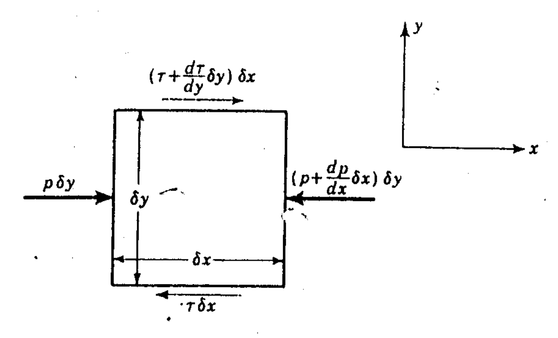



*Fig. 5.3 Fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido.*

viscosa. La energía convertida en energía térmica en la longitud $L$ por unidad de tiempo es $Q\,\Delta p$, siendo $\Delta p$ la caída de presión y $Q$ el caudal.

Una expresión de la energía mecánica que se convierte en energía térmica puede obtenerse a partir del trabajo interno realizado por el fluido en un flujo unidimensional. En primer lugar, la ecuación del movimiento aplicada a un elemento (Fig. 5.3) relaciona la tensión de cortadura y la caída de presión. No hay aceleración y, por consiguiente, $\Sigma f_x = 0$, y

$$p\,\delta y - \left(p + \frac{dp}{dx}\,\delta x\right)\delta y - \tau\,\delta x + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}\,\delta y\right)\delta x = 0$$

Después de simplificar,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \tag{5.1.4}$$

que expresa que la variación de presión por unidad de longitud en la dirección de $x$ es igual a la variación de tensión de cortadura por unidad de longitud en la dirección de $y$. Evidentemente, $dp/dx$ es independiente de $y$ y $d\tau/dy$ es independiente de $x$.

El trabajo realizado por unidad de tiempo (potencia) sobre un elemento fluido (Fig. 5.4) en un flujo unidimensional, se compone del trabajo realizado sobre el elemento por la presión y por la tensión de cortadura, menos el trabajo que el elemento realiza sobre el fluido que le rodea, o sea:

$$p\left(u + \frac{du}{dy}\frac{\delta y}{2}\right)\delta y - \left[\left(p + \frac{dp}{dx}\,\delta x\right)\left(u + \frac{du}{dy}\frac{\delta y}{2}\right)\delta y + \tau u\,\delta x + \frac{d}{dy}(\tau u)\,\delta y\,\delta x - \tau u\,\delta x\right]$$

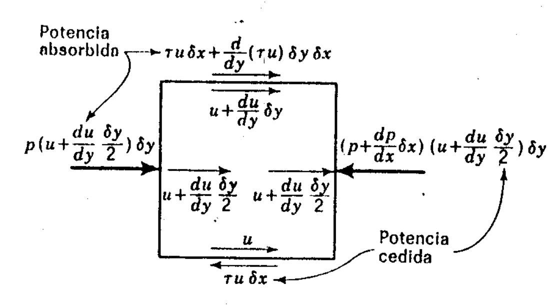



*Fig. 5.4 Trabajo efectuado sobre un elemento de fluido en movimiento unidimensional.*

Después de simplificar,

$$\frac{\text{Potencia}}{\text{Unidad de volumen}} = \frac{d}{dy}(\tau u) - u\frac{dp}{dx} \tag{5.1.5}$$

Desarrollando la Ec. (5.1.5) y sustituyendo la Ec. (5.1.4)

$$\frac{\text{Potencia}}{\text{Unidad de volumen}} = \tau\frac{du}{dy} + u\frac{d\tau}{dy} - u\frac{dp}{dx} = \tau\frac{du}{dy} \tag{5.1.6}$$

Por la ley de Newton de la viscosidad,

$$\frac{\text{Potencia}}{\text{Unidad de volumen}} = \tau\frac{du}{dy} = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \frac{\tau^2}{\mu} \tag{5.1.7}$$

Esta potencia se gasta por el rozamiento viscoso y se convierte en energía térmica.

Integrando la expresión en una longitud $L$ entre dos placas paralelas y teniendo en cuenta las Ecs. (5.1.7) y (5.1.2) para $U = 0$,

$$\text{Potencia} = \int_0^a \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 L\,dy = \mu L\int_0^a\left[\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}(2y-a)\right]^2 dy$$

$$= \left(\frac{dp}{dl}\right)^2\frac{a^3L}{12\mu}$$

Introduciendo el valor $Q$ de la Ec. (5.1.3), para $U = 0$,

$$\text{Pérdidas} = \text{Potencia} = -Q\frac{dp}{dl}L = Q\,\Delta p$$

siendo $\Delta p$ la caída de presión en la longitud $L$. La expresión de la potencia por unidad de volumen [Ec. (5.1.7)] es también aplicable al caso



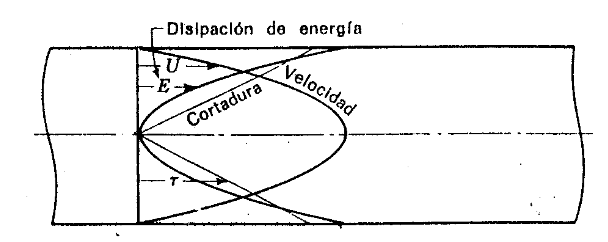



*Fig. 5.5 Distribución de la velocidad, la cortadura y las pérdidas en un tubo redondo.*

de flujo laminar en un tubo. La disipación de energía o conversión en calor es tanto mayor cuanto mayor sea $du/dy$. Las distribuciones de la tensión de cortadura, velocidades y de disipación de energía se representan en la Fig. 5.5 para un tubo circular.

## 5.2 Flujo laminar a través de tubos circulares y anillos circulares

Para flujo permanente e incompresible a través de un tubo circular o un anillo, se toma como cuerpo libre un espacio anular infinitesimal cilíndrico (Fig. 5.6), y se aplica la ecuación del movimiento en la dirección $l$, con aceleración cero. De la figura,

$$2\pi r\,\delta r\,p - \left[2\pi r\,\delta r\,p + 2\pi r\,\delta r\frac{dp}{dl}\delta l\right] + 2\pi r\,\delta l\,\tau$$

$$-\left[2\pi r\,\delta l\,\tau + \frac{d}{dr}(2\pi r\,\delta l\,\tau)\,\delta r\right] + \gamma 2\pi r\,\delta r\,\delta l\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Sustituyendo sen $\theta$ por $-dh/dl$ y dividiendo por el volumen del cuerpo libre $2\pi r\,\delta r\,\delta l$,

$$\frac{d}{dl}(p+\gamma h) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\tau r) = 0 \tag{5.2.1}$$

Como $d(p+\gamma h)/dl$ no es función de $r$, se puede multiplicar la ecuación por $r\,\delta r$ e integrando respecto a $r$, da

$$\frac{r^2}{2}\frac{d}{dl}(p+\gamma h) + \tau r = A \tag{5.2.2}$$

donde $A$ es la constante de integración. Para un tubo circular esta ecuación se ha de satisfacer cuando $r = 0$, por tanto $A = 0$ para este caso. Sustituyendo,

$$\tau = -\mu\frac{du}{dr}$$

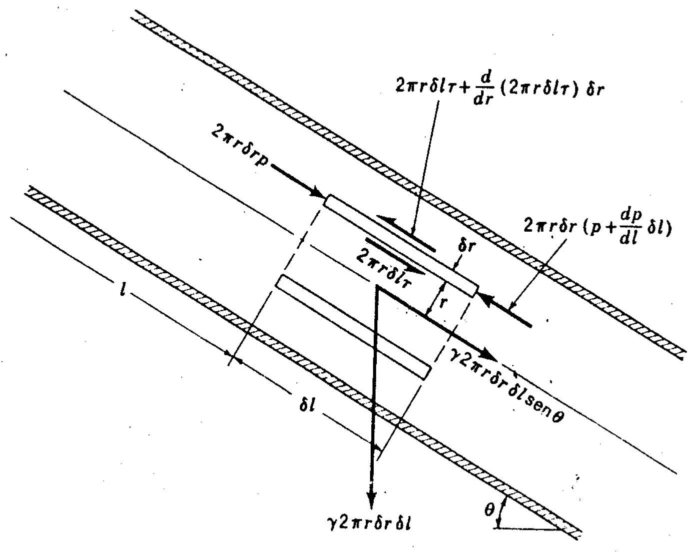



*Fig. 5.6 Diagrama de cuerpo libre de un elemento cilíndrico para flujo laminar en un tubo circular inclinado.*

nótese que se necesita el signo menos para obtener el signo del término $\tau$ en la Fig. 5.6 (se considera que $u$ disminuye con $r$, por tanto $du/dr$ es negativa)

$$du = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)r\,dr - \frac{A}{\mu}\frac{dr}{r}$$

Integrando otra vez,

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h) - \frac{A}{\mu}\ln r + B \tag{5.2.3}$$

Para el caso anular, $u = 0$ cuando $r = b$, radio interior del tubo, y $u = 0$ cuando $r = a$ (Fig. 5.7). Eliminando $A$ y $B$,

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln b/a}\ln\frac{a}{r}\right) \tag{5.2.4}$$

y para el caudal a través de un anillo (Fig. 5.8),

$$Q = \int_b^a 2\pi r u\,dr = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln a/b}\right] \tag{5.2.5}$$



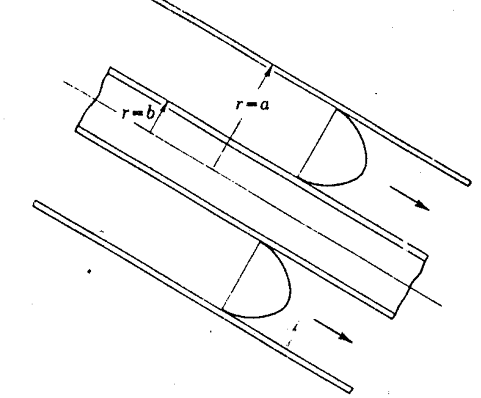



*Fig. 5.7 Flujo a través de un anillo.*

*Tubo circular. Ecuación de Hagen-Poiseuille*

Para el tubo circular, $A = 0$ en la Ec. (5.2.3) y $u = 0$ para $r = a$,

$$u = -\frac{(a^2 - r^2)}{4\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h) \tag{5.2.6}$$

La velocidad máxima $u_{max}$ viene dada, para $r = 0$, por

$$u_{max} = -\frac{a^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h) \tag{5.2.7}$$

Como la distribución de velocidades es un paraboloide de revolución (Fig. 5.5), su volumen es la mitad del cilindro circunscrito, por tanto la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima,

$$V = -\frac{a^2}{8\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h) \tag{5.2.8}$$

El caudal $Q$ es igual a $V\pi a^2$,

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h) \tag{5.2.9}$$

También se puede obtener el caudal integrando la velocidad $u$ sobre el área, es decir, utilizando la Fig. 5.8:

$$Q = \int_0^a 2\pi r u\,dr$$

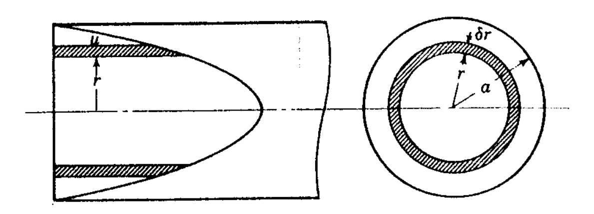



*Fig. 5.8 Elemento de área del anillo utilizado para calcular caudales.*

Para un tubo horizontal, $h$ = const; escribiendo la caída de presión $\Delta p$ en la longitud $L$,

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dl}$$

Utilizando el diámetro $D$ del tubo en lugar del radio,

$$Q = \frac{\Delta p \pi D^4}{128\mu L} \qquad (5.2.10a)$$

La velocidad media $V$ es $Q/\pi r^2$, o sea:

$$V = \frac{\Delta p D^2}{32\mu L} \qquad (5.2.10b)$$

que es la mitad de la velocidad máxima.

En la Ec. (5.2.10$a$) puede despejarse la caída de presión, que es la pérdida de energía por unidad de volumen,

$$\Delta p = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4} \qquad (5.2.11)$$

Por tanto, la pérdida de energía es directamente proporcional a la viscosidad, a la longitud y al caudal e inversamente a la cuarta potencia del diámetro. Debe notarse que la rugosidad del tubo no entra en la ecuación. La Ec. (5.2.10$a$) es conocida como *ecuación de Hagen-Poiseuille*; porque fue obtenida experimentalmente por Hagen en 1839 e independientemente por Poiseuille en 1840. La deducción analítica fue hecha por Wiedemann en 1856.

Las Ecs. (5.2.1) a (5.2.10) no son válidas en un cierto trozo al comienzo de la tubería. Si el fluido entra en la tubería procedente de un depósito a través de una entrada abocinada, la velocidad al comienzo del tubo es casi uniforme sobre la sección recta. La acción de la tensión de cortadura en la pared (como la velocidad debe de ser cero en la pared) es la de frenar el fluido cercano a la pared. Por la ecuación de la continuidad



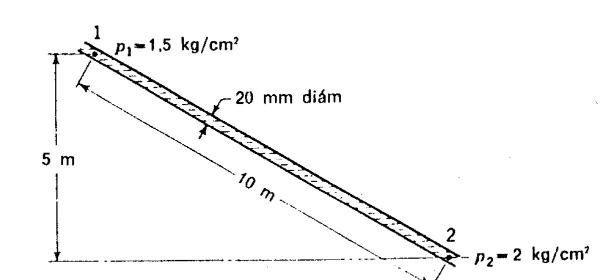



*Fig. 5.9 Flujo a través de un tubo inclinado.*

la velocidad debe de aumentar en la región central. La longitud de la transición $L$ hasta que la distribución de velocidades es parabólica es una función del número de Reynolds. Langhaar† dedujo la fórmula teórica:

$$\frac{L'}{D} = 0{,}058\mathbf{R}$$

que está de acuerdo con las observaciones experimentales.

***Ejemplo 5.2*** Determinar la dirección del flujo a través del tubo representado en la Fig. 5.9, siendo $\gamma = 800$ kg/m³, $\mu = 0{,}40$ poises. Calcular el caudal en litros por minuto y el número de Reynolds del flujo.

En la sección 1,

$$p + \gamma h = 1{,}5 \times 10^4 + 800 \times 5 = 19.000 \text{ kg/m}^2$$

y en la sección 2,

$$p + \gamma h = 2 \times 10^4 = 20.000 \text{ kg/m}^2$$

tomando el origen de cotas $h$ en la sección 2. El fluido se mueve de 2 a 1 porque la energía es mayor en 2 (la energía cinética debe ser la misma en ambas secciones) que en 1.

Para determinar el caudal se escribe la expresión

$$-\frac{d}{dl}(p + \gamma h) = -\frac{19.000 - 20.000}{10} = 100 \text{ kg/m}^3$$

y sustituyéndola en la Ec. (5.2.10$a$),

$$Q = 100\frac{\pi \times 10^{-8}}{8(0{,}40/98)} = 0{,}0000961 \text{ m}^3/\text{seg}$$

† H. L. Langhaar, Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube, *J. Appl. Mech.*, vol. 9, págs. 55-58, 1942.

En litros por minuto el caudal será:

$$Q = 0{,}0000961 \times 10^3 \times 60 = 5{,}766 \text{ l/min}$$

La velocidad media es $Q/\pi r_0^2$, es decir,

$$V = \frac{0{,}0000961}{\pi \times 10^{-4}} = 0{,}306 \text{ m/seg}$$

y el número de Reynolds es

$$\mathbf{R} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0{,}306 \times 0{,}02 \times 800 \times 98}{9{,}8 \times 0{,}40} = 122{,}4$$

Si el número de Reynolds hubiese sido superior a 2.000, la ecuación de Hagen-Poiseuille no se podría haber aplicado, como se verá en la Sec. 5.3.

El factor de corrección de la energía cinética $\alpha$ [ver Ec. (3.10.2)] puede determinarse para flujo laminar en un tubo, por medio de las Ecs. (5.2.6) y (5.2.7),

$$\frac{u}{V} = 2\frac{u}{u_{max}} = 2\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \tag{5.2.12}$$

Sustituyendo en la expresión de $\alpha$,

$$\alpha = \frac{1}{A}\int \left(\frac{u}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} \left\{2\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\right\}^3 2\pi r\, dr = 2 \tag{5.2.13}$$

Hay doble energía cinética en el flujo laminar en un tubo que en un flujo uniforme a la misma velocidad media.

## 5.3 Número de Reynolds

Se define el flujo laminar como aquel flujo en el cual el fluido se mueve en capas o láminas, deslizándose una fina capa sobre la adyacente con solo un intercambio molecular de cantidades de movimiento. Cierta tendencia hacia la inestabilidad y la turbulencia es frenada por las fuerzas de cortadura viscosas que resisten los movimientos relativos de las capas fluidas adyacentes. El flujo turbulento, en cambio, tiene un movimiento de partículas fluidas muy errático, con un violento intercambio transversal de cantidades de movimiento. La naturaleza del flujo, es decir, el que sea laminar o turbulento, y su posición relativa en una escala que indica la importancia relativa de la tendencia a que sea laminar o turbulento, se expresa por el *número de Reynolds*. El concepto de número de Reynolds



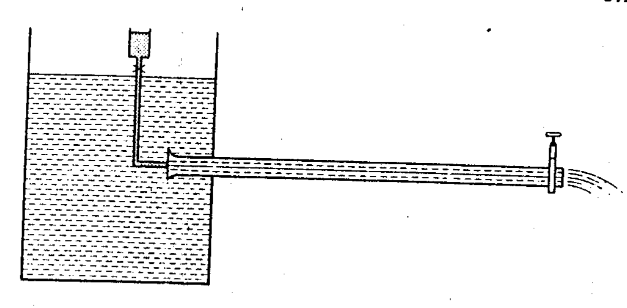


*Fig. 5.10 Aparato de Reynolds.*

y su interpretación se estudia en esta sección. En la Sec. 3.6 se dedujo la ecuación del movimiento en el supuesto de que el fluido estuviera desprovisto de rozamientos internos, es decir, de que careciera de viscosidad. Se pueden deducir ecuaciones más generales que incluyen la viscosidad teniendo en cuenta la tensión de cortadura. Estas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Navier-Stokes) son complicadas, no lineales y, en general, no pueden integrarse, es decir, no puede encontrarse una solución general. En el siglo pasado Osborne Reynolds† estudió estas ecuaciones para intentar determinar cuándo dos flujos diferentes pueden considerarse semejantes.

Dos flujos fluidos se dice que son *dinámicamente semejantes* cuando

1. Son semejantes geométricamente, es decir, las relaciones lineales correspondientes están en una relación constante;
2. Las líneas de corriente correspondientes son semejantes geométricamente, o las presiones en puntos correspondientes están en una relación constante.

Considerando dos flujos semejantes geométricamente, Reynolds dedujo que son semejantes dinámicamente si las ecuaciones diferenciales generales son idénticas. Cambiando las unidades de masa, longitud y tiempo en un sistema de ecuaciones y determinando las condiciones que deben satisfacerse para hacerlas idénticas a las ecuaciones originales, Reynolds encontró que el parámetro adimensional $ul\rho/\mu$ debía ser el mismo en ambos casos. En éste, $u$ es una velocidad característica, $l$ es una longitud característica, $\rho$ es la densidad y $\mu$ es la viscosidad. Este parámetro se llama número de Reynolds, **R**,

$$\mathbf{R} = \frac{ul\rho}{\mu} \tag{5.3.1}$$

Para encontrar el significado de su parámetro adimensional, Reynolds

† O. Reynolds, An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Laws of Resistance in Parallel Channels, *Trans. Roy. Soc. London*, vol. 174, 1883.

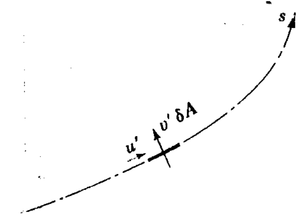



*Fig. 5.11 Notación para el esfuerzo cortante debido al flujo turbulento.*

hizo las experiencias de movimiento de agua a través de tubos de cristal que se ilustra en la Fig. 5.10. Un tubo de vidrio se montó horizontalmente con un extremo en un depósito y una válvula en el extremo opuesto. El extremo de aguas arriba se hizo abocinado, disponiéndose frente a la bocina un fino tubo que permite inyectar en la corriente del tubo de vidrio un fino filete de una tintura. Reynolds eligió para formar su número la velocidad media $V$ como velocidad característica y el diámetro del tubo $D$ como longitud característica, de tal manera que $\mathbf{R} = VD\rho/\mu$.

Para pequeños caudales, el filete coloreado se mueve siguiendo una línea recta a través del tubo, demostrando que el flujo es laminar. Cuando se aumenta el caudal el número de Reynolds crece, puesto que $D$, $\rho$, $\mu$ son constantes y $V$ es directamente proporcional al caudal. Al ir aumentando el caudal se llega a uno para el cual el filete coloreado se va ondulando y por último se rompe bruscamente difundiéndose la tintura a través del tubo. El flujo se ha hecho turbulento con un violento intercambio de cantidades de movimiento que ha roto totalmente el movimiento ordenado del flujo laminar. Con cuidadosas manipulaciones Reynolds fue capaz de obtener un valor $\mathbf{R} = 12.000$ antes de que empezase la turbulencia. Un investigador posterior, usando el mismo aparato que Reynolds, obtuvo un valor de 40.000, permitiendo al agua reposar en el depósito varios días antes de la experiencia y tomando precauciones para evitar vibraciones del agua o del aparato. Estos números, llamados *números críticos superiores de Reynolds*, no tienen valor práctico alguno desde el momento en que las tuberías ordinarias tienen irregularidades que originan flujos turbulentos para valores mucho menores del número de Reynolds.

Comenzando con flujo turbulento en el tubo de vidrio, Reynolds encontró que se convertía siempre en laminar cuando la velocidad se reducía hasta que se hiciera $\mathbf{R}$ menor que 2.000. Este es el *número de Reynolds crítico inferior* para movimiento de fluidos en tuberías y es el de verdadera importancia práctica. En las instalaciones usuales, el flujo cambiará de laminar a turbulento en el intervalo de números de Reynolds entre 2.000 y 4.000. En este libro nosotros supondremos que el cambio ocurre para $\mathbf{R} = 2.000$. En flujo laminar la pérdida de energía es directamente proporcional a la velocidad media, mientras que en flujo turbulento la pérdida es proporcional a la velocidad elevada a un exponente que varía entre 1,7 y 2.



Actualmente se usan muchos números de Reynolds, además del que se ha definido, que se refiere a un tubo recto y circular. Así, por ejemplo, el movimiento de una esfera a través de un fluido puede ser caracterizado por $UD\rho/\mu$, en el cual $U$ es la velocidad de la esfera, $D$ es su diámetro y $\rho$ y $\mu$ son la densidad y la viscosidad del fluido.

El número de Reynolds puede ser considerado como la relación de una tensión de cortadura $\tau_t$ debida a la turbulencia a una tensión de cortadura $\tau_v$ debida a la viscosidad. Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento al flujo a través de un elemento de área $\delta A$ (Fig. 5.11) puede determinarse la tensión de cortadura aparente debida a la turbulencia. Si $v'$ es la velocidad normal a $\delta A$ y $u'$ es la diferencia de velocidades, o la velocidad de fluctuación entre las dos caras del área, entonces, por la Ec. (3.11.9), la fuerza cortante $\delta F$ vale

$$\delta F = \rho v' \, \delta A \, u'$$

siendo $\rho v' \, \delta A$ la masa que por segundo cambia su cantidad de movimiento y $u'$ la velocidad final menos la velocidad inicial en la dirección de $s$. Se obtiene la tensión de cortadura $\tau_t$, debida a la fluctuación turbulenta, dividiendo por $\delta A$,

$$\tau_t = \rho u' v' \tag{5.3.2}$$

La tensión de cortadura debida a la viscosidad puede escribirse:

$$\tau_v = \frac{\mu u'}{l} \tag{5.3.3}$$

en la cual $u'$ se interpreta como la variación de velocidad en la distancia $l$, medida normalmente a la velocidad. Entonces la relación

$$\frac{\tau_t}{\tau_v} = \frac{v' l \rho}{\mu}$$

tiene la forma de un número de Reynolds.

La *naturaleza* de un flujo dado, de un fluido incompresible, se caracteriza por el número de Reynolds. Para grandes valores de $\mathbf{R}$ uno o todos los términos del numerador son grandes comparados con el denominador. Esto implica una gran expansión del fluido, alta velocidad, gran densidad, extremadamente pequeña viscosidad o una combinación de todos estos efectos. Los términos del numerador se refieren a las fuerzas de *inercia*, es decir, a las fuerzas que se originan por la aceleración o deceleración del fluido, mientras que el término del denominador es la causa de las fuerzas de cortadura viscosas, por lo que el número de Reynolds puede ser considerado como una relación de las fuerzas de inercia a las fuerzas viscosas. Un gran valor de $\mathbf{R}$ indica un flujo altamente turbulento con pérdidas proporcionales al cuadrado de la velocidad. La turbulencia puede ser a *pequeña escala*, compuesta de muchísimos pequeños

torbellinos que rápidamente convierten la energía mecánica en energía térmica por medio de la acción viscosa; o puede ser a *gran escala*, como en los enormes remolinos en un río o ciclones en la atmósfera. Los grandes torbellinos generan otros más pequeños, que al girar crean la turbulencia a pequeña escala. El flujo turbulento puede ser considerado como un flujo ordenado, posiblemente uniforme, con un flujo secundario superpuesto a él. El flujo turbulento a pequeña escala tiene pequeñas fluctuaciones en velocidad que se presentan con gran frecuencia. La media cuadrática de las fluctuaciones y la frecuencia del cambio de signo de las fluctuaciones son medidas cuantitativas de la turbulencia. En general, la intensidad de la turbulencia aumenta con el número de Reynolds.

Para valores intermedios de **R** los efectos viscosos y de inercia son ambos importantes y los cambios de viscosidad cambian la distribución de velocidades y la resistencia del flujo.

Para el mismo valor de **R** dos conductos cerrados geométricamente semejantes (por ejemplo, uno de ellos de tamaño doble del otro) tendrán la misma relación de pérdida de energía mecánica a altura de velocidad. El uso del número de Reynolds proporciona un método para utilizar los resultados experimentales de un fluido para predecir los resultados en un caso semejante con otro fluido.

### 5.4 Longitud de mezcla de Prandtl. Distribución de velocidades en flujo turbulento

La pérdida de presión y la ley de distribución de velocidades para varios casos de flujo laminar se consideraron en la sección anterior. En este número se desarrolla la teoría de la longitud de mezcla de la turbulencia con su aplicación a varios casos de movimiento de fluidos. La tensión de cortadura aparente en flujo turbulento se expresa por la Ec. (3.3.2)

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy} \tag{5.4.1}$$

incluyendo el esfuerzo viscoso directo. Prandtl† ha desarrollado una teoría de la turbulencia más práctica llamada *teoría de la longitud de mezcla*. En la Sec. 5.3 la tensión de cortadura $\tau$, debida a la turbulencia, se demostró que era

$$\tau = \rho u'v' \tag{5.3.2}$$

en la cual $u'$, $v'$ son las velocidades de fluctuación en un punto. En la teoría

† Para considerar el desarrollo de la teoría de la turbulencia consultar L. Prandtl, «Essentials of Fluid Dynamics», págs. 105-145, Hafner Publishing Company, Inc., Nueva York, 1952.



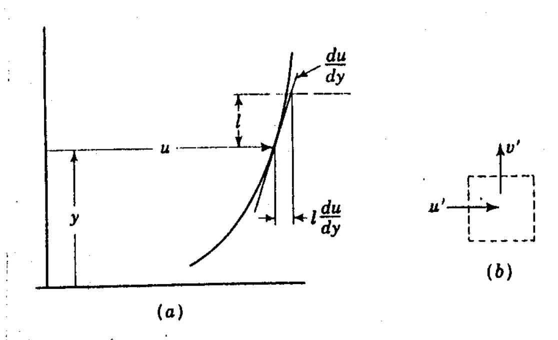



*Fig. 5.12* *Notación para la teoría de la longitud de mezcla.*

de Prandtl† las expresiones de $u'$ y $v'$ se obtienen en función de la longitud de mezcla $l$, y del gradiente de velocidad $du/dy$, siendo $u$ la velocidad media temporal en un punto e $y$ la distancia normal a $u$, usualmente medida desde la pared. En un gas, una molécula, antes de chocar con otra, recorre una distancia media que se conoce con el nombre de *camino libre medio del gas*. De modo análogo Prandtl supuso (Fig. 5.12*a*) que una partícula de un fluido se desplaza una distancia $l$ antes que cambie su cantidad de movimiento. La fluctuación $u'$ está entonces relacionada con $l$ por

$$u' \sim l\frac{du}{dy}$$

lo que significa que el cambio de velocidad depende del cambio de la velocidad media temporal entre dos puntos distantes $l$ en la dirección de $y$. Partiendo de la ecuación de continuidad, él razonó que debe existir una correlación entre $u'$ y $v'$ (Fig. 5.12*b*), así es que $v'$ es proporcional a $u'$,

$$v' \sim u' \sim l\frac{du}{dy}$$

Sustituyendo estos valores de $u'$ y $v'$ en la Ec. (5.3.2) y metiendo el factor de proporcionalidad dentro de $l$, se obtiene la ecuación de definición de la longitud de mezcla:

$$\tau = \rho l^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{5.4.2}$$

$\tau$ siempre actúa en el sentido que hace que la distribución de velocidad

† L. Prandtl, Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 5, n.° 2, pág. 136, 1925.

sea más uniforme. Cuando se comparan las Ecs. (5.4.2) y (3.3.1) se encuentra que:

$$\eta = \rho l^2 \frac{du}{dy} \tag{5.4.3}$$

Pero $\eta$ no es una propiedad del fluido como la viscosidad dinámica, ya que $\eta$ depende de la densidad, del gradiente de velocidades y de la longitud de mezcla $l$. En flujo turbulento hay un violento intercambio de partículas de fluido, excepto en las paredes o muy cerca de ellas, donde este intercambio se reduce a cero; por tanto, $l$ debe aproximarse a cero en la pared que limita al fluido. La relación que liga a $l$ con la distancia a la pared $y$ no viene dada por la teoría de Prandtl. Von Kármán† sugirió, después de considerar las relaciones de semejanza en un fluido turbulento, que

$$l = \kappa \frac{du/dy}{d^2u/dy^2} \tag{5.4.4}$$

siendo $\kappa$ una constante universal del flujo turbulento, independiente de la configuración del fluido y del valor del número de Reynolds.

En los flujos turbulentos, $\eta$, también llamada *viscosidad de remolino*, es generalmente mucho mayor que $\mu$. Puede ser considerada como un coeficiente de intercambio de cantidades de movimiento, expresando el intercambio de cantidades de movimiento desde puntos donde la concentración es más alta a puntos donde es más baja. Es conveniente utilizar una *viscosidad cinemática de remolino* $\epsilon = \eta/\rho$, que es una propiedad del flujo únicamente y es análoga a la viscosidad cinemática.

### *Distribuciones de velocidades*

Utilizando el concepto de longitud de mezcla pueden obtenerse las distribuciones de velocidades en flujo turbulento para los casos de una placa plana y tuberías cilíndricas. Para flujo turbulento sobre una superficie plana lisa (tal como el viento soplando sobre un suelo liso), la tensión de cortadura en el fluido es constante, por ejemplo, $\tau_0$. La Ec. (5.4.1) es aplicable, pero $\eta$ se aproxima a cero en la superficie y $\mu$ se hace despreciable lejos de la superficie. Si $\eta$ es despreciable para la película de espesor $y = \delta$ en la cual $\mu$ predomina, la Ec. (5.4.1) nos da

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}\frac{u}{y} = \nu \frac{u}{y} \qquad y \leq \delta \tag{5.4.5}$$

† Th. von Kármán, Turbulence and Skin Friction, *J. Aeron. Sci.*, vol. 1, n.° 1, pág. 1, 1934.



El término $\sqrt{\tau_0/\rho}$ tiene las dimensiones de una velocidad y se llama velocidad de corte $u_*$. Por consiguiente,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \qquad y \leq \delta \tag{5.4.6}$$

demuestra que existe una relación lineal entre $u$ e $y$ en la película laminar. Para $y > \delta$, $\mu$ se desprecia, y la Ec. (5.4.1) da

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{5.4.7}$$

Como $l$ tiene las dimensiones de una longitud, por consideraciones de análisis dimensional será proporcional a $y$ (la única dimensión lineal significativa), o sea, $l = \kappa y$. Sustituyendo en la Ec. (5.4.7) y reagrupando

$$\frac{du}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\frac{dy}{y} \tag{5.4.8}$$

Después de integrar,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln y + \text{const} \tag{5.4.9}$$

Conviene señalar que este valor de $u$ sustituido en la Ec. (5.4.4) también determina a $l$ proporcional a $y$ ($d^2u/dy^2$ es negativa, porque el gradiente de velocidades disminuye cuando $y$ aumenta). La Ec. (5.4.9) está de acuerdo con las experiencias y, de hecho, es también útil cuando $\tau$ es una función de $y$, porque la mayor parte del cambio de velocidad ocurre cerca de la pared donde $\tau$ es sustancialmente constante. Esto puede aplicarse satisfactoriamente a flujo turbulento en tuberías.

***Ejemplo 5.3*** Por integración de la Ec. (5.4.9) encontrar la relación entre la velocidad media $V$ y la velocidad máxima $u_m$ en flujo turbulento en una tubería.

Cuando $y = r_0$, $u = u_m$, por tanto,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{\kappa}\ln\frac{y}{r_0}$$

El caudal $V\pi r_0{}^2$ se obtiene integrando la distribución de velocidades

$$V\pi r_0^2 = 2\pi\int_0^{r_0-\delta} ur\,dr = 2\pi\int_\delta^{r_0}\left(u_m + \frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{y}{r_0}\right)(r_0 - y)\,dy,$$

La integración no puede extenderse hasta el límite $y = 0$, pues la ecuación solo

sirve en la zona del flujo turbulento. El volumen que por segundo fluye por la zona laminar es tan pequeño que puede despreciarse. Entonces,

$$V = 2\int_{\delta/r_0}^{1}\left(u_m + \frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{y}{r_0}\right)\left(1 - \frac{y}{r_0}\right) d\left(\frac{y}{r_0}\right)$$

siendo la variable de integración $y/r_0$. Integrando,

$$V = 2\left\{u_m\left[\frac{y}{r_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^2\right] + \frac{u_*}{\kappa}\left[\frac{y}{r_0}\ln\frac{y}{r_0} - \frac{y}{r_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^2\ln\frac{y}{r_0} + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{r_0}\right)^2\right]\right\}_{\delta/r_0}^{1}$$

Como $\delta/r_0$ es muy pequeño, los términos como $\delta/r_0$ y $(\delta/r_0)\ln\delta/r_0$ son despreciables ($\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$), por tanto,

$$V = u_m - \frac{3}{2}\frac{u_*}{\kappa}$$

o sea

$$\frac{u_m - V}{u_*} = \frac{3}{2\kappa}$$

Se calcula la constante de la Ec. (5.4.9) siguiendo el método de Bakhmeteff†, $u = u_w$, la «velocidad en la pared» cuando $y = \delta$. Según la Ec. (5.4.6).

$$\frac{u_w}{u_*} = \frac{u_*\delta}{\nu} = N \tag{5.4.10}$$

de la cual se deduce que $u_*\delta/\nu$ debe tener un valor crítico $N$ para el cual el flujo cambia de laminar a turbulento, puesto que es de la forma del número de Reynolds. Sustituyendo $u = u_w$ para $y = \delta$ en la Ec. (5.4.9) y utilizando la Ec. (5.4.10)

$$\frac{u_w}{u_*} = N = \frac{1}{\kappa}\ln\delta + \text{const} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{N\nu}{u_*} + \text{const}$$

Después de eliminar la constante,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu_*}{\nu} + N - \frac{1}{\kappa}\ln N$$

† B. A. Bakhmeteff, «The Mechanics of Turbulent Flow», Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.



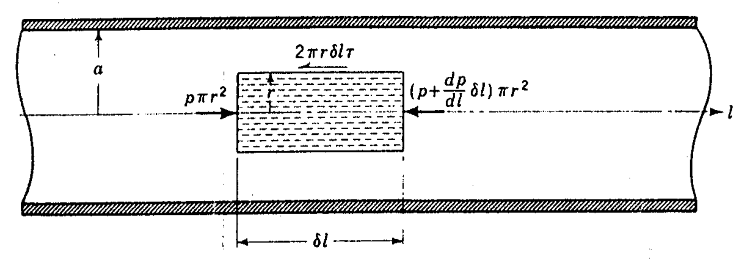



*Fig. 5.13* Diagrama de cuerpo libre para flujo permanente a través de un tubo redondo.

o sea,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu_*}{\nu} + A \tag{5.4.11}$$

en la cual $A = N - \frac{1}{\kappa}\ln N$ se ha encontrado experimentalmente poniendo en un gráfico $u/u_*$ en función de $\ln yu_*/\nu$. Para placas planas, $\kappa = 0{,}417$, $A = 5{,}84$, pero para tuberías de paredes lisas Nikuradse† obtuvo experimentalmente $\kappa = 0{,}40$, $A = 5{,}5$.

Prandtl ha desarrollado una fórmula de distribución de velocidades exponencial para flujo turbulento en tuberías,

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n \tag{5.4.12}$$

en la cual $n$ varía con el número de Reynolds. Esta ecuación empírica solo es válida a alguna distancia de la pared. Para **R** menor que 100.000, $n = 1/7$, y para valores más grandes de **R**, $n$ disminuye. Las leyes de distribución de velocidades, Ecs. (5.4.11) y (5.4.12), tienen el defecto de no dar para $du/dy$ un valor nulo en el centro de la tubería.

***Ejemplo 5.4*** Encontrar una expresión aproximada para la distribución de la longitud de mezcla en un flujo turbulento en una tubería a partir de la ley de Prandtl de la potencia 1/7.

Estableciendo el equilibrio de fuerzas para un flujo permanente en un tubo circular (Figura 5.13)

$$\tau = -\frac{dp}{dl}\frac{r}{2}$$

† J. Nikuradse, Gesetzmassigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, *VDI Forschungsh.*, vol. 356, 1932.

En la pared

$$\tau_0 = -\frac{dp}{dl}\frac{a}{2}$$

por consiguiente,

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{a} = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

Despejando $l$,

$$l = \frac{u_* \sqrt{1 - y/r_0}}{du/dy}$$

Por la Ec. (5.4.12)

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

se obtiene el gradiente de velocidades aproximado,

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_m}{r_0}\frac{1}{7}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{-6/7}$$

y

$$\frac{l}{r_0} = \frac{u_*}{u_m} 7 \left(\frac{y}{r_0}\right)^{6/7} \sqrt{1 - y/r_0}$$

La magnitud sin dimensiones $(u_m - u)/u_*$, llamada *defecto de velocidad*, es solamente función de $y/r_0$ para grandes números de Reynolds (Ejemplo 5.3), sea la superficie de la tubería lisa o rugosa. Por la Ec. (5.4.9) calculando la constante para $u = u_m$ cuando $y = r_0$,

$$\frac{u_m - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y} \qquad (5.4.13)$$

Para tuberías rugosas, puede suponerse que la velocidad es $u_w$ a una distancia de la pared $y_w = m\epsilon$, en el cual $\epsilon$ es una altura típica de las proyecciones de la rugosidad y $m$ un coeficiente de forma que depende de la naturaleza de la rugosidad. Sustituyendo en la Ec. (5.4.13) y eliminando $u_m/u_*$ entre las dos ecuaciones,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon} + \frac{u_w}{u_*} - \frac{1}{\kappa} \ln m \qquad (5.4.14)$$



en la cual los dos últimos términos del segundo miembro son constantes para un tipo dado de rugosidad,

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon} + B \qquad (5.4.15)$$

En los experimentos de Nikuradse con tuberías de rugosidad artificial se pegaron en las paredes interiores de la tubería granos de arena de tamaño constante (los que pasan por una criba dada y son retenidos por otra criba ligeramente más fina). Si $\epsilon$ representa el diámetro de los granos de arena, experimentalmente se ha demostrado que $\kappa = 0{,}40$, $B = 8{,}48$.

## 5.5 *Procesos de flujo*

El violento intercambio de partículas fluidas tiende a hacer más uniforme dentro del fluido la concentración salina o la temperatura, la concentración de sedimentos o de tintura colorante. Diversos estudios† demuestran que el coeficiente de transferencia es proporcional, pero probablemente mayor, que la viscosidad de remolino para difusiones turbulentas de concentraciones distintas de las cantidades de movimiento.

Si $T$ es la temperatura, $H$ el calor transferido por unidad de área y de tiempo, y $c_p$ el calor específico a presión constante (kilocalorías por unidad de temperatura y por unidad de masa), entonces:

$$H = -c_p \eta \frac{\partial T}{\partial y} = -c_p \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (5.5.1)$$

siendo $c_p\eta$ la conductividad de remolino. Para transferencia de sustancias materiales tal como una sal disuelta, polvo o sedimentos, si $C$ es la concentración por unidad de volumen (por ejemplo, kilogramos de sal por metro cúbico, número de partículas por metro cúbico) y $c$ la velocidad de transferencia por unidad de área y unidad de tiempo (por ejemplo, kilogramos de sal por metro cuadrado y por segundo, número de partículas sedimentadas por metro cuadrado y por segundo), entonces,

$$c = -\epsilon_c \frac{\partial C}{\partial y} \qquad (5.5.2)$$

y $\epsilon_c$ es proporcional a $\epsilon$.

***Ejemplo 5.5*** Un recipiente que contiene un líquido con partículas finas sólidas en suspensión se agita de tal manera que la viscosidad cinemática de remolino pue-

† Ver la nota de la página 245.

de considerarse constante. Si la velocidad de caída de las partículas en el líquido en reposo es $v_f$ y la concentración de las partículas es $C_0$ a $y = y_0$ ($y$ medido desde el fondo), encontrar la distribución de partículas sólidas en una línea vertical a través del líquido.

Por la Ec. (5.5.2) se puede determinar la cantidad de partículas que por segundo son transportadas hacia arriba por la turbulencia por metro cuadrado de área al nivel $y$, que debe igualarse, cuando se han alcanzado las condiciones de flujo permanente, a la cantidad de partículas que por segundo cae a través de esta superficie. Por la unidad de área pasarán hacia abajo en un segundo todas las partículas que se encuentren por encima del área hasta una altura $v_f$, es decir, $Cv_f$. Por la Ec. (5.5.2) $-\epsilon_c\, dC/dy$ partículas serán transportadas hacia arriba debido a la turbulencia y a la más alta concentración de abajo; por consiguiente,

$$Cv_f = -\epsilon_c \frac{dC}{dy}$$

o sea,

$$\frac{dC}{C} = -\frac{v_f}{\epsilon_c}\, dy$$

Integrando;

$$\ln C = -\frac{v_f}{\epsilon_c}\, y + \text{const}$$

Para $C = C_0$, $y = y_0$,

$$C = C_0 \exp\left[-\frac{v_f}{\epsilon_c}(y - y_0)\right]$$

### 5.6 Definición de la capa límite

En 1904 Prandtl† desarrolló el concepto de la capa límite, que proporciona un importante enlace entre el flujo de un fluido ideal y el de un fluido real. Para *fluidos con viscosidad relativamente pequeña, el efecto de rozamiento interno en el fluido es apreciable solamente en una estrecha región próxima a los límites del fluido*. Según esta hipótesis, el flujo fuera de esta estrecha región cercana a los límites sólidos puede considerarse como el flujo de un fluido ideal o flujo potencial. El comportamiento del fluido

† L. Prandtl, Über Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, *Verhandl. III Intern. Math.-Kongr.*, Heidelberg, 1904.



dentro de la capa límite se deduce de las ecuaciones generales de los fluidos viscosos, y el uso de la ecuación de la cantidad de movimiento permite encontrar valores aproximados para el espesor de la capa límite y para el arrastre o resistencia. En esta sección se describe la capa límite y se aplica a ella la ecuación de la cantidad de movimiento, tanto para capa límite laminar como turbulenta en el caso de un flujo bidimensional a lo largo de una placa plana. También se estudia en esta sección el fenómeno de separación de la capa límite y de la formación de la estela de remolinos.

#### Descripción de la capa límite

Cuando comienza un movimiento en un fluido que tiene muy poca viscosidad, el flujo es esencialmente irrotacional en los primeros instantes. Como el fluido en las paredes tiene una velocidad nula con relación a estas paredes, existe un gradiente de velocidades muy grandes desde la pared hacia el interior del flujo. Este gradiente de velocidad en un fluido real origina cerca de la pared unas fuerzas de cortadura que reducen la velocidad relativa a la pared. La capa de fluido que tiene su velocidad afectada por estas fuerzas de cortadura se llama *capa límite*. La velocidad en la capa límite tiende asintóticamente a la velocidad del flujo principal. La capa límite es muy delgada en el extremo de aguas arriba de un cuerpo de forma fluido-dinámica que está en reposo en un flujo uniforme. Cuando esta capa límite avanza a lo largo del cuerpo la continua acción de las tensiones de cortadura tiende a frenar adicionales partículas de fluido, lo que hace que el espesor de la capa límite aumente con la distancia al borde de aguas arriba. El fluido en la capa está también sometido a un gradiente de presiones, determinados por el flujo potencial, que aumenta la cantidad de movimiento de la capa si la presión disminuye hacia aguas abajo y disminuye su cantidad de movimiento si la presión aumenta aguas abajo (gradiente de presiones *adverso*). El flujo exterior a la capa límite puede también introducir cantidades de movimiento dentro de ésta.

Para superficies lisas, la capa límite comienza siendo una *capa límite laminar*, es decir, que las partículas se mueven en finas capas. Al aumentar el espesor de la capa límite, ésta se hace inestable y finalmente se trans-

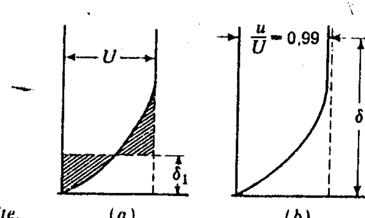



*Fig. 5.14* *Definiciones de espesor de la capa límite.*

forma en una *capa límite turbulenta* en la cual las partículas fluidas se mueven siguiendo trayectorias elegidas al azar, aunque su velocidad se ha reducido por la acción de la viscosidad en la pared. Aun cuando ya la capa límite se haya hecho turbulenta, hay todavía una capa muy delgada próxima a la pared que tiene movimiento laminar y que se llama *subcapa laminar*.

Se han dado varias definiciones del espesor $\delta$ de la capa límite. Una de las más rigurosas se refiere al llamado *espesor desplazado* $\delta_1$, que está expresado analíticamente por

$$U\delta_1 = \int_0^\delta (U - u)\, dy \tag{5.6.1}$$

y que es lo que habría que desplazar la pared hacia dentro del fluido para que el caudal fuese el mismo que se tendría si no hubiese acción de frenado de las partículas fluidas en las proximidades de la pared. En la Fig. 5.14*a* la línea $y = \delta_1$ ha de ser tal que las dos áreas rayadas sean iguales. Se toma como espesor de la capa límite $3\delta_1$. Otra definición (Figura 5.14*b*) toma como espesor de la capa límite la distancia al punto donde $u/U = 0{,}99$.

### *Aplicación a la capa límite de la ecuación de la cantidad de movimiento*

Siguiendo el método de von Kármán† puede aplicarse el principio de la cantidad de movimiento directamente a la capa límite en flujo permanente. En la Fig. 5.15 se toma un volumen de control que comprende el fluido por encima de la placa, como se indica, extendiéndose la distancia $x$ a lo largo de la placa. En la dirección $y$ se extiende una distancia $h$ tan grande que la velocidad no se modifica en la dirección $x$, aunque aparezca algún movimiento de fluido a lo largo de la superficie superior, que abandona el volumen de control. Al aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento, la única fuerza que actúa sobre el fluido es la debida a la resistencia o esfuerzo cortante en la placa, ya que la presión es constante en toda la periferia del volumen de control. La masa que atraviesa $AB$, por unidad de ancho, es

$$\rho \int_0^h U\, dy$$

y la masa que abandona $CD$ es

$$\rho \int u\, dy$$

† Th. von Kármán, On Laminar and Turbulent Friction, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, págs. 235-236, 1921.



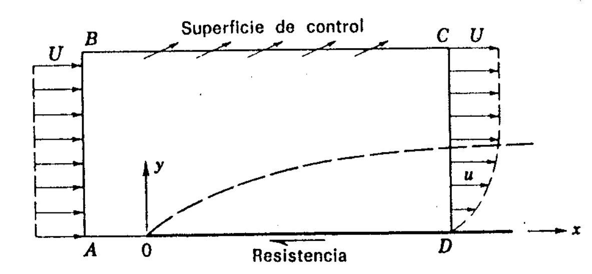



*Fig. 5.15* *Volumen de control aplicado al fluido que se mueve sobre un lado de una placa plana.*

por consiguiente, la masa que abandona $BC$ es

$$\rho \int (U - u)\, dy$$

La ecuación de la cantidad de movimiento es

$$-\text{Resistencia} = -\rho \int_0^h U^2\, dy + \rho \int_0^h U(U - u)\, dy + \rho \int_0^h u^2\, dy$$

La primera integral es la cantidad de movimiento en dirección $x$ que entra en $AB$, la segunda es la cantidad de movimiento en dirección $x$ que sale por $BC$, y la tercera es la cantidad de movimiento en dirección $x$ que sale por $CD$, todas por unidad de tiempo. Combinando las integrales

$$\text{Resistencia} = -\rho \int_0^h u(U - u)\, dy \tag{5.6.2}$$

La resistencia o arrastre $D(x)$ sobre la placa está dirigida en sentido inverso, de modo que

$$D(x) = \rho \int_0^h u(U - u)\, dy \tag{5.6.3}$$

También se puede expresar la resistencia como una integral del esfuerzo de cortadura a lo largo de la placa,

$$D(x) = \int_0^x \tau_0\, dx \tag{5.6.4}$$

Igualando las dos últimas expresiones y derivando respecto a $x$,

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^h u(U - u)\, dy \tag{5.6.5}$$

que es la ecuación de la cantidad de movimiento para flujo bidimensional a lo largo de una placa lisa.

En general, los cálculos de crecimiento de una capa límite son complicados y requieren un tratamiento matemático avanzado. Los casos de flujo paralelo, laminar o turbulento a lo largo de una placa lisa se pueden resolver aproximadamente utilizando los métodos de la cantidad de movimiento que no dan ningún detalle respecto a la distribución de la velocidad —en realidad se debe suponer una distribución de la velocidad—. Se puede demostrar que los resultados coinciden muy estrechamente con las soluciones más exactas obtenidas de las ecuaciones diferenciales generales del flujo viscoso. Para una distribución supuesta, que satisfaga las condiciones en los límites $u = 0$ para $y = 0$, $u = U$ para $y = \delta$, el espesor de la capa límite, así como la tensión de cortadura en la pared pueden determinarse. La distribución de velocidades se supone que tiene la misma forma para cada valor de $x$,

$$\frac{u}{U} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\eta) \qquad \eta = \frac{y}{\delta}$$

donde $\delta$ es desconocido. Prandtl supuso que

$$\frac{u}{U} = F = \frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2} \qquad 0 \le y \le \delta$$

y que

$$F = 1 \qquad \delta \le y$$

que satisface las condiciones de contorno. La Ec. (5.6.5) puede escribirse:

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}\int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}\,d\eta$$

y

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}\int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{\eta^3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right)d\eta = 0{,}139\rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

En la pared,

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta}\frac{\partial F}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} = \mu \frac{U}{\delta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right)\bigg|_{\eta=0} = \frac{3}{2}\mu\frac{U}{\delta} \qquad (5.6.6)$$



Igualando las dos expresiones de $\tau_0$,

$$\frac{3}{2}\mu\frac{U}{\delta} = 0{,}139\rho U^2\frac{\partial \delta}{\partial x}$$

Ordenando la anterior,

$$\delta\, d\delta = 10{,}78\frac{\mu\, dx}{\rho U}$$

puesto que $\delta$ en esta ecuación es solamente función de $x$. Integrando,

$$\frac{\delta^2}{2} = 10{,}78\frac{\nu}{U}x + \text{const}$$

Si $\delta = 0$, para $x = 0$, la constante de integración es cero. Despejando $\delta/x$,

$$\frac{\delta}{x} = 4{,}65\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{4{,}65}{\sqrt{\mathbf{R}_x}} \qquad (5.6.7)$$

en la cual $\mathbf{R}_x = Ux/\nu$ es un número de Reynolds basado en la distancia $x$ desde el borde de ataque de la placa plana. Esta ecuación del espesor de la capa límite laminar demuestra que $\delta$ aumenta con la raíz cuadrada de la distancia desde el borde de ataque.

Sustituyendo el valor de $\delta$ en la Ec. (5.6.6)

$$\tau_0 = 0{,}322\sqrt{\frac{\mu\rho U^3}{x}} \qquad (5.6.8)$$

La tensión de cortadura varía en razón inversa de la raíz cuadrada de $x$ y en razón directa de la potencia 3/2 de la velocidad. La resistencia por unidad de anchura sobre un lado de la placa vale

$$\text{Resistencia} = \int_0^l \tau_0\, dx = 0{,}644\sqrt{\mu\rho U^3 l} \qquad (5.6.9)$$

La elección de otra distribución de velocidades no altera sustancialmente estos resultados. La solución exacta, obtenida por Blasius a partir de las ecuaciones generales del movimiento del fluido viscoso, difiere de la dada por las Ecs. (5.6.8) y (5.6.9) en los coeficientes que son 0,332 y 0,664, respectivamente.

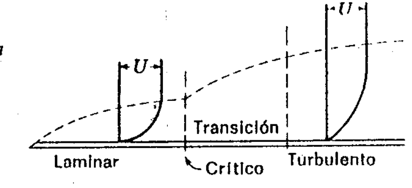



*Fig. 5.16 Crecimiento de la capa límite. (La escala vertical está muy aumentada.)*

La resistencia puede expresarse en función de un coeficiente de resistencia $C_D$; la presión de estancamiento, $\rho U^2/2$, y el área de la placa, $l$ (por unidad de anchura):

$$\text{Resistencia} = C_D \frac{\rho U^2}{2} l$$

en la cual para la capa límite laminar,

$$C_D = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathbf{R}_l}} \qquad (5.6.10)$$

y $\mathbf{R}_l = Ul/\nu$.

Cuando el número de Reynolds de la placa alcanza un valor entre 500.000 y 1.000.000, la capa límite se hace turbulenta. La Fig. 5.16 representa el crecimiento y la transición de capa límite laminar a turbulenta. El número crítico de Reynolds depende principalmente de la turbulencia inicial de la corriente fluida, del borde de ataque de la placa y de la rugosidad de su superficie.

*Capa límite turbulenta*

La ecuación de la cantidad de movimiento puede usarse para determinar el crecimiento de la capa límite turbulenta y la tensión de cortadura a lo largo de una placa lisa de manera análoga a lo ya hecho para la capa límite laminar. La ley universal de distribución de velocidades en tuberías lisas, la Ec. (5.4.11), proporciona la base en que se pueden fundar los cálculos. Una aproximación más simple consiste en el uso de la ley de Prandtl de la *potencia 1/7*, que es $u/u_{max} = (y/r_0)^{1/7}$, en la cual $y$ se mide desde la pared de la tubería y $r_0$ es el radio de la tubería. Aplicándola a una placa plana se obtiene:

$$F = \frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}$$

y

$$\tau_0 = 0{,}0228\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \qquad (5.6.11)$$



en la cual la última expresión es la tensión de cortadura en la pared de una placa plana lisa con capa límite turbulenta. Siguiendo el mismo método que se siguió para el cálculo de la capa límite laminar,

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (1 - \eta^{1/7})\eta^{1/7}\, d\eta = \frac{7}{72}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \qquad (5.6.12)$$

Igualando las expresiones de la tensión de cortadura, se obtiene la ecuación diferencial del espesor, $\delta$, de la capa límite

$$\delta^{1/4}\, d\delta = 0{,}234 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} dx$$

Integrando y suponiendo que la capa límite es turbulenta en la total longitud de la placa de tal forma que las condiciones iniciales $x = 0$, $\delta = 0$, sean válidas

$$\delta^{5/4} = 0{,}292 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} x$$

Despejando $\delta$,

$$\delta = 0{,}37 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5} = \frac{0{,}37x}{(Ux/\nu)^{1/5}} = \frac{0{,}37x}{\mathbf{R}_x^{1/5}} \qquad (5.6.13)$$

El espesor aumenta más rápidamente en la capa límite turbulenta, ya que varía con $x^{4/5}$, mientras que en la capa límite $\delta$ laminar varía con $x^{1/2}$.

Para determinar la resistencia sobre una placa plana, lisa, se elimina $\delta$ entre las Ecs. (5.6.11) y (5.6.13), resultando

$$\tau_0 = 0{,}029\rho U^2 \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} \qquad (5.6.14)$$

La resistencia por unidad de anchura sobre un lado de la placa es

$$\text{Resistencia} = \int_0^l \tau_0\, dx = 0{,}036\rho U^2 l \left(\frac{\nu}{Ul}\right)^{1/5} = \frac{0{,}036\rho U^2 l}{\mathbf{R}_l^{1/5}} \qquad (5.6.15)$$

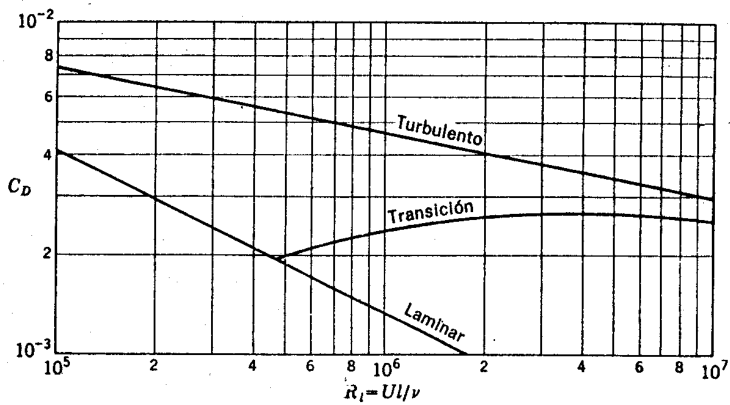



*Fig. 5.17* *Ley de resistencia para placas lisas.*

En función del coeficiente de resistencia

$$C_D = 0{,}072\mathbf{R}_l^{-1/5} \qquad (5.6.16)$$

siendo $\mathbf{R}_l$ el número de Reynolds formado con la longitud de la placa.

Las anteriores ecuaciones son válidas solamente en el intervalo en el cual es válida la ecuación de la resistencia de Blasius. Para mayores números de Reynolds en tuberías lisas el exponente de la ley de distribución de la velocidad se reduce. Para $\mathbf{R} = 400.000$, $n = \frac{1}{8}$, y para $\mathbf{R} = 4.000.000$, $n = \frac{1}{10}$. La ley de resistencia, Ec. (5.6.15), es válida en el intervalo

$$5 \times 10^5 < \mathbf{R}_l < 10^7$$

Experimentalmente se ha demostrado que la resistencia es ligeramente más alta que la dada por la Ec. (5.6.16)

$$C_D = 0{,}074\mathbf{R}_l^{-1/5} \qquad (5.6.17)$$

La capa límite es laminar en la porción de aguas arriba. Prandtl† ha sustraído la porción laminar, obteniendo la ecuación

$$C_D = 0{,}074\mathbf{R}_l^{-1/5} - \frac{1700}{\mathbf{R}_l} \qquad 5 \times 10^5 < \mathbf{R}_l < 10^7 \qquad (5.6.18)$$

† L. Prandtl, Über den Reibungswiderstand strömender Luft, *Results Aerodynamic Test Inst., Göttingen,* III Lieferung, 1927.



En la Fig. 5.17 se representa un gráfico con escalas logarítmicas de $C_D$ en función de $\mathbf{R}_l$.

El uso de la distribución de velocidades logarítmicas para tuberías da lugar a

$$C_D = \frac{0{,}455}{(\log_{10} R_l)^{2.58}} \qquad 10^6 < \mathbf{R}_l < 10^9 \qquad (5.6.19)$$

en la que el término constante se ha determinado a partir de resultados experimentales.

***Ejemplo 5.6*** Una placa plana y lisa de 4 m de anchura y 40 m de longitud es remolcada en agua en reposo a 20° C, con una velocidad de 8 m/seg. Determinar la resistencia sobre un lado de la placa y la resistencia sobre los primeros 4 m de la placa.

El agua a 20° C tiene una viscosidad dinámica $\mu = 1$ centipoise $= 0{,}01/98$ kg-seg/m² y $\rho = \gamma/g = 10^3/9{,}8$ UTM/m³.

Para la placa entera

$$\mathbf{R}_l = \frac{Ul\rho}{\mu} = \frac{8 \times 40 \times 10^3/9{,}8}{0{,}01/98} = 3{,}2 \times 10^8$$

De la Ec. (5.6.19)

$$C_D = \frac{0{,}455}{[\log(3{,}2 \times 10^8)]^{2.58}} = \frac{0{,}455}{(8{,}505)^{2.58}} = 0{,}001805$$

La resistencia sobre una cara es

$$\text{Resistencia} = C_D bl\frac{\rho U^2}{2} = 0{,}001805 \times 4 \times 40 \times \frac{10^3}{9{,}8 \times 2} \times 8^2 = 943 \text{ kg}$$

siendo $b$ el ancho de la placa. Si el número crítico de Reynolds es $5 \times 10^5$, la distancia $l_0$ a la que se presenta la transición, es

$$\frac{l_0 \times 8 \times 10^3/9{,}8}{0{,}01/98} = 5 \times 10^5 \qquad l_0 = 0{,}062 \text{ m}$$

Para los primeros 4 m de la placa, $\mathbf{R}_l = 3{,}2 \times 10^7$, $C_D = 0{,}00242$, y

$$\text{Resistencia} = 0{,}00242 \times 4 \times 4 \times \frac{10^3}{2 \times 9{,}8} \times 8^2 = 130 \text{ kg}$$

Los cálculos de la capa límite turbulenta sobre placas rugosas se realizan de manera semejante, comenzando con las experiencias en tuberías de rugosidad artificial. En el borde de aguas arriba de la placa plana el

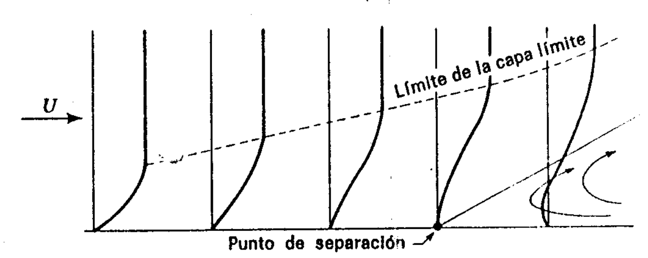


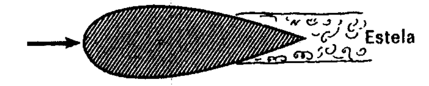

*Fig. 5.18* *Efecto del gradiente de presión adversa sobre la capa límite. Separación.*

flujo debe ser laminar; después, en la región de capa límite turbulenta mientras que la capa límite sea todavía delgada, la relación de la altura de las rugosidades al espesor de la capa límite $\epsilon/\delta$ es significativa, y la placa se comporta como verdaderamente rugosa, siendo la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Para placas largas, esta región es seguida por una región de transición donde $\epsilon/\delta$ es menor, y al quedar embebidas las rugosidades dentro del espesor de la capa límite la placa es hidráulicamente lisa, es decir, la pérdida no puede reducirse reduciendo el tamaño de la rugosidad. Prandtl y Schlichting† han realizado estos cálculos, pero son muy complicados para que se reproduzcan aquí.

## *Separación. Estela de remolinos*

A lo largo de una placa plana la capa límite continúa creciendo en la dirección de aguas abajo, cualquiera que sea la longitud de la placa, cuando el gradiente de presiones es nulo. Cuando la presión disminuye en la dirección de aguas abajo, como en el caso de una sección cónica de reducción, la capa límite tiende a reducir su espesor.

*Fig. 5.19* *Cuerpo fluidodinámico.*




Para un gradiente de presiones *adverso*, es decir, cuando la presión aumenta en la dirección de aguas abajo, el espesor de la capa límite crece rápidamente. El gradiente adverso más la tensión de cortadura en la pared disminuyen la cantidad de movimiento de la capa límite y si ambos actúan en una longitud suficiente, hacen que la capa límite llegue al reposo. Este fenómeno se llama *separación* y se ilustra en la Fig. 5.18. La línea de corriente en contacto con la pared se aparta de ella en el punto de

† L. Prandtl y H. Schlichting, Das Widerstandsgesetz rauher Platten, *Werft, Reederei, Hafen*, pág. 1, 1934. Véase también *NACA Tech. Mem.* 1218, parte II.



separación, y aguas abajo de este punto el gradiente de presiones adverso obliga al fluido a cambiar de dirección cerca de la pared. Esta región, aguas abajo de la línea de corriente, que se separa de la pared, se llama *estela de remolinos*. Por el efecto de la separación y de la estela de remolinos se perjudica el proceso de conversión de la energía cinética en energía de presión y se incrementa la pérdida de energía mecánica.

Los cuerpos fluido-dinámicos (Fig. 5.19) se proyectan de tal forma que el punto de separación se presente lo más aguas abajo que sea po-

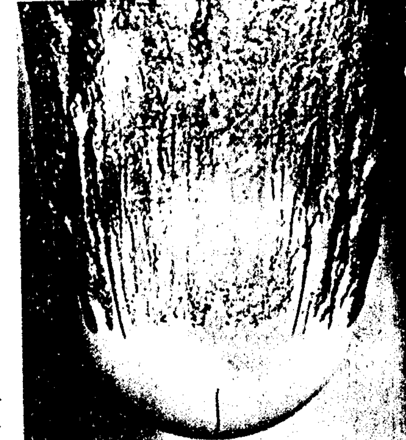


*Fig. 5.20* *Desplazamiento del punto de separación debida a la turbulencia inducida. (a) bola de juego de bolos de 22 cm de diámetro superficie lisa que entra en agua con una velocidad de 7,5 m/s. (b) Igual excepto que lleva en la punta una capa de arena de 10 cm de diámetro. (Fotografía oficial de U. S. Navy tomada en Navy Ordnance Test Station, Pasadena Annex.)*



sible. Si la separación puede evitarse, entonces, la capa límite permanece delgada y la presión es casi recuperada aguas abajo a lo largo del cuerpo. La única pérdida, o resistencia, es la debida a la tensión de cortadura y se llama *rozamiento pelicular o superficial*. En la estela de remolinos no se recupera la presión y resulta una *resistencia debida a la presión o de forma*. La reducción de la estela de remolinos reduce la resistencia debida a la presión sobre un cuerpo. En general, la resistencia es debida al rozamiento pelicular y a la resistencia debida a la presión.

El flujo alrededor de una esfera es un excelente ejemplo del efecto de la separación sobre la resistencia. Para números de Reynolds pequeños, $\mathbf{R} = VD/\nu < 1$, el flujo es en todos los puntos no turbulento, y la resistencia puede considerarse como una *resistencia de deformación*. La ley de Stokes† da la fuerza de resistencia en este caso. Para números de Reynolds grandes, el flujo puede suponerse potencial excepto en la capa límite y en la estela. La capa límite se forma en el punto de estancamiento en la proa del cuerpo, y es generalmente laminar. En la capa límite laminar, un gradiente de presiones adverso origina la separación más prontamente que en una capa límite turbulenta, a causa de la pequeña cantidad de movimiento que tiene la capa laminar. Si la separación se presenta en la capa límite laminar, su situación es más aguas arriba sobre la esfera que cuando la capa límite se hace antes turbulenta y después se presenta la separación.

En la Fig. 5.20 se tiene esto gráficamente representado por las fotografías de dos esferas que caen en el agua a 7,5 m/seg. En *a*, la separación se presenta en la capa límite laminar que se forma a lo largo de la superficie lisa y se origina una estela muy grande, resultando una resistencia debida a la presión muy grande. En *b*, la superficie de la esfera se ha hecho artificialmente rugosa pegándose granos de arena, provocando una pronta transición a capa límite turbulenta antes de que la separación se produzca. El gran intercambio de cantidad de movimiento en la capa límite turbulenta retrasa la separación de tal manera que la estela se reduce notablemente, resultando una resistencia total sobre la esfera, menor que la mitad de la que se origina en *a*.

Un gráfico del coeficiente de resistencia en función del número de Reynolds para esferas lisas (Fig. 5.21) demuestra que el cambio a capa límite turbulenta (antes de la separacion) se presenta para un número de Reynolds suficientemente alto como se pone en evidencia por el brusco descenso del coeficiente de resistencia. El número exacto de Reynolds en que se presenta el cambio brusco depende de la rugosidad de la superficie de la esfera y de la turbulencia de la corriente fluida. De hecho, la esfera es frecuentemente usada para medir la turbulencia determinando el número de Reynolds para el cual el coeficiente de resistencia es de 0,30, que es un punto situado hacia el centro de la caída brusca (Fig. 5.21). Usando

† Ver la Sec. 5.7.



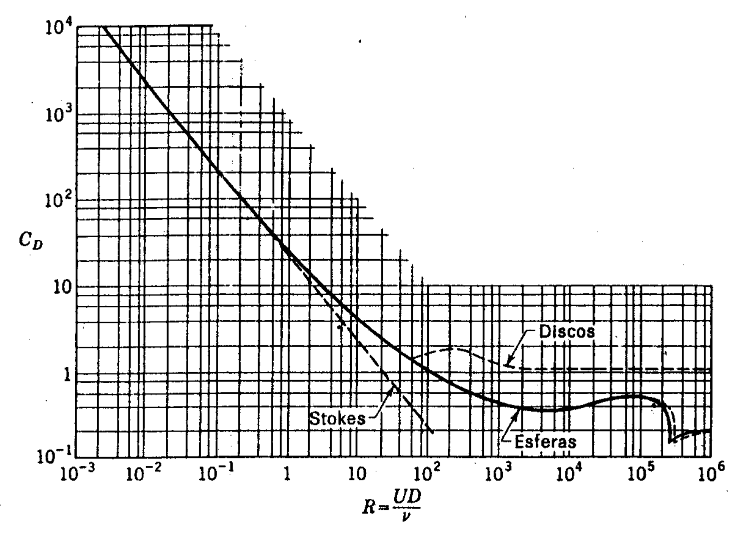



*Fig. 5.21 Coeficientes de resistencia para esferas y discos circulares.*

el anemómetro de hilo caliente, Dryden† ha relacionado el nivel de turbulencia de una corriente fluida con el número de Reynolds de la esfera para $C_D = 0{,}30$. Cuando más grande es la turbulencia de la corriente fluida, más pequeño es el número de Reynolds para el cambio brusco del punto de separación.

En la Sec. 7.8 se desarrollan ecuaciones, para el movimiento de un fluido ideal, que permiten hallar la velocidad y la presión en un punto cualquiera del fluido para el movimiento alrededor de una esfera. En el movimiento de un fluido ideal, es permisible el deslizamiento en el contorno, además, la condición de contorno establece que la componente normal de la velocidad en el contorno es cero en movimiento permanente. Por tanto, la separación está fuera de consideración. En el movimiento de un fluido ideal, que es de energía constante, no hay resistencia sobre el cuerpo y no hay capa límite. Comparando las Figs. 5.20 y 7.23 se ve el gran contraste entre el movimiento de un fluido ideal y de un fluido real alrededor de un cuerpo rígido. Sin embargo, el movimiento de un fluido ideal da una buena representación de la velocidad y de la presión para la porción del movimiento aguas arriba, fuera de los efectos de la separación de la capa límite y de la formación de la estela de remolinos.

† H. Dryden, Reduction of Turbulence in Wind Tunnels, *NACA Tech. Rept.* 392, 1931.

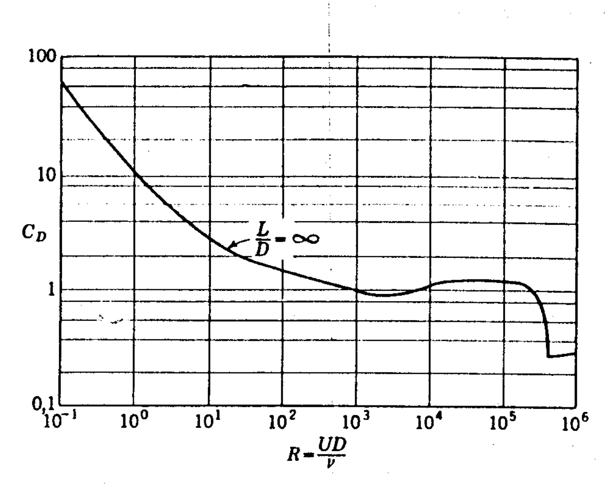



*Fig. 5.22 Coeficientes de resistencia para cilindros circulares.*

### 5.7 *Resistencia sobre cuerpos sumergidos*

Los principios del flujo potencial alrededor de cuerpos se desarrollan en el Cap. 7, y los principios de la capa límite, separación y estela, en la sección que precede a ésta (Sec. 5.6). En esta sección se define la resistencia, se dan algunos coeficientes de resistencia, se discute el efecto de la compresibilidad sobre la misma y se presenta la ley de Stokes. También se define la sustentación y los coeficientes de arrastre o resistencia y de sustentación de un perfil.

La resistencia se define como la componente de la fuerza ejercida sobre el cuerpo por el movimiento del fluido, paralela a la velocidad de aproximación. El gráfico del coeficiente de resistencia para esferas y discos circulares está representado en la Fig. 5.21. En la Fig. 5.22 está representado el coeficiente de resistencia de un cilindro circular infinitamente largo (caso bidimensional) en función del número de Reynolds. Este caso presenta también un cambio brusco del punto de separación como en el caso de la esfera. En todos los casos, el coeficiente de resistencia $C_D$ está definido por

$$\text{Resistencia} = C_D A \frac{\rho U^2}{2}$$

siendo $A$ el área proyectada por el cuerpo sobre un plano normal a la dirección del flujo.




*Tabla 5.1 Coeficientes de resistencia típicos para varios cilindros en flujo bidimensional* †

| *Forma del cuerpo* | | $C_D$ | *Número de Reynolds* |
|---|---|---|---|
| Cilindro circular | | 1,2 | $10^4$ a $1,5 \times 10^6$ |
| Cilindro elíptico | 2:1 | 0,6 | $4 \times 10^4$ |
| | | 0,46 | $10^5$ |
| | 4:1 | 0,32 | $2,5 \times 10^4$ a $10^5$ |
| | | 0,29 | $2,5 \times 10^4$ |
| | 8:1 | 0,20 | $2 \times 10^5$ |
| Prisma cuadrado | | 2,0 | $3,5 \times 10^4$ |
| | | 1,6 | $10^4$ a $10^5$ |
| Prisma triangular | 120° | 2,0 | $10^4$ |
| | 120° | 1,72 | $10^4$ |
| | 90° | 2,15 | $10^4$ |
| | 90° | 1,60 | $10^4$ |
| | 60° | 2,20 | $10^4$ |
| | 60° | 1,39 | $10^4$ |
| | 30° | 1,8 | $10^5$ |
| | 30° | 1,0 | $10^5$ |
| Semitubo | | 2,3 | $4 \times 10^4$ |
| | | 1,12 | $4 \times 10^4$ |

† Datos tomados de W. F. Lindsey, *NACA Tech. Rept.* 619, 1938.

En la Tabla 5.1 se dan coeficientes de resistencia típicos para varios cilindros. En general, los valores dados son para un intervalo del número de Reynolds en el cual el coeficiente cambia poco con el número de Reynolds.

Unas curvas típicas de coeficientes de sustentación y de resistencia para un determinado perfil se dan en la Fig. 5.23. La sustentación es la componente de la fuerza ejercida sobre el cuerpo por el fluido en la dirección que forma un ángulo recto con la de la velocidad de aproximación. El coeficiente de sustentación está definido por

$$\text{Sustentación} = C_L A \frac{\rho U^2}{2}$$

siendo $A$ el producto de la cuerda por la longitud del ala en el caso de un perfil de ala de avión.

#### *Efecto de la compresibilidad sobre la resistencia*

El efecto de la compresibilidad, expresado por el número de *Mach*, es más importante que el número de Reynolds para determinar la resis-

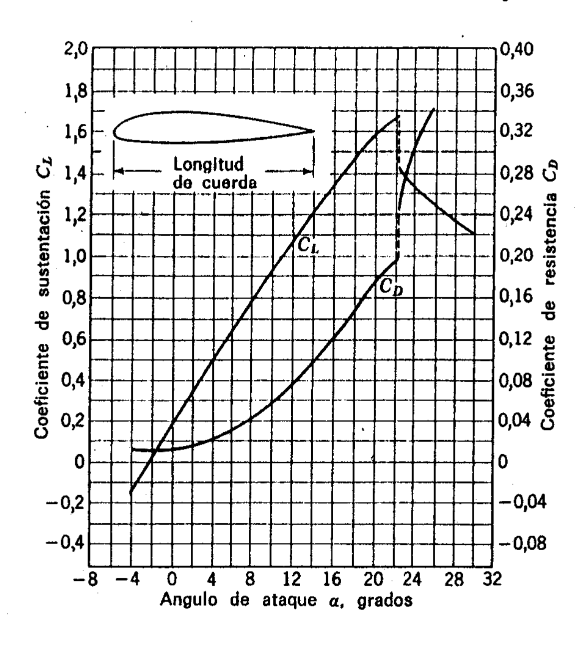



*Fig. 5.23 Coeficientes típicos de sustentación y resistencia para un perfil de ala.*

tencia que se opone al movimiento de un cuerpo en un gas en reposo o el empuje ejercido sobre un cuerpo en reposo por el flujo gaseoso. El número de Mach **M** se define como la relación de la velocidad del fluido a la velocidad del sonido en el medio fluido. Cuando la velocidad del flujo es la crítica $c$, el fluido tiene exactamente la velocidad de las ondas sonoras y entonces las pequeñas ondas de presión no pueden propagarse hacia aguas arriba. En este caso, $\mathbf{M} = 1$. Cuando **M** es mayor que la unidad, el flujo es supersónico; y cuando **M** es menor que la unidad es subsónico.

Cualquier pequeña perturbación se propaga con la velocidad del sonido (Sec. 6.2). Por ejemplo, una perturbación en el aire en reposo se propaga según ondas esféricas de presión. Cuando la fuente de la perturbación se mueve con una velocidad menor que $c$, como en la Fig. 5.24*a*, la onda viaja delante del cuerpo perturbador originando cambios en el fluido antes de que llegue el cuerpo. Al transcurrir el tiempo $t$, la partícula se ha movido una distancia $Vt$, y la onda perturbadora ha avanzado la distancia $r = ct$ desde el punto $O$. El cuerpo perturbador avanza y envía nuevas ondas esféricas, pero en todos los casos subsónicos estas ondas están contenidas dentro de la onda inicial. En el movimiento supersónico



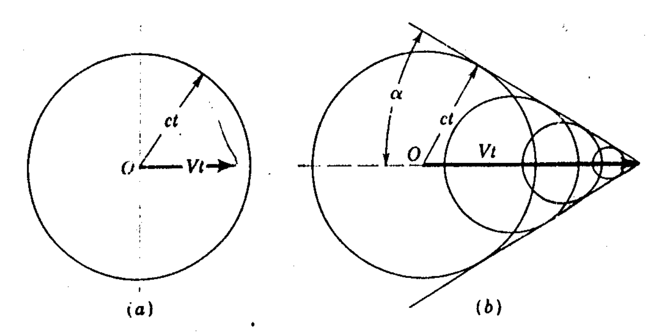



*Fig. 5.24 Propagación de una onda producida por una partícula que se mueve (a) con velocidad subsónica y (b) con velocidad supersónica.*

de una partícula (Fig. 5.24*b*), el cuerpo se mueve más rápidamente que las ondas esféricas emitidas por él, originándose un frente cónico de onda con vértice en el cuerpo, como se representa. El semiángulo del cono α se llama *ángulo de Mach*,

$$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{ct}{Vt} = \text{arc sen}\,\frac{c}{V}$$

El frente de presión cónico se extiende por detrás del cuerpo y se llama *onda de choque* (Sec. 6.4). Hay un pequeño cambio brusco en la velocidad y en la presión a través de la onda de choque.

La resistencia al movimiento del cuerpo varía grandemente con el número de Mach y se hace relativamente independiente del número de Reynolds cuando los efectos de la compresibilidad se hacen importantes. En la Fig. 5.25 el coeficiente de resistencia para cuatro proyectiles se ha representado gráficamente en función del número de Mach.

Para números de Mach pequeños, el cuerpo debe ser redondeado en el frente con una ojiva cortada plana y terminado por detrás en un largo cono para que la resistencia sea mínima. Para números de Mach grandes (0,7 y mayores), la resistencia aumenta muy rápidamente debido a la formación de remolinos detrás del proyectil y a la formación de ondas de choque; el cuerpo debe tener una cabeza en ojiva cónica o afilada. Cuando el número de Mach aumenta, las curvas tienden a caer y a aproximarse asintóticamente a un valor. Esto parece ser debido al hecho de que la reducción de presión detrás del proyectil está limitada por el cero absoluto y, por consiguiente, su contribución a la resistencia total tiende a hacerse constante. El proyectil puntiagudo crea una onda de choque de frente muy estrecho que tiende a reducir el valor límite del coeficiente de resistencia.

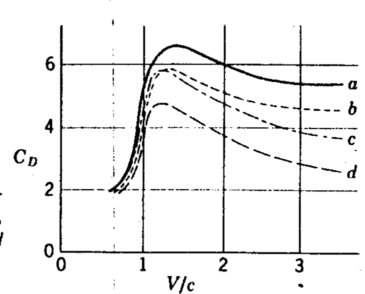
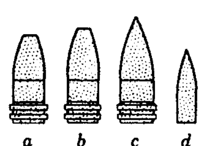



*Fig. 5.25 Coeficientes de resistencia para proyectiles en función del número de Mach. (De L. Prandtl, «Abriss der Strömungslehre», Friedrig Vieweg und Söhne, Brunswick, Alemania, 1935.)*




### *Ley de Stokes*

El flujo de un fluido alrededor de una esfera ha sido estudiado por Stokes† para valores del número de Reynolds $UD/\nu$ menores que 1. La deducción de esta ley está fuera del fin que se propone este libro; sin embargo, su aplicación es de gran utilidad en la resolución de problemas tales como los del sedimento de partículas de polvo. Stokes encontró que el empuje (fuerza ejercida sobre la esfera por el flujo de un fluido alrededor de ella) vale

$$\text{Resistencia} = 6\pi a\mu U$$

siendo $a$ el radio de la esfera y $U$ la velocidad de la esfera relativa al fluido situado a gran distancia. Para encontrar la velocidad final de una esfera que cae en un fluido en reposo, debe tenerse en cuenta que la fuerza de empuje hidrostático más la fuerza de arrastre o resistencia debe ser igual al peso, es decir,

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3\gamma + 6\pi a\mu U = \tfrac{4}{3}\pi a^3\gamma_s$$

siendo $\gamma$ el peso específico del líquido y $\gamma_s$ el de la esfera. Despejando $U$, se encuentra la velocidad final de caída de la esfera

$$U = \frac{2}{9}\frac{a^2}{\mu}(\gamma_s - \gamma) \qquad (5.7.1)$$

† G. Stokes, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 8, 1845; vol. 9, 1851.





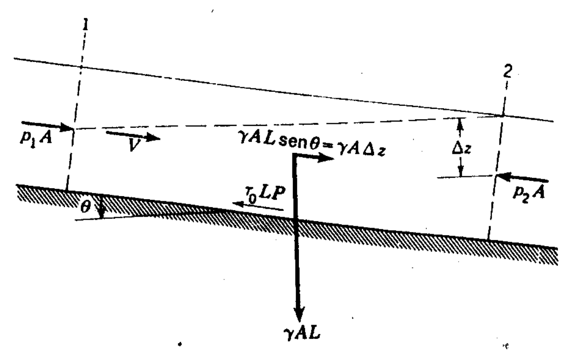



*Fig. 5.26 Fuerzas axiales sobre un cuerpo libre, de fluido en un conducto.*

La porción recta de la curva del gráfico de la Fig. 5.21 representa la ley de Stokes.

## *5.8 Resistencia al flujo turbulento en conductos abiertos y cerrados*

En flujo turbulento permanente incompresible en conductos de sección constante (flujo permanente uniforme), la tensión de cortadura en la pared varía, prácticamente, proporcionalmente al cuadrado de la velocidad

$$\tau_0 = \lambda\frac{\rho}{2}V^2 \qquad (5.8.1)$$

siendo $\lambda$ un coeficiente sin dimensiones. Para canales abiertos y conductos cerrados no circulares la tensión de cortadura no es constante sobre la superficie, por lo que en estos casos debe usarse un $\tau_0$ que es el valor medio de la tensión de cortadura en la pared. En los conductos no circulares se producen movimientos secundarios† del fluido que tienden a igualar las tensiones de cortadura en la pared. Las fuerzas cortantes en la pared en flujo permanente están equilibradas por las fuerzas debidas a la presión, por la componente axial del peso del fluido del conducto o por ambas fuerzas (Fig. 5.26). La expresión del equilibrio, escrita en la dirección axial, es

$$(p_1 - p_2)A + \gamma A\,\Delta z = \tau_0 LP$$

† Los flujos secundarios, no comprendidos totalmente, son componentes transversas que ocasionan que el flujo central principal se extienda hacia las esquinas o paredes próximas.

siendo $\Delta z = L$ sen $\theta$ y $P$ el *perímetro mojado* del conducto, es decir, la porción del perímetro donde la pared está en contacto con el fluido (excluida la superficie libre del líquido). La relación $A/P$ se llama *radio hidráulico* del conducto $R$. Si $p_1 - p_2 = \Delta p$,

$$\frac{\Delta p + \gamma \, \Delta z}{L} = \frac{\tau_0}{R} = \frac{\lambda \rho V^2}{2R} \tag{5.8.2}$$

o, cuando se divide por $\gamma$, si $h_f = (\Delta p + \gamma \, \Delta z)/\gamma$ es la pérdida de energía mecánica por unidad de peso,

$$\frac{h_f}{L} = S = \frac{\lambda}{R} \frac{V^2}{2g}$$

siendo $S$ la pérdida de energía mecánica por unidad de peso y por unidad de longitud. Despejando $V$

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS} = C\sqrt{RS} \tag{5.8.3}$$

Esta es la fórmula de Chézy en la que originalmente el coeficiente de Chézy $C$ se creyó que era constante para cualquier tamaño de conducto y condiciones de la superficie de la pared. Actualmente se usan diversas fórmulas para encontrar el coeficiente de Chézy.

Para tuberías, cuando $\lambda = f/4$ y $R = D/4$ se obtiene la ecuación de Darcy-Weisbach,

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \tag{5.8.4}$$

siendo $D$ el diámetro interior de la tubería. Esta ecuación se aplica a canales abiertos puesta en la forma

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{RS} \tag{5.8.5}$$

con los valores de $f$ determinados con experiencias en tuberías.

## 5.9 Movimiento permanente uniforme en canales abiertos

Para el movimiento permanente e incompresible de profundidad constante en un canal prismático abierto, se utiliza con mucha frecuencia la fórmula de *Manning*. Se puede obtener de la fórmula de Chézy [Ec. (5.8.3)] haciendo



**Tabla 5.2** *Valores medios del factor de rugosidad de Manning para paredes de diversos materiales*

| *Material de la pared* | *n de Manning* |
|---|---|
| Madera cepillada | 0,010 |
| Madera sin cepillar | 0,011 |
| Hormigón acabado | 0,010 |
| Hormigón en bruto | 0,012 |
| Hierro fundido | 0,012 |
| Ladrillo | 0,013 |
| Acero roblonado | 0,015 |
| Metal con arrugas | 0,018 |
| Mampostería | 0,021 |
| Tierra | 0,021 |
| Tierra con piedras o hierbas | 0,029 |
| Grava | 0,024 |

$$C = \frac{0{,}823}{n} R^{1/6} \tag{5.9.1}$$

o

$$V = \frac{0{,}823}{n} R^{2/3} S^{1/2} \tag{5.9.2}$$

que es la fórmula de Manning. $V$ es la velocidad media en la sección recta, $R$ es el radio hidráulico (Sec. 5.8), y $S$ las pérdidas por unidad de peso y por unidad de longitud del canal o la pendiente en el fondo del canal. Es también la pendiente de la superficie del agua, que es paralela al fondo del canal. El coeficiente $n$ se consideraba como un coeficiente absoluto de la rugosidad, es decir, que dependía exclusivamente de la rugosidad de la superficie, pero realmente depende del tamaño y la forma de la sección recta del canal de alguna manera desconocida. En la Tabla 5.2 se dan valores del coeficiente $n$, determinados mediante muchos ensayos con canales reales. La Ec. (5.9.2) debe tener la velocidad en metros por segundo y $R$ en metros para utilizar los valores de la Tabla 5.2.

Cuando la Ec. (5.9.2) se multiplica por la sección recta del área $A$, la fórmula de Manning toma la forma

$$Q = \frac{0{,}823}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \tag{5.9.3}$$

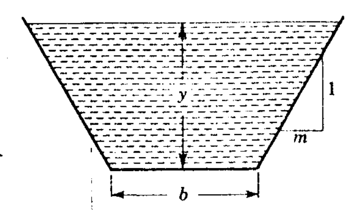



*Fig. 5.27 Notación para una sección recta trapezoidal.*

Cuando se conoce el área de la sección recta, cualquiera de las otras cantidades puede obtenerse de la Ec. (5.9.3) despejándola.

***Ejemplo 5.7*** Determinar el caudal en un canal trapezoidal (Fig. 5.27), de anchura de fondo $b = 2{,}40$ m e inclinación de laterales de 1 : 1. La profundidad del agua es $y = 1{,}8$ m y la pendiente del fondo 0,001. El material del canal es hormigón acabado.

De la Tabla 5.2, $n = 0{,}010$. El área de la sección vale

$$A = 2{,}4 \times 1{,}8 + 1{,}8 \times 1{,}8 = 7{,}56 \text{ m}^2$$

y el perímetro mojado es

$$P = 2{,}4 + 2 \times 1{,}8\sqrt{2} = 7{,}50 \text{ m}$$

Sustituyendo en la Ec. (5.9.3),

$$Q = \frac{0{,}823}{0{,}01} 7{,}56 \left(\frac{7{,}56}{7{,}50}\right)^{2/3} (0{,}001)^{1/2} = 19{,}8 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Cuando se desconoce el área de la sección en la resolución de algunos problemas es necesario realizarla por tanteos. Las expresiones del área de la sección y del radio hidráulico dependen de la profundidad de tal manera que ésta no puede despejarse fácilmente.

***Ejemplo 5.8*** ¿Qué profundidad se necesita para establecer un caudal de 4 m³/seg en un canal rectangular de madera cepillada de 1,5 m de ancho y con una pendiente de su solera de 0,002?

Si la profundidad es $y$, $A = 1{,}5y$, $P = 1{,}5 + 2y$, $n = 0{,}010$. Sustituyendo en la Ec. (5.9.3),

$$4 = \frac{0{,}823}{0{,}010} 1{,}5y \left(\frac{1{,}5y}{1{,}5 + 2y}\right)^{2/3} (0{,}002)^{1/2}$$

Después de simplificar,

$$f(y) = y \left(\frac{y}{1 + 1{,}33y}\right)^{2/3} = 0{,}725$$



Si se supone que $y = 1{,}1$ m; entonces $f(y) = 0{,}643$. Supuesto $y = 1{,}2$ m, entonces $f(y) = 0{,}717$. Por consiguiente, la profundidad es, aproximadamente, $y = 1{,}2$ m.

En el Cap. 11 se consideran casos más generales de movimiento en canales abiertos.

## 5.10 Movimiento permanente e incompresible a través de tuberías simples

### *Fórmula de Colebrook*

El equilibrio de fuerzas para el movimiento permanente (sin aceleración) en una tubería (Fig. 5.28) da

$$\Delta p \pi r_0^2 = \tau_0 2\pi r_0 \,\Delta L$$

o, simplificando,

$$\tau_0 = \frac{\Delta p}{\Delta L}\frac{r_0}{2} \qquad (5.10.1)$$

que se cumple para movimiento laminar o turbulento. La ecuación de Darcy-Weisbach (5.8.4) se puede escribir

$$\Delta p = \gamma h_f = f\frac{\Delta L}{2r_0}\rho\frac{V^2}{2}$$

Eliminando $\Delta p$ entre las dos ecuaciones y simplificando,

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{f}{8}}\,V \qquad (5.10.2)$$

que relaciona la tensión de cortadura en la pared, el coeficiente de rozamiento y la velocidad media. La velocidad media $V$ puede obtenerse de la Ec. (5.4.11) integrando sobre la sección. Sustituyendo el valor de $V$

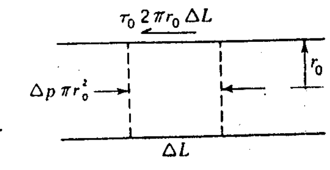



*Fig. 5.28 Condiciones de equilibrio para flujo permanente en una tubería.*

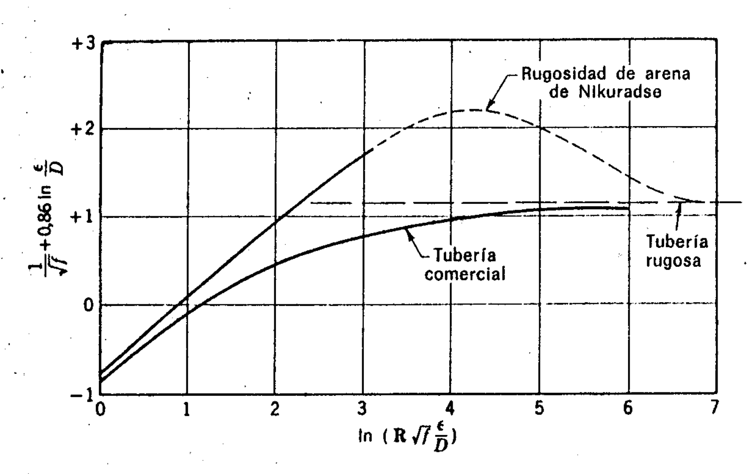



*Fig. 5.29 Función de transición de Colebrook.*

en la Ec. (5.10.2) y simplificando resulta la siguiente ecuación, para el coeficiente de rozamiento en tuberías de pared lisa

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A_s + B_s \ln (\mathbf{R}\sqrt{f}) \qquad (5.10.3)$$

Con los valores de Nikuradse† para tuberías lisas, la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0{,}86 \ln (\mathbf{R}\sqrt{f}) - 0{,}8 \qquad (5.10.4)$$

Para tuberías rugosas en la zona de turbulencia total,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = F_2\left(m, \frac{\epsilon'}{D}\right) + B_r \ln \frac{\epsilon}{D} \qquad (5.10.5)$$

en la cual $F_2$ es, en general, una constante para una forma dada y espaciado de los elementos de la rugosidad. Para la rugosidad artificial con granos de arena pegados en la tubería (Fig. 5.31), la Ec. (5.10.5) se hace

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 0{,}86 \ln \frac{\epsilon}{D} \qquad (5.10.6)$$

† J. Nikuradse, Gesetzmassigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, *VDI-Forschungsh.*, vol. 356, 1932.



La altura de las rugosidades $\epsilon$ de tuberías con granos de arena pegados puede tomarse como una medida de la rugosidad de las tuberías comerciales. Si el valor de $f$ es conocido para una tubería comercial con la zona de turbulencia en la pared completamente desarrollada, es decir, para un número de Reynolds grande y una pérdida proporcional al cuadrado de la velocidad, el valor de $\epsilon$ puede calcularse por la Ec. (5.10.6). En la región de transición, donde $f$ depende de $\epsilon/D$ y de $\mathbf{R}$, las tuberías con rugosidad artificial de arena producen resultados diferentes que las tuberías comerciales. Esto se hace evidente con un gráfico basado en las Ecs. (5.10.4) y (5.10.6) donde se muestran los resultados de experiencias hechas con tuberías de rugosidad artificial de arena y con tuberías comerciales. La Ec. (5.10.6) puede escribirse

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 0{,}86 \ln \frac{\epsilon}{D} = 1{,}14$$

y sumando 0,86 ln $\epsilon/D$ a cada miembro de la Ec. (5.10.4)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 0{,}86 \ln \frac{\epsilon}{D} = 0{,}86 \ln \left(\mathbf{R}\sqrt{f}\frac{\epsilon}{D}\right) - 0{,}8$$

Eligiendo $1/\sqrt{f} + 0{,}86 \ln \epsilon/D$ como ordenada y $\ln (\mathbf{R}\sqrt{f}\,\epsilon/D)$ como abscisa en un gráfico como el de la Fig. 5.29, los resultados de las experiencias hechas con tuberías lisas dan una línea recta de pendiente +0,86 y con tuberías rugosas resulta, en la zona de turbulencia completa, una línea horizontal. Los resultados de las experiencias hechas con tubos de rugosidad de arena artificial de Nikuradse están en la línea de trazos en la región de transición y con los tubos comerciales a lo largo de la línea curva inferior.

La aplicación de la diferencia en la forma de la curva de rugosidad artificial de Nikuradse y la curva de rugosidad comercial es que la subcapa laminar o película laminar cubre toda la rugosidad artificial o le permite sobresalir uniformemente cuando disminuye el espesor de la película. Con rugosidad comercial, que varía mucho en uniformidad, pe-

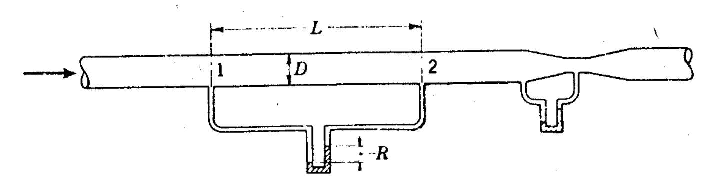



*Fig. 5.30 Disposición experimental para determinar la pérdida de altura en una tubería.*

queñas porciones se extienden más allá de la película al principio, cuando la película disminuye de espesor al aumentar el número de Reynolds. Colebrook† ha desarrollado una fórmula empírica para la zona de transición de tuberías comerciales situada entre las regiones de las tuberías lisas y de la turbulencia completa que es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86 \ln \left( \frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathbf{R}\sqrt{f}} \right) \tag{5.10.7}$$

que es la base del diagrama de Moody (Fig. 5.32).

### *Flujo en tuberías*

En el movimiento permanente e incompresible en una tubería se expresan las irreversibilidades en función de la pérdida de energía, o caída de la *línea de alturas piezométricas* (Sec. 10.1). La línea de alturas piezométricas está $p/\gamma$ por encima del centro de la tubería, y si $z$ es la altura del centro de la tubería, entonces $z + p/\gamma$ es la altura de un punto de línea de alturas piezométricas. El lugar geométrico de los valores de $z + p/\gamma$ a lo largo de la tubería de la línea de alturas piezométricas. Las pérdidas, o irreversibilidades, ocasionan que esta línea caiga en la dirección del movimiento. La fórmula de Darcy-Weisbach para la pérdida de energía mecánica en flujo permanente de un fluido en una tubería adopta para los cálculos de tuberías la forma siguiente:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \tag{5.8.4}$$

siendo $h_f$ la pérdida de energía en la tubería de longitud $L$ y de diámetro interior $D$, para una velocidad media $V$. $h_f$ tiene las dimensiones de una longitud y se expresa en kgm/kg o en m. El coeficiente de rozamiento $f$ es una magnitud sin dimensiones que es necesaria en la fórmula para que se obtenga el resultado deseado. Todas las magnitudes de la Ec. (5.8.4), excepto $f$, pueden medirse experimentalmente. En la Fig. 5.30 se muestra cómo se dispone la experiencia para la determinación de la pérdida de energía en una tubería. Midiendo el caudal y el diámetro interior se puede calcular la velocidad media $V$. La pérdida de energía $h_f$ se mide con un manómetro diferencial conectado a los agujeros piezométricos de las secciones 1 y 2 distantes $L$.

† C. F. Colebrook, Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws, *J. Inst. Civil Engrs. London*, vol. 11, págs. 133-156, 1938-1939.



Las experiencias demuestran que en flujo permanente la pérdida de energía por unidad de peso:

1. Es directamente proporcional a la longitud de la tubería.
2. Es, aproximadamente, proporcional al cuadrado de la velocidad.
3. Es, aproximadamente, inversamente proporcional al diámetro.
4. Depende de la rugosidad de las paredes internas del tubo.
5. Depende de la densidad y viscosidad del fluido.
6. Es independiente de la presión.

El coeficiente de rozamiento $f$ debe determinarse de tal manera que la Ec. (5.8.4) dé la pérdida de energía; por consiguiente, $f$ no puede ser una constante, sino que debe depender de la velocidad $V$, del diámetro $D$, de la densidad $\rho$, de la viscosidad $\mu$ y de ciertas características de la rugosidad de la pared que se designan con las letras $\epsilon$, $\epsilon'$ y $m$. Estos símbolos se definen así: $\epsilon$ es una medida del *tamaño* de las proyecciones rugosas y tiene las dimensiones de una longitud; $\epsilon'$ es una medida de la *localización* o *disposición* de los elementos de la rugosidad y tiene también las dimensiones de una longitud; $m$ es un factor de forma que depende de la *forma* de los elementos individuales de rugosidad y no tiene dimensiones. El coeficiente $f$, en vez de ser una constante, depende de siete magnitudes,

$$f = f(V, D, \rho, \mu, \epsilon, \epsilon', m) \tag{5.10.8}$$

Como $f$ es un factor sin dimensiones, debe depender de varios parámetros sin dimensiones formados agrupando convenientemente estas siete magnitudes. Para tuberías lisas, $\epsilon = \epsilon' = m = 0$, con lo que $f$ depende solamente de las cuatro primeras magnitudes. Estas pueden agruparse de una sola manera para formar un único parámetro adimensional, a saber, $VD\rho/\mu$, que es el número de Reynolds. Para tuberías *rugosas*, los términos $\epsilon$, $\epsilon'$ pueden hacerse sin dimensiones dividiendo por $D$. Por tanto, en general,

$$f = f\left( \frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D}, m \right) \tag{5.10.9}$$

La prueba de que se satisface esta relación se deja a la experimentación. Para tuberías lisas, al llevar a un gráfico las medidas experimentales se encuentra que se satisface la relación funcional con una desviación del 5 por 100. El gráfico del coeficiente de rozamiento en función del número de Reynolds en un papel logarítmico se llama el *diagrama de Stanton*. Blasius† fue el primero que hizo experiencias con tuberías lisas en flujo

† H. Blasius, Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, *VDI-Forschungsh.*, vol. 131, 1913.

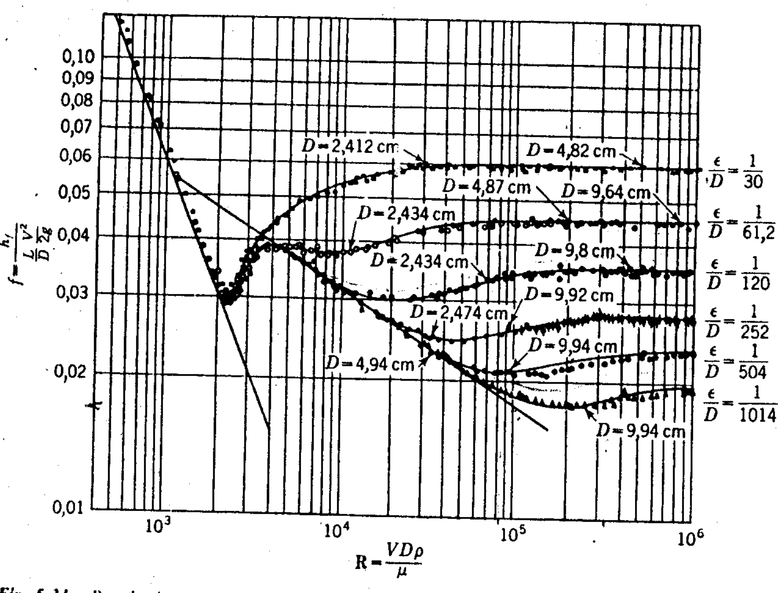



*Fig. 5.31 Resultados experimentales en tuberías rugosas con arena realizados por Nikuradse.*

turbulento, obteniendo una fórmula empírica que es válida hasta $\mathbf{R}$ = 100.000, que es

$$f = \frac{0{,}316}{\mathbf{R}^{1/4}} \tag{5.10.10}$$

En tuberías rugosas, el término $\epsilon/D$ se llama *rugosidad relativa*. Nikuradse† probó la validez del concepto de la rugosidad relativa con sus experiencias en tuberías de rugosidad artificial de arena. Usó tres tamaños de tubos y pegó granos de arena ($\epsilon$ = diámetro de los granos de arena) de un tamaño prácticamente constante en las paredes internas, de tal forma que así tenía los mismos valores de $\epsilon/D$ para los diferentes tubos. Estas experiencias demuestran (Fig. 5.31) que para un valor de $\epsilon/D$ la función que liga a $f$ con $\mathbf{R}$ es independiente del diámetro del tubo. Dichas experiencias no permiten variaciones de $\epsilon'/D$ o $m$, pero prueban la validez de la ecuación

$$f = f\left(\mathbf{R}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

para un tipo de rugosidad.

A causa de la extrema complejidad de las superficies rugosas natura-

† J. Nikuradse, Strömungsgesetze in rauhen Rohren, *VDI-Forschungsh.*, vol. 361, 1933.



les, la mayoría de los avances hechos en la deducción de las relaciones fundamentales se han logrado mediante experiencias con tubos de rugosidad artificial. Moody† ha construido uno de los gráficos más prácticos para la determinación del coeficiente $f$ de tuberías comerciales. Este gráfico, que se reproduce en la Fig. 5.32, es la base de los cálculos de flujo en tuberías que se hacen en este capítulo. Este gráfico es un diagrama de Stanton que expresa $f$ como una función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. El valor de la rugosidad absoluta de una tubería comercial se determina por experiencias en las cuales $f$ y $\mathbf{R}$ se calculan y se sustituyen en la fórmula de Colebrook, Ec. (5.10.7), que representa con bastante precisión la tendencia de las tuberías naturales. En el ángulo inferior izquierdo de la Fig. 5.32 están los valores de la rugosidad absoluta. La fórmula de Colebrook da la forma de las curvas de $\epsilon/D$ = const en la región de transición.

La línea recta de flujo laminar corresponde a la ecuación de Hagen-Poiseuille. La Ec. (5.2.10*b*)

$$V = \frac{\Delta p r_0^2}{8\mu L}$$

Puede transformarse en la Ec. (5.8.4) con $\Delta p = \gamma h_f$ y despejando $h_f$,

$$h_f = \frac{V 8\mu L}{\gamma r_0^2} = \frac{64\mu}{\rho D}\frac{L}{D}\frac{V}{2g} = \frac{64}{\rho D V/\mu}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

o sea

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\mathbf{R}}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{5.10.11}$$

de donde

$$f = \frac{64}{\mathbf{R}} \tag{5.10.12}$$

Esta ecuación, que está representada por una línea recta de pendiente $-1$ en un papel logarítmico, puede usarse para la resolución de los problemas de flujo laminar en tuberías. Se aplica a todas las rugosidades, pues en flujo laminar la pérdida de energía es independiente de la rugosidad de las paredes. El número crítico de Reynolds es aproximadamente 2.000 y la *zona crítica* donde el flujo es unas veces laminar y otras veces turbulento está aproximadamente entre 2.000 y 4.000.

Debe notarse que las curvas de rugosidad relativa $\epsilon/D$ = 0,001 y menores se aproximan a la curva de tubería lisa para números de Reynolds

† L. F. Moody, Friction Factors for Pipe Flow. *Trans. ASME*, noviembre 1944.

decrecientes. Esto se explica por la presencia de una película laminar en la pared del tubo que disminuye de espesor cuando el número de Reynolds aumenta. Para ciertos intervalos del número de Reynolds en la zona de transición la película cubre completamente las pequeñas proyecciones de la rugosidad y el tubo tiene un coeficiente de rozamiento que coincide con el del tubo liso. Para números de Reynolds mayores, las proyecciones sobresalen por fuera de la película laminar y cada proyección causa una turbulencia extra que aumenta la pérdida de energía. Para la zona señalada como de «turbulencia completa, tubos rugosos», el espesor de la película es despreciable comparado con la altura de las proyecciones de las rugosidades y cada proyección contribuye por completo a la turbulencia. La viscosidad no afecta a la pérdida de energía en esta zona, como evidencia el hecho de que el coeficiente de rozamiento no varíe con el número de Reynolds. En esta zona, la pérdida de energía sigue la ley del cuadrado de la velocidad, es decir, que varía en razón directa del cuadrado de la velocidad.

Dos escalas auxiliares se dan en la parte superior del diagrama de Moody. Una es para el agua a 15° C y la otra para el aire a la presión atmosférica normal y 15° C. Como en estos dos casos, la viscosidad cinemática es constante el número de Reynolds es una función de $VD$. Para estas dos escalas únicamente, $D$ está en céntimetros.

*Problemas en una tubería sencilla*

Los tres casos simples de flujo en tuberías que son básicos para la resolución de problemas más complejos son:

| | *Datos* | *Incógnitas* |
|---|---|---|
| I. | $Q, L, D, \nu, \epsilon$ | $h_f$ |
| II. | $h_f, L, D, \nu, \epsilon$ | $Q$ |
| III. | $h_f, Q, L, \nu, \epsilon$ | $D$ |

En cada uno de estos casos se utilizan para determinar la magnitud desconocida la fórmula de Darcy-Weisbach, la ecuación de continuidad y el diagrama de Moody.

En el primer caso, el número de Reynolds y la rugosidad relativa se determinan fácilmente a partir de los datos, y $h_f$ se calcula determinando $f$ por el diagrama de Moody y sustituyendo en la fórmula de Darcy-Weisbach.

***Ejemplo 5.9*** Determinar la pérdida de energía en el flujo de 8.000 l/min de un aceite de $\nu = 0{,}00001$ m²/seg, a través de una tubería de fundición de 300 m de longitud y de diámetro 200 mm.

$$V = \frac{8}{60(\pi 0{,}2^2/4)} = 4{,}23 \text{ m/seg} \qquad \mathbf{R} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{4{,}23 \times 0{,}2}{0{,}00001} = 84.600$$



La rugosidad relativa es $\epsilon/D = 0{,}0013$. De la Fig. 5.32, por interpolación $f = 0{,}024$; por consiguiente:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0{,}024\frac{300}{0{,}2}\frac{4{,}23^2}{19{,}61} = 32{,}9 \text{ kgm/kg}$$

En el segundo caso, $V$ y $f$ son desconocidos y hay que usar simultáneamente la fórmula de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody para encontrar sus valores. Como $\epsilon/D$ es conocido, se puede suponer un valor de $f$ para entrar en el diagrama de Moody. Sustituyendo este valor ensayado en la fórmula de Darcy-Weisbach se obtiene un valor de $V$ a partir del cual se calcula un número de Reynolds. Con este número de Reynolds en el diagrama de Moody se encuentra un valor de $f$ más aproximado. Cuando se ha encontrado un $f$ con dos cifras significativas correctas, el valor correspondiente de $V$ es el valor buscado, y $Q$ se determina multiplicando por el área.

***Ejemplo 5.10*** El agua a 15° C fluye por una tubería de diámetro 300 mm de acero reblonado, $\epsilon = 0{,}003$, con una pérdida de energía, en 300 m, de 6 m. Determinar el caudal.

La rugosidad relativa es $\epsilon/D = 0{,}01$, y en la Fig. 5.32 se toma como ensayo para $f$ el valor 0,040. Sustituyendo en la Ec. (5.8.4),

$$6 = 0{,}040\frac{300}{0{,}3}\frac{V^2}{19{,}6} \qquad V = 1{,}71 \text{ m/seg}$$

y $VD'' = 51{,}3$ para utilizar con la escala superior de la Fig. 5.32, con lo que se obtiene $f = 0{,}038$. Con este valor de $f$ en lugar de 0,040 en la ecuación de más arriba, $V = 1{,}76$, $VD'' = 52{,}8$ y $f$ continúa valiendo 0,038. El caudal es

$$Q = 1{,}76\frac{3{,}14 \times 0{,}3}{4} = 0{,}124 \text{ m}^3/\text{seg} = 7.440 \text{ l/min}$$

En el tercer caso, con $D$ desconocido, hay tres cantidades desconocidas en la Ec. (5.8.4), $f$, $V$, $D$; dos en la ecuación de continuidad, $V$, $D$, y tres en la expresión del número de Reynolds, $V$, $D$, $\mathbf{R}$. La rugosidad relativa es también desconocida. Usando la ecuación de continuidad para eliminar la viscosidad en la Ec. (5.8.4) y en la expresión de $\mathbf{R}$ se simplifica el problema. La Ec. (5.8.4) se convierte en

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{Q^2}{2g(D^2\pi/4)^2}$$

o sea

$$D^5 = \frac{8LQ^2}{h_f g\pi^2}f = C_1 f \qquad (5.10.13)$$

en la cual $C_1$ es la cantidad conocida $8LQ^2/h_f g\pi^2$. Como $VD^2 = 4Q/\pi$, por la ecuación de continuidad,

$$\mathbf{R} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi\nu}\frac{1}{D} = \frac{C_2}{D} \qquad (5.10.14)$$

en la cual $C_2$ es la cantidad conocida $4Q/\pi\nu$. La solución se encuentra por el procedimiento siguiente:

1. Se atribuye un valor a $f$.
2. Se calcula $D$ por la Ec. (5.10.13).
3. Se calcula $\mathbf{R}$ por la Ec. (5.10.14).
4. Se encuentra la rugosidad relativa $\epsilon/D$.
5. Con $\mathbf{R}$ y $\epsilon/D$ se calcula en el gráfico de la Fig. 5.32 un nuevo $f$.
6. Utilizando el nuevo $f$, se repite el proceso.
7. Cuando el valor de $f$ no cambia todas las ecuaciones se satisfacen y el problema está resuelto.

Normalmente solo uno o dos ensayos son necesarios. Cuando se usan tuberías de diámetro normalizado se toma la del diámetro superior al resultado obtenido.

*Ejemplo 5.11* Determinar el diámetro de una tubería de acero comercial que va a transportar 16.000 l/min de aceite de $\nu = 0{,}00001$ m/seg, con una longitud de 300 m y una pérdida de energía de 25 kgm/kg.

El caudal es

$$Q = \frac{16.000 \times 10^{-3}}{60} = 0{,}267 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Por la Ec. (5.10.13),

$$D^5 = \frac{8 \times 300 \times 0{,}267^2}{25 \times 9{,}81 \times 3{,}14^2} f = 0{,}0708 f$$

y por la Ec. (5.10.14),

$$\mathbf{R} = \frac{4 \times 0{,}267}{3{,}14 \times 10^{-5}}\frac{1}{D} = \frac{34.000}{D}$$

y de la Fig. 5.32, $\epsilon = 0{,}000046$.

Si $f = 0{,}02$, $D = 0{,}27$ m, $\mathbf{R} = 1{,}26 \times 10^5$, $\epsilon/D = 0{,}00017$, y en la Fig. 5.32, $f = 0{,}019$. Repitiendo el proceso, $D = 0{,}266$ m, $\mathbf{R} = 1{,}24 \times 10^5$, $f = 0{,}019$. Por tanto, $D = 266$ mm. Si la máxima pérdida permitida es de 25 kgm/kg, el diámetro de la tubería necesario será el diámetro normal superior a 266 mm, que es 300 mm.

En todos los casos que hemos considerado, la pérdida se ha expresado en metros de altura, o sea en kilográmetros por kilogramo. Para un



tubo horizontal esta pérdida se manifiesta por una gradual reducción de la presión a lo largo de la conducción. En los casos en que el tubo no es horizontal, la ecuación de la energía (3.10.1) se aplica a las dos secciones extremas del tubo incluyendo un término más que es la pérdida; así

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \qquad (5.10.15)$$

en la que el factor de corrección de la energía cinética se ha hecho igual a la unidad. La sección de aguas arriba se ha designado con el subíndice 1 y la de aguas abajo con el 2. La energía mecánica en la sección 1 es igual a la suma de la energía mecánica en la sección 2 y de todas las pérdidas entre las dos secciones.

***Ejemplo 5.12*** **En el ejemplo anterior para $D = 266$ mm, si el peso específico relativo es 0,85, $p_1 = 3$ kg/cm², $z_1 = 60$ m y $z_2 = 15$ m, determinar la presión en la sección 2.**

**En la Ec. (5.10.15) $V_1 = V_2$; por consiguiente:**

$$\frac{3 \times 10^4}{0{,}85 \times 10^3} + 60 = \frac{p_2}{0{,}85 \times 10^3} + 15 + 25$$

y

$$p_2 = 4{,}7 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 = 4{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

### Pérdidas menores

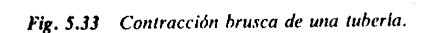
Las pérdidas que se presentan en las tuberías debidas a codos, bifurcaciones, juntas de unión, válvulas, etc., se llaman *pérdidas menores*. Este es un nombre mal dado, porque en muchos casos estas pérdidas son más importantes que las debidas al rozamiento consideradas en el párrafo anterior. En casi todos los casos, las pérdidas menores se determinan experimentalmente; sin embargo, hay una importante excepción que es la pérdida debida a la expansión brusca de una tubería (Sección 3.12).

La Ec. (3.12.9) puede también escribirse:

$$h_e = K\frac{V_1^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 \frac{V_1^2}{2g} \qquad (5.10.16)$$

en la cual

$$K = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 \qquad (5.10.17)$$



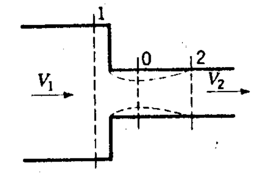



*Fig. 5.33 Contracción brusca de una tubería.*

De la Ec. (5.10.16) se deduce que la pérdida varía con el cuadrado de la velocidad. Esto se cumple también para todas las pérdidas menores en flujo turbulento. Un método conveniente de expresar las pérdidas menores del flujo es por medio de coeficiente $K$ que generalmente se determina experimentalmente.

Si la expansión brusca es de un tubo a un depósito, $D_1/D_2 = 0$ y la pérdida es $V_1^2/2g$, esto es, la energía cinética total del flujo se convierte en energía térmica.

La pérdida $h_c$ debida a una contracción brusca de la sección de un tubo, ilustrada en la Fig. 5.33, se somete al mismo análisis que la expansión brusca, supuesto que la contracción del chorro es conocida. El proceso de conversión de energía de presión en energía de velocidad es muy eficiente; por consiguiente, la pérdida desde la sección 1 a la *vena contraída*† es pequeña comparada con la pérdida entre la sección 0 y la 2, donde la energía cinética se vuelve a convertir en energía de presión. Aplicando la Ec. (3.12f9), a esta expansión, se calcula que la pérdida es

$$h_c = \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g}$$

Usando la ecuación de continuidad $V_0 C_c A_2 = V_2 A_2$, en la que $C_c$ es el coeficiente de contracción (es decir, el área del chorro en la sección 0 dividida por el área de la sección 0), se calcula que la pérdida vale

$$h_c = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} \qquad (5.10.18)$$

El coeficiente de contracción para el agua $C_c$, determinado por Weisbach‡, es el de la tabla que sigue:

| $A_2/A_1$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_c$ | 0,624 | 0,632 | 0,643 | 0,659 | 0,681 | 0,712 | 0,755 | 0,813 | 0,892 | 1,00 |

† La *vena contraída* es la sección de mayor contracción del chorro.
‡ Julius Weisbach, «Die Experimental-Hydraulik», pág. 133, J. S. Englehardt, Freiberg, 1855.



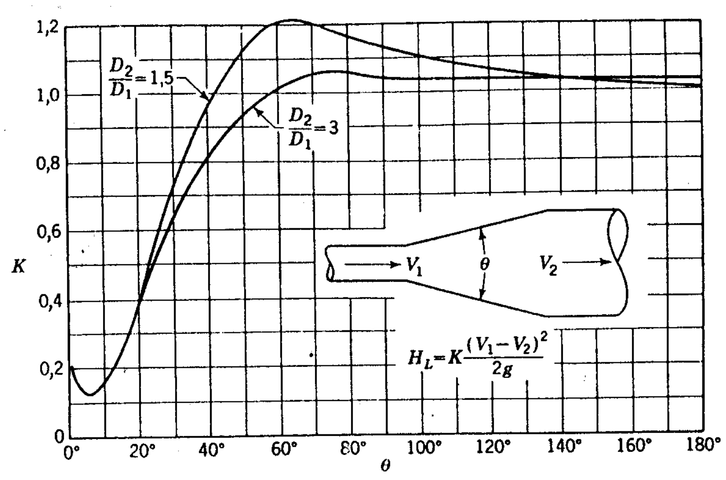



*Fig. 5.34 Coeficiente de pérdida para expansiones cónicas.*

La pérdida a la entrada de un tubo desde un depósito se toma generalmente como $0{,}5V^2/2g$, si la entrada no es abocinada. Para entradas abocinadas, la pérdida varía entre $0{,}01V^2/2g$ y $0{,}05V^2/2g$ y en general puede apreciarse. Para aperturas reentrantes como cuando el tubo penetra dentro del depósito (boquilla de Borda), la pérdida se toma como $1{,}0V^2/2g$ cuando las paredes del tubo son delgadas.

La pérdida debida a expansiones graduales ha sido investigada experimentalmente por Gibson†, dándose los resultados en la Figura 5.34.

Un resumen de los coeficientes de pérdida $K$ para casos típicos ha sido publicado por la Compañía Crane‡ y se da en la Tabla 5.3.

**Tabla 5.3 Coeficientes de pérdida K para diversas transiciones de tubería**

| | K |
|---|---|
| Válvula esférica (totalmente abierta) | 10,0 |
| Válvula de ángulo (totalmente abierta) | 5,0 |
| Válvula de seguridad (totalmente abierta | 2,5 |
| Válvula de compuerta (totalmente abierta) | 0,19 |
| Codo de retroceso | 2,2 |
| Empalme en T normal | 1,8 |
| Codo a 90° normal | 0,9 |
| Codo a 90° de radio medio | 0,75 |
| Codo a 90° de radio grande | 0,60 |

† A. H. Gibson, The Conversion of Kinetic to Pressure Energy in the Flow of Water through Passages Having Divergent Boundaries, *Engineering*, vol. 93, pág. 205, 1912.
‡ Crane Company, «Flow of Fluids», *Tech. Paper* 409, mayo 1942.

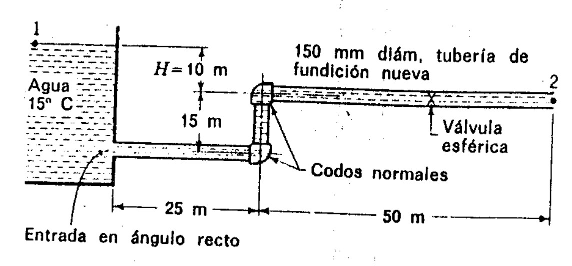



*Fig. 5.35 Tubería con pérdidas menores.*

Las pérdidas menores también pueden expresarse en función de la longitud de tubo equivalente $L_e$, que es la longitud de tubo en la que se produciría la misma pérdida en kilográmetros/kilogramo para el mismo caudal, así

$$f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2g} = K\frac{V^2}{2g}$$

en la cual $K$ se refiere a una pérdida menor o a la suma de varias pérdidas. Despejando $L_e$,

$$L_e = \frac{KD}{f} \qquad (5.10.19)$$

Por ejemplo, si las pérdidas menores en una tubería de 100 mm de diámetro son tales que la suma de los coeficientes $K$ es $K = 20$ y si para esta conducción es $f = 0{,}020$, entonces la longitud verdadera de la conducción debe ser aumentada $20 \times 0{,}1/0{,}020 = 100$ m, y esta longitud adicional o equivalente origina la misma resistencia al movimiento del fluido que las pérdidas menores.

***Ejemplo 5.13*** Calcular el caudal a través de la tubería representada en la Fig. 5.35 para $H = 10$ m y determinar la pérdida de altura $H$ para $Q = 50$ l/seg.

La ecuación de la energía aplicada a los puntos 1 y 2, incluyendo todas las pérdidas, puede escribirse:

$$H + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{2g} + f\frac{90}{0{,}15}\frac{V^2}{2g} + 2 \times 0{,}9\frac{V^2}{2g} + 10\frac{V^2}{2g}$$

Después de simplificar,

$$H = \frac{V^2}{2g}(13{,}3 + 600f)$$



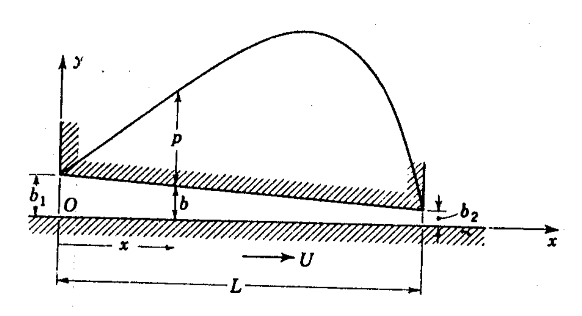



*Fig. 5.36 Cojinete plano.*

Cuando se conoce la altura $H$, este problema se resuelve como el segundo tipo de problemas de tuberías simples. Si $f = 0{,}02$, entonces

$$10 = \frac{V^2}{2g}(13{,}3 + 600 \times 0{,}02)$$

y $V = 2{,}78$ m/seg, $\epsilon/D = 0{,}0259/15 = 0{,}0017$; $VD'' = 2{,}78 \times 15 = 41{,}5$. En la Fig. 5.32, $f = 0{,}023$. Despejando de nuevo la velocidad, $V = 2{,}69$ m/seg, $VD'' = 2{,}69 \times 15 = 40{,}5$, y $f$ no varía. El caudal es, por tanto,

$$Q = 2{,}69\frac{\pi 0{,}15^2}{4} = 0{,}0475 \text{ m}^3/\text{seg} = 2850 \text{ l/min}$$

En la segunda parte, como $Q$ es conocido, el proceso de cálculo es el siguiente:

$$V = \frac{Q \times 4}{\pi D^2} = \frac{0{,}050 \times 4}{3{,}14 \times 0{,}15^2} = 2{,}83 \text{ m/seg} \qquad VD'' = 2{,}83 \times 15 = 42{,}5 \qquad f = 0{,}023$$

y

$$H = \frac{2{,}83^2}{2 \times 9{,}81}(13{,}3 + 600 \times 0{,}023) = 11{,}07 \text{ m}$$

El problema puede resolverse utilizando la longitud equivalente, Ec. (5.10.19), tomando para valor de $f$ aproximadamente $f = 0{,}020$. La suma de las pérdidas menores es $K = 13{,}3$, en la cual la energía cinética en 2 se incluye como una pérdida menor,

$$L_e = \frac{13{,}3 \times 0{,}15}{0{,}02} = 100 \text{ m}$$

Por consiguiente, la longitud total de la tubería es $90 + 100 = 190$ m. La primera parte del problema se resuelve por este método,

$$10 = f\frac{L + L_e}{D}\frac{V^2}{2g} = f\frac{190}{0{,}15}\frac{V^2}{2g}$$

Si $f = 0{,}02$, $V = 2{,}78$, $VD'' = 41{,}7$, $f = 0{,}023$; entonces $V = 2{,}59$, $VD'' = 39{,}0$, $f = 0{,}023$, $Q = 0{,}046$ m³/seg. Normalmente no es necesario usar el nuevo valor de $f$ en la Ec. (5.10.19).

Las pérdidas menores pueden despreciarse en todos los casos en que suponen solamente el 5 por 100 o menos de la pérdida de energía debida al rozamiento. El coeficiente de rozamiento en el mejor de los casos tiene un error de aproximadamente el 5 por 100 y no tiene objeto elegir valores con más de dos cifras significativas. En general, las pérdidas menores pueden despreciarse cuando por término medio hay una distancia de 1.000 diámetros entre cada dos pérdidas menores.

En el Cap. 6 se trata el movimiento compresible en tuberías. En el Cap. 10 se estudian los casos de movimiento en tuberías más complejos.

### 5.11 Mecánica de la lubricación

El efecto de la viscosidad sobre el flujo y sobre las pérdidas de energía se ha examinado en las secciones precedentes de este capítulo. Un caso de flujo laminar de gran interés práctico es la teoría hidrodinámica de la lubricación. Los aspectos más sencillos de esta teoría se desarrollan en este número.

Cuando entre dos superficies muy próximas, y una de ellas ligeramente inclinada con respecto a la otra, hay un fluido viscoso, y se mueve una de ellas, se originan grandes fuerzas en la cuña de fluido interpuesto. El cojinete plano que funciona según este principio está representado en la Fig. 5.36. El cojinete cilíndrico (Fig. 5.37) desarrolla su fuerza por el mismo principio, con la particularidad de que las superficies son curvas.

Las ecuaciones del flujo laminar pueden usarse para deducir la teoría de la lubricación. Se hace la hipótesis de que no se derrama fluido por los extremos del cojinete, normalmente al plano de la Fig. 5.36. A partir de la Ec. (5.1.4) que relaciona la caída de presión con la tensión de cortadura se deducirán la fuerza $P$ que el cojinete puede soportar y la resistencia al movimiento.

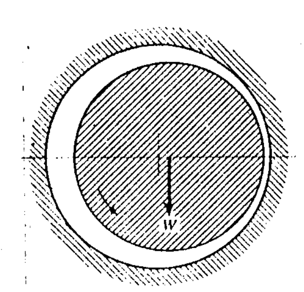



*Fig. 5.37 Cojinete cilíndrico.*



Sustituyendo la ley de Newton de la viscosidad en la Ec. (5.1.4) resulta

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \tag{5.11.1}$$

Como la inclinación de la parte superior del cojinete (Fig. 5.36) es muy pequeña, se supone que la ley de distribución de velocidades es la misma que habría si las dos placas fuesen paralelas y $p$ fuese independiente de $y$. Integrando la Ec. (5.11.1)

$$\frac{dp}{dx}\int dy = \mu \int \frac{d^2u}{dy^2}dy + A$$

o sea

$$\frac{dp}{dx}y = \mu \frac{du}{dy} + A$$

y la segunda vez

$$\frac{dp}{dx}\int y\,dy = \mu \int \frac{du}{dy}dy + A\int dy + B$$

o sea

$$\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} = \mu u + Ay + B$$

Las constantes de integración $A$, $B$ se determinan por las condiciones $u = 0$, $y = b$; $u = U$, $y = 0$. Sustituyendo resulta

$$\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{2} = Ab + B \qquad \mu U + B = 0$$

Eliminando $A$ y $B$ y despejando $u$ resulta

$$u = \frac{y}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y - b) + U\left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{5.11.2}$$

El caudal $Q$ debe ser el mismo en cada sección. Integrando en una sección típica, con $dp/dx$ de nuevo constante,

$$Q = \int_0^b u\,dy = \frac{Ub}{2} - \frac{b^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} \tag{5.11.3}$$

Ahora, como $Q$ no puede variar con $x$, $b$ puede expresarse en función de $x$, $b = b_1 - \alpha x$, siendo $\alpha = (b_1 - b_2)/L$, y la ecuación se integra con respecto a $x$ para determinar la distribución de presiones. Despejando en la Ec. (5.11.3) $dp/dx$,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{(b_1 - \alpha x)^2} - \frac{12\mu Q}{(b_1 - \alpha x)^3} \tag{5.11.4}$$

Integrando

$$\int \frac{dp}{dx} dx = 6\mu U \int \frac{dx}{(b_1 - \alpha x)^2} - 12\mu Q \int \frac{dx}{(b_1 - \alpha x)^3} + C$$

o también

$$p = \frac{6\mu U}{\alpha(b_1 - \alpha x)} - \frac{6\mu Q}{\alpha(b_1 - \alpha x)^2} + C$$

En esta ecuación $Q$ y $C$ son desconocidos. Como la presión debe ser la misma, es decir, cero, en los extremos del cojinete, $p = 0$, $x = 0$; $p = 0$, $x = L$, las constantes pueden determinarse

$$Q = \frac{Ub_1b_2}{b_1 + b_2} \qquad C = -\frac{6\mu U}{\alpha(b_1 + b_2)}$$

Introduciendo estos valores, se obtiene la siguiente ecuación de distribución de presiones

$$p = \frac{6\mu Ux(b - b_2)}{b^2(b_1 + b_2)} \tag{5.11.5}$$

Esta ecuación demuestra que $p$ es positivo entre $x = 0$ y $x = L$ si $b > b_2$. En la Fig. 5.36 se ha dibujado la curva de distribución de la presión en el cojinete. Con este método unidimensional de análisis se desprecia la muy ligera variación de presión a lo largo de una línea vertical $x$ = constante.

La fuerza total $P$ que el cojinete puede soportar, por unidad de anchura, es

$$P = \int_0^L p\,dx = \frac{6\mu U}{b_1 + b_2}\int_0^L \frac{x(b - b_2)\,dx}{b^2}$$

Sustituyendo el valor de $b$ en función de $x$ e integrando

$$P = \frac{6\mu UL^2}{(b_1 - b_2)^2}\left(\ln\frac{b_1}{b_2} - 2\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right) \tag{5.11.6}$$



La fuerza de arrastre $D$ necesaria para mover la superficie inferior a velocidad $U$ está expresada por

$$D = \int_0^L \tau \Big|_{y=0} dx = -\int_0^L \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} dx$$

Calculando $du/dy$ a partir de la Ec. (5.11.2), para $y = 0$,

$$\frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = -\frac{b}{2\mu}\frac{dp}{dx} - \frac{U}{b}$$

Con este valor en la integral, junto con el valor de $dp/dx$ dado por la Ec. (5.11.4),

$$D = \frac{2\mu UL}{b_1 - b_2}\left(2\ln\frac{b_1}{b_2} - 3\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right) \tag{5.11.7}$$

La carga máxima $P$ se calcula con la Ec. (5.11.6) cuando $b_1 = 2{,}2b_2$. Con esta relación,

$$P = 0{,}16\frac{\mu UL^2}{b_2^2} \qquad D = 0{,}75\frac{\mu UL}{b_2} \tag{5.11.8}$$

La relación de la carga a la resistencia para la carga óptima es

$$\frac{P}{D} = 0{,}21\frac{L}{b_2} \tag{5.11.9}$$

que puede ser muy grande porque $b_2$ puede ser muy pequeño.

*Ejemplo 5.14* El eje vertical de una turbina soporta una carga de 40.000 kg sobre un cojinete de empuje plano formado por 16 placas planas orientables de 8 × 25 cm dispuestas con su mayor longitud en la dirección del radio del eje y con sus centros en un círculo de radio de 0,5 m. El eje gira a 120 r.p.m.; $\mu = 0{,}01$ kg-seg/m². Si las placas toman el ángulo de la carga máxima, despreciando los efectos de curvatura de la trayectoria y el flujo radial de lubricante, encontrar (*a*) la holgura entre la placa orientable y la placa fija; (*b*) la pérdida de par debida al rozamiento del cojinete.

(*a*) Como se considera el movimiento con trayectorias rectas

$$U = 0{,}5 \times \frac{120}{60} \times 2\pi = 6{,}28 \text{ m/seg}$$

$$L = 0{,}08 \text{ m}$$

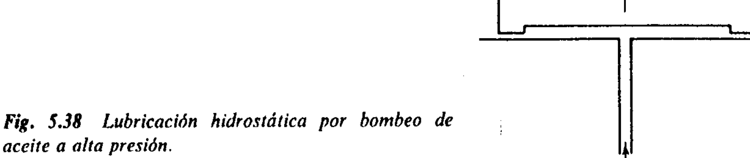



*Fig. 5.38 Lubricación hidrostática por bombeo de aceite a alta presión.*

La carga es de 2.500 kg por cada placa, lo que supone 2.500/0,25 = 10.000 kg por unidad de anchura. Para el huelgo se despeja $b_2$ en la Ec. (5.11.8),

$$b_2 = \sqrt{\frac{0{,}16\mu UL^2}{P}} = 0{,}4 \times 0{,}08 \sqrt{\frac{0{,}01 \times 6{,}28}{10.000}} = 0{,}08 \times 10^{-3}\ \text{m} = 0{,}08\ \text{mm}$$

(*b*) La resistencia debida a una placa es, por metro de anchura,

$$D = 0{,}75\frac{\mu UL}{b_2} = \frac{0{,}75 \times 0{,}01 \times 6{,}28 \times 0{,}08}{0{,}08 \times 10^{-3}} = 47{,}1\ \text{kg/m}$$

Para una placa de 25 cm, $D = 47{,}1 \times 0{,}25 = 11{,}7$ kg. El par para las 16 placas es

$$16 \times 11{,}7 \times 0{,}5 = 93{,}6\ \text{m/kg}$$

Hay otra forma de lubricación, llamada *lubricación hidrostática*†, que tiene muchas aplicaciones importantes. Implica el bombeo continuo de aceite a alta presión bajo un pivote o quicio anular, como se indica en la Fig. 5.38. La carga se puede elevar por la lubricación antes de que empiece la rotación, lo que reduce grandemente el rozamiento del arranque.

## Problemas

*5.1* Determinar las fórmulas para la tensión de cortadura en cada placa para la distribución de velocidades del flujo de la Fig. 5.1 cuando existe un gradiente de presiones adverso tal que $Q = 0$.

*5.2* En la Fig. 5.1, con $U$ positivo, hallar la expresión de $d(p + \gamma h)/dl$ tal que la cortadura sea cero en la placa fija. ¿Cuál es el caudal en este caso?

*5.3* En la Fig. 5.39*a*, $U = 60$ cm/seg. Hallar el caudal a que se lleva el aceite a la cámara de presión por medio del pistón así como la fuerza de cortadura y la fuerza total $F$ que actúa.

† Para mayor información sobre lubricación hidrostática ver D. D. Fuller, Lubrication Mechanics, in «Handbook of Fluid Dynamics», editado por V. L. Streeter, págs. 22-2i a 22-30, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.





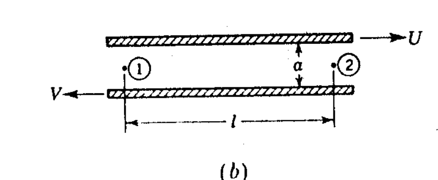




*Fig. 5.39*

*5.4* Determinar la fuerza sobre el pistón de la Fig. 5.39*a* debida a la tensión cortante y la pérdida de aceite desde la cámara de presión para $U = 0$.

*5.5* Hallar $F$ y $U$ en la Fig. 5.39*a* de manera que no haya pérdidas de aceite, a través del huelgo, desde la cámara de presión.

*5.6* Deducir una expresión para el flujo que pasa una sección recta fija de la Fig. 5.39*b* para flujo laminar entre las dos placas móviles.

*5.7* En la Fig. 5.39*b*, para $p_1 = p_2 = 0{,}7$ kg/cm², $U = 2V = 2{,}5$ m/seg, $a = 0{,}15$ cm, $\mu = 0{,}5$ poise, hallar la tensión de cortadura en cada placa.

*5.8* Calcular los factores de corrección de la energía cinética y de la cantidad de movimiento para flujo laminar entre placas paralelas fijas.

*5.9* Determinar la fórmula para el ángulo $\theta$ para placas paralelas fijas de manera que tenga lugar flujo laminar a presión constante.

*5.10* Con un cuerpo libre, como en la Fig. 5.40, para el flujo uniforme de una lámina delgada de líquido por un plano inclinado, demostrar que la distribución de velocidades es

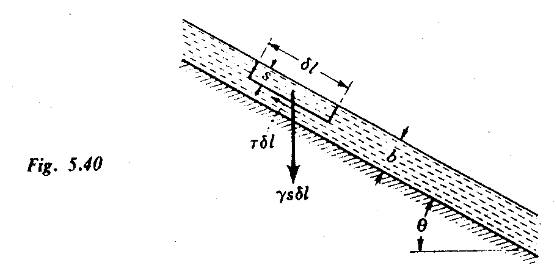



*Fig. 5.40*

$$u = \frac{\gamma}{2\mu}(b^2 - s^2)\ \text{sen}\ \theta$$

y que el caudal por unidad de ancho es

$$Q = \frac{\gamma}{3\mu} b^3\ \text{sen}\ \theta$$

*5.11* Deducir la distribución de velocidades del Prob. 5.10 incluyendo en la ecuación adecuada, previa a la Ec. (5.1.2), la condición de que la cortadura en la superficie libre debe ser cero.

*5.12* En la Fig. 5.41, $p_1 = 0{,}4$ kg/cm², $p_2 = 0{,}6$ kg/cm², ambas manométricas, $l = 120$ cm, $a = 0{,}18$ cm, $\theta = 30°$, $U = 1$ m/seg, $\gamma = 800$ kg/m³ y $\mu = 0{,}8$ poises. Determinar la fuerza tangencial por metro cuadrado ejercida sobre la placa superior y su dirección.

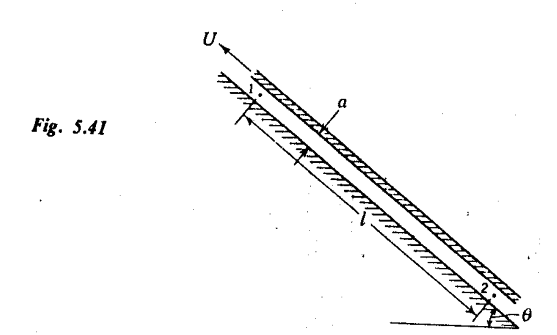



*Fig. 5.41*

*5.13* Para $\theta = 90°$ en la Fig. 5.41, ¿qué velocidad $U$ se requiere para que no haya caudal? $\gamma = 880$ kg/m³, $a = 0{,}3$ cm, $p_1 = p_2$ y $\mu = 0{,}08$ kg-seg/m².

*5.14* La cinta transportadora (Fig. 5.42) tiene suficiente longitud para que pueda suponerse que la velocidad de la superficie libre del líquido es nula. Considerando únicamente el trabajo que la cinta comunica al fluido por cortadura, ¿qué rendimiento tiene este dispositivo en la transferencia de energía al fluido?

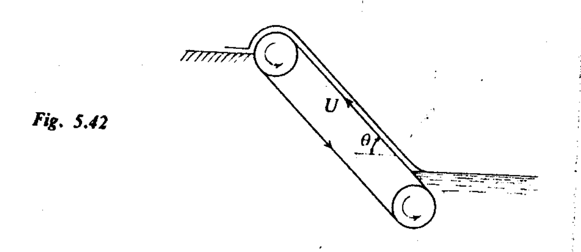



*Fig. 5.42*

*5.15* ¿Cuál es la distribución de velocidades del fluido en la correa y el caudal que se transporta en el Problema 5.14?

*5.16* ¿Cuál es la variación de la cantidad de movimiento y de la energía, respecto del tiempo, del fluido que atraviesa una sección recta normal al flujo si en la Ec. (5.1.3) es $Q = 0$?

*5.17* Una película de fluido de 0,15 cm de espesor se desliza por una superficie vertical fija con una velocidad de 60 cm/seg. Determinar la viscosidad del fluido. $\gamma = 880$ kg/m³.

*5.18* Determinar el coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento para un flujo laminar en un tubo circular.

*5.19* Por un tubo de 1,25 mm de diámetro fluye en régimen laminar agua en condiciones normales. Este tubo se ensancha a un diámetro de 2,50 mm y el flujo viene representado de nuevo por la Ec. (5.2.6) cierta distancia aguas abajo del ensanchamiento. Determinar la fuerza que se ejerce sobre el tubo debida a la diferencia en el flujo de cantidad de movimiento en los dos tubos.



*5.20* ¿A qué distancia $r_0$ del centro de un tubo de radio $r$ aparece la velocidad media en flujo laminar?

*5.21* Determinar las máximas tensiones de cortadura en las paredes de un tubo de diámetro $D$ para flujo laminar con propiedades del fluido $\mu$ y $\rho$ dadas.

*5.22* Demostrar que el flujo laminar entre placas paralelas se puede utilizar en lugar del flujo a través de un anillo con una precisión del 1 por 100 si el huelgo no es mayor que el 4 por 100 del radio interior.

*5.23* ¿Cuáles son las pérdidas por kilogramo y por metro de tubo para un flujo de mercurio a 50° C y un diámetro de 0,06 cm con un número de Reynolds de 1800?

*5.24* Determinar la tensión cortante en la pared de un tubo de 2 mm de diámetro cuando a través de él fluye agua a 25° C a una velocidad de 30 cm/seg?

*5.25* Determinar la caída de presión por 100 m de tubo de diámetro interior 3 mm para flujo de un líquido de $\mu = 60$ centipoises, peso específico relativo = 0,83 y un número de Reynolds de 100.

*5.26* A través de una tubería de 1 cm de diámetro circula glicerina a 27° C, con una caída de presión de 1,2 kg/cm² por metro de tubería. Calcular el caudal y el número de Reynolds.

*5.27* Calcular el diámetro de la tubería vertical necesaria para que fluya un líquido con número de Reynolds de 1800 cuando la presión permanece constante. $\nu = 1{,}5 \times 10^{-6}$ cm²/seg.

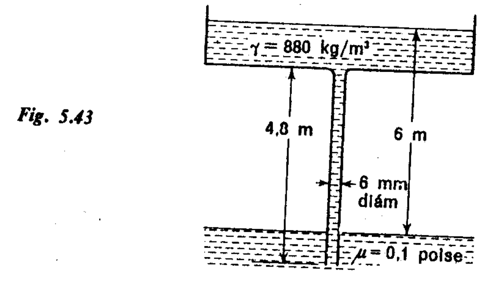



*Fig. 5.43*

*5.28* Calcular el caudal que circula por el sistema indicado en la Fig. 5.43, despreciando todas las pérdidas excepto las que tienen lugar en la tubería.

*5.29* En la Fig. 5.44, $H = 10$ m, $L = 20$ m, $\theta = 30°$, $D = 1$ cm, $\gamma = 1000$

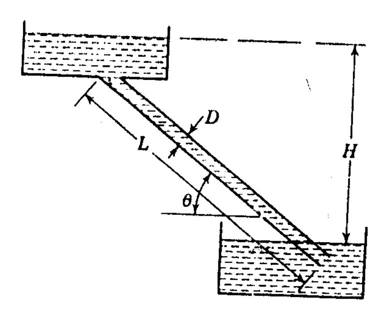



*Fig. 5.44*

kg/m³ y $\mu$ = 0,0085 kg-seg/m². Determinar las pérdidas de carga por unidad de longitud de tubería y el caudal en litros por minuto.

*5.30* Con referencia a la Fig. 5.44 y Prob. 5.29, determinar $H$ si la velocidad es de 3 m/seg.

*5.31* Un aceite, $S$ = 0,87, $\mu$ = 0,52 poises, fluye a través del espacio comprendido entre dos tubos concéntricos con $a$ = 1 cm y $b$ = 0,5 cm. Cuando la tensión de cortadura en la pared exterior es de 1 kg/m², calcular (*a*) la caída de presión por metro cuando el sistema está horizontal; (*b*) el caudal en l/hora; (*c*) la fuerza axial ejercida sobre el tubo interior por metro de longitud.

*5.32* ¿Cuál es el número de Reynolds para un caudal de aceite de 18 m³/min, siendo la densidad relativa del aceite 0,86, $\mu$ = 0,27 poises, y el diámetro de la tubería 50 cm?

*5.33* Calcular el flujo de aceite de peso específico relativo 0,86 a 25° C en un tubo de 9 mm de diámetro para un número de Reynolds de 1200.

*5.34* Determinar la velocidad del queroseno a 32° C en una tubería de 8 cm de diámetro para que el flujo sea dinámicamente semejante a un flujo de 170 m³/min de aire a una presión absoluta de 1,4 kg/cm² y 15° C a través de una tubería de 75 cm de diámetro.

*5.35* ¿Cuál es el número de Reynolds para una esfera de 0,12 cm de diámetro que cae en agua a 25° C con velocidad de 15 cm/seg?

*5.36* Demostrar que la potencia necesaria para que haya flujo laminar en un tubo redondo es $Q\Delta p$ por integración de la Ecuación (5.1.7).

*5.37* Utilizando la ley de distribución de la velocidad de la potencia un séptimo $u/u_{max} = (y/r_0)^{1/7}$, determinar la distribución de la longitud de mezcla $l/r_0$ en función de $y/r_0$ de la Ecuación (5.4.4).

*5.38* Un fluido es agitado de forma que la viscosidad cinemática de remolino aumenta linealmente desde $y$ = 0 en el fondo del depósito a 18,5 cm/seg en $y$ = 60 cm. Encontrar, para partículas de tamaño uniforme que se sedimentan a una velocidad de 30 cm/seg en el fluido en reposo, la concentración en $y$ = 30 cm, si para $y$ = 60 cm la concentración es de 7/dm³.

*5.39* Trazar la curva de $\epsilon/u_* r_0$ en función de $y/r_0$, empleando la Ec. (5.4.9) para la distribución de velocidades en una tubería.

*5.40* Encontrar el valor de $y/r_0$ en una tubería en el punto donde la velocidad se hace igual a la velocidad media.

*5.41* Dibujar los perfiles de la velocidad para la fórmula de la velocidad exponencial de Prandtl para valores de $n$ de $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{9}$.

*5.42* Calcular el arrastre debido al rozamiento superficial sobre un dirigible de 100 m de longitud, 20 m de diámetro medio, que vuela a una velocidad de 123 km/h a través del aire a una presión absoluta de 0,9 kg/cm² y 27° C.

*5.43* La distribución de velocidades en la capa límite está dada por la fórmula $u/U = 3(y/\delta) - 2(y/\delta)^2$. Demostrar que el espesor desplazado de la capa límite es $\delta_1 = \delta/6$.

*5.44* Utilizando la distribución de velocidades $u/U$ = sen $\pi y/2\delta$ determinar la ecuación del crecimiento de la capa límite laminar y la de la tensión de cortadura a lo largo de una placa plana lisa en un flujo bidimensional.

*5.45* Comparar los coeficientes de resistencia que se obtienen con las distribuciones de velocidades dadas en los Problemas 5.43 y 5.44.

*5.46* Deducir la ecuación del crecimiento de la capa límite turbulenta a partir de la ley exponencial $u/U = (y/\delta)^{1/9}$ y $f = 0{,}185/\mathbf{R}^{1/5}$. ($\tau_0 = \rho f V^2/8$.)



*5.47* El aire a 15° C y 1 kg/cm² (abs) fluye a lo largo de una placa lisa con una velocidad de 100 km/h. ¿Qué longitud debe tener la placa para obtener un espesor de capa límite de 6 mm?

*5.48* A veces se hacen divergentes las paredes de un túnel aerodinámico para evitar el efecto de la capa límite al reducir la porción de la sección recta en la que el flujo tiene velocidad constante. ¿A qué ángulo se deben colocar las paredes planas de modo que el ancho del desplazamiento no invada la sección recta de velocidad constante del túnel a distancias mayores que 24 cm a partir de la arista de trabajo de la pared? Utilizar los datos del Problema 5.47.

*5.49* ¿Cuál es la velocidad final de una bola de metal de 5 cm de diámetro y peso específico relativo 3,5 que cae en aceite de peso específico relativo 0,80, $\mu$ = 1 poise? ¿Cuál sería la velocidad final para la misma bola pero de peso específico 7? ¿Cómo coinciden estos resultados con los experimentos atribuidos a Galileo en la torre inclinada de Pisa?

*5.50* ¿A qué velocidad debe moverse una esfera de 12 cm de diámetro a través de una masa de agua a 10° C para que el arrastre sea de 0,5 kg?

*5.51* Un globo esférico contiene helio y asciende en aire a 50° C y 1 kg/cm² (abs). El globo y el lastre pesan 150 kg. ¿Qué diámetro permite una ascensión a 3 m/seg? $C_D$ = 0,21. Si el globo está sujeto al suelo cuando sopla aire de 100 km/h, ¿cuál es el ángulo de inclinación del cable de retención?

*5.52* ¿Cuántos paracaídas de 30 m de diámetro ($C_D$ = 1,2) habrá que utilizar para lanzar un carro que pesa 4500 kg para que la velocidad límite sea de 9,6 m/seg a través de aire a 1 kg/cm² de presión absoluta y $t$ = 21° C?

*5.53* Se une a un disco circular un objeto que pesa 150 kg y se dejan caer desde un avión. ¿Qué diámetro debe tener el disco para que el objeto llegue al suelo a 20 m/seg? El disco está unido de manera que se mantenga normal a la dirección del movimiento. $p$ = 1 kg/cm² (abs), $t$ = 20° C.

*5.54* Un disco circular de 3,5 m de diámetro se mantiene perpendicularmente a una corriente de aire ($\rho$ = 0,126 UTM/m³) de 100 km/h. ¿Cuál es el valor de la fuerza requerida para mantenerlo en reposo?

*5.55* Discutir el origen de la resistencia que se crea en un disco cuando su plano es paralelo al flujo y cuando es normal.

*5.56* Un cilindro semitubular de 15 cm de radio está sumergido en una corriente de agua de 60 cm/seg con su parte cóncava dirigida aguas arriba. Calcular el arrastre si la longitud del cilindro es de 8 m.

*5.57* Un proyectil de la forma de (*a*), Fig. 5.25, tiene 108 mm de diámetro y se mueve en el aire con una velocidad de 1000 m/seg. $\rho$ = 0,105 UTM/m³, $c$ = 340 m/seg. ¿Cuál es la resistencia?

*5.58* Basándonos en el estudio del ángulo de Mach explicar por qué un avión supersónico se ve con frecuencia antes de oirle.

*5.59* Si un aeroplano vuela a 2.000 m de altura y un observador no oye su ruido hasta que ha viajado a 4 km, ¿cuál es su velocidad? La velocidad del sonido es 330 m/seg. ¿Cuál es el ángulo de Mach?

*5.60* Dar alguna razón para la discontinuidad de las curvas de la Fig. 5.23 bajo el ángulo de ataque de 22°.

*5.61* ¿Cuál es la relación de la sustentación a la resistencia para la sección de perfil de ala de la Fig. 5.23 para un ángulo de ataque de 2°?

*5.62* Determinar la velocidad límite de las esferas metálicas de densidad relativa 4,5 y 0,01 cm de diámetro, al moverse en aceite crudo a 22° C.

*5.63* Una partícula esférica de polvo a una altitud de 80 km es radiactiva debido a una explosión atómica. Determinar el tiempo que tardará en caer a la Tierra si sigue la ley de Stokes. Su tamaño y peso específico relativo son 25 micras y 2,5, respectivamente. Despreciar los efectos del aire. Utilizar atmósfera isotérmica a −10° C.

*5.64* ¿Qué diámetro máximo deben tener partículas esféricas de polvo, de densidad relativa 2,5, para que sigan la ley de Stokes en aire atmosférico a 21° C? ¿Qué valor tendrá la velocidad límite?

*5.65* El coeficiente de Chézy es 70 para flujo en un canal rectangular de 1,80 cm de ancho, 60 cm de profundidad y pendiente del fondo de 0,0016. ¿Cuál es el caudal?

*5.66* Por un canal rectangular de 1 m de anchura, con un coeficiente de Chézy $C = 33$ y $S = 0{,}0064$, circula un caudal de 1 $m^3$/seg. Determinar la velocidad.

*5.67* ¿Cuál es el valor del coeficiente de rugosidad de Manning $n$ en el Problema 5.66?

*5.68* Un canal de ladrillos de sección rectangular de 2 m de anchura y 1,5 m de profundidad transporta 6 $m^3$/seg. ¿Qué pendiente tendrá el canal?

*5.69* El canal de sección recta mostrada en la Fig. 5.45 es de madera sin cepillar y tiene una pendiente de 0,0009. ¿Cuál es el caudal?

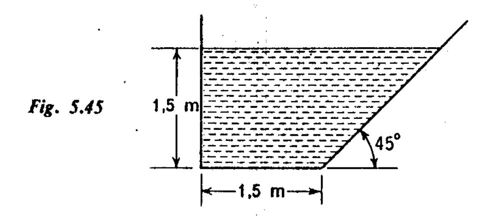


*Fig. 5.45*

*5.70* Por un canal de sección trapezoidal de paredes de hormigón en bruto circula agua con una profundidad de 2 m. La anchura de la solera es de 2,5 m y pendiente de los lados de 1 en horizontal por 1,5 en vertical. ¿Cuál será el caudal para una pendiente de la solera de 0,004?

*5.71* Un canal trapezoidal con pendiente de solera 0,003, ancho de solera 1,2 m y pendiente de los laterales 2 horizontal por 1 vertical lleva 6 $m^3$/seg con una profundidad de 1 m. ¿Cuánto vale el coeficiente de rugosidad de Manning?

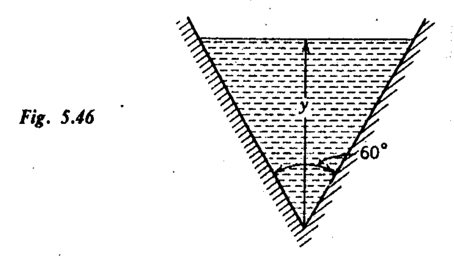


*Fig. 5.46*

*5.72* Se quiere construir un canal de tierra de sección trapezoidal, de 2,5 m de anchura en el fondo y los lados de pendiente 2 y 1 (2 horizontal a 1 vertical) para transportar 8 $m^3$/seg. Para evitar el deterioro del material la velocidad óptima es de 0,85 m/seg. ¿Cuál será la pendiente de solera requerida?



*5.73* ¿Qué diámetro se necesita para un canal semicircular de metal con arrugas que lleva 1.500 l/seg cuando su pendiente es 0,01?

*5.74* Un canal semicircular de metal con arrugas de 3 m de diámetro tiene una pendiente de solera de 0,004. ¿Cuál es su capacidad cuando va lleno?

*5.75* ¿Qué profundidad se necesita para que fluya un caudal de 50 $m^3$/seg en un canal trapezoidal de grava con lados de pendiente 1:3 (1 vertical, 3 horizontal), si el ancho de la solera es de 10 m y su pendiente de 0,0008?

*5.76* ¿Cuál es la velocidad para un caudal de 7 $m^3$/seg en un canal rectangular de 3,5 m de anchura? $S = 0{,}0049$; $n = 0{,}013\ m^{1/6}$.

*5.77* Un canal trapezoidal de ladrillo se va a construir para conducir 50 $m^3$/seg a una distancia de 5 km con una pérdida de altura de 4 m. El ancho de solera es de 4 m y la pendiente de los lados de 1:1. ¿Cuál es la velocidad?

*5.78* ¿Cómo varía el caudal con la profundidad en el canal de sección triangular representado en la Fig. 5.46?

*5.79* ¿Cómo varía la velocidad con la profundidad en la Fig. 5.46?

*5.80* Determinar la profundidad de la corriente en la Fig. 5.46 para un caudal de 340 l/seg. Está fabricado de acero roblonado, con una pendiente de solera de 0,02.

*5.81* Determinar la profundidad $y$ (Fig. 5.47) para la velocidad máxima, supuestos dados $n$ y $S$.

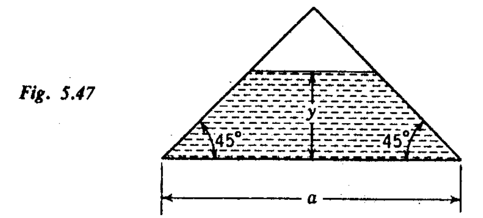


*Fig. 5.47*

*5.82* Determinar la profundidad $y$ (Fig. 5.47) para que el caudal sea máximo, dados $n$ y $S$.

*5.83* En una experiencia hecha con una tubería de 15 cm de diámetro se ha medido una diferencia manométrica de 350 mm en un manómetro de agua-mercurio conectado a dos anillos piezométricos separados 50 m. El caudal era de 3.000 l/min. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento?

*5.84* Mediante la ecuación de Blasius para la determinación del coeficiente de fricción, determinar la potencia por kilómetro en caballos de vapor requerida para bombear 100 l/seg de un líquido, $\nu = 3{,}1 \times 10^{-5}$ $m^2$/seg, $\gamma = 880$ kg/$m^3$, a través de una tubería de 40 cm de diámetro.

X *5.85* Determinar la pérdida de carga en 1000 m necesaria para mantener una velocidad de 5 m/seg en una tubería de 12 mm de diámetro. $\nu = 4 \times 10^{-6}$ $m^2$/seg.

✓ *5.86* Un fluido circula a través de un tubo de 12 mm, siendo el número de Reynolds 1800. La pérdida de carga en 100 m de tubería es de 30 m. Calcular el caudal en litros por minuto.

X *5.87* ¿Qué tamaño de tubería de hierro galvanizado se necesita para que sea «hidráulicamente lisa» para $\mathbf{R} = 3{,}5 \times 10^5$? (Se dice que es hidráulicamente lisa

cuando tiene la misma pérdida que la más lisa tubería bajo las mismas condiciones.)

*5.88* ¿Por encima de qué número de Reynolds es el flujo a través de una tubería de diámetro 3 m de acero roblonado, $\epsilon = 0{,}300$, independiente de la viscosidad del fluido?

*5.89* Determinar la rugosidad absoluta de una tubería de 1 m de diámetro que tiene un coeficiente de rozamiento $f = 0{,}04$ para $\mathbf{R} = 1.000.000$.

*5.90* ¿Cuál será el diámetro de una tubería de hierro galvanizado nueva para que tenga el mismo coeficiente de resistencia, para $\mathbf{R} = 100.000$, que una tubería de fundición de 30 cm de diámetro?

*5.91* ¿Bajo qué condiciones variarían las pérdidas en una tubería con una potencia de la velocidad mayor que la segunda?

*5.92* ¿Por qué el coeficiente de rozamiento aumenta cuando la velocidad disminuye en el flujo laminar de un fluido en una tubería?

*5.93* Calcular el coeficiente de rozamiento para el aire atmosférico a 15° C que fluye por una tubería galvanizada de 1,2 m de diámetro a velocidad de 25 m/seg.

*5.94* Es necesario bombear 3000 l/min de agua a 21° C a través de una tubería de hierro forjado de 200 mm de diámetro y 350 m de longitud. Determinar la pérdida de carga y la potencia requerida.

*5.95* Determinar la pérdida de altura y la potencia necesaria para bombear un caudal de 2.000 l/min de agua a 15° C a través de una tubería de fundición de 150 mm de diámetro y longitud igual a 250 m.

*5.96* ¿Qué potencia debe tener el motor de un ventilador que hace circular aire normal a una velocidad de 500 km/h a través de un túnel aerodinámico? El túnel forma un circuito cerrado de 60 m de longitud, pudiendo suponerse que la sección recta circular es constante de 1,80 m de diámetro.

*5.97* ¿Se debe prever refrigerar el aire en alguna sección del túnel descrito en el Prob. 5.96? ¿Hasta qué punto?

*5.98* A través de una tubería de fundición de 30 cm de diámetro se bombean 60 l/seg de un aceite, $\mu = 0{,}16$ poises y $\gamma = 870$ kg/m$^3$. Si cada una de las bombas empleadas produce 5 kg/cm$^2$ de presión, ¿a qué distancia deben colocarse una de otra?

*5.99* Una tubería de acero estirado de 75 mm de diámetro y 120 m de longitud conduce 1.200 l/min de agua a 15° C desde una tubería principal donde la presión es de 6 kg/cm$^2$ y la parte alta de un edificio 20 m por encima de la tubería principal. ¿Qué presión puede mantenerse en la parte alta del edificio?

*5.100* Calcular el caudal de agua a 65° C que desagua la tubería de la Figura 5.48.

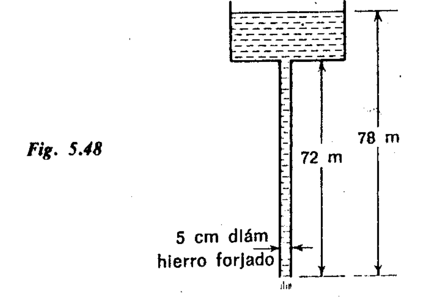



*Fig. 5.48*



*5.101* En la Fig. 5.48, ¿qué potencia se necesita para bombear 600 l/min desde un depósito en el extremo inferior de la tubería al depósito de la figura?

*5.102* Para vaciar aceite de un depósito se utiliza una tubería de acero comercial de 12 mm de diámetro y 12 m de longitud. Determinar el caudal cuando la superficie libre del aceite en el depósito está 2 m por encima de la sección de salida de la tubería. $\mu = 0{,}10$ poises, $\gamma = 800$ kg/m$^3$.

*5.103* Dos recipientes de aceite están conectados por una tubería lisa de 100 m de longitud y 20 mm de diámetro. ¿Cuál es el caudal en l/min para una diferencia de elevación de 5 m? $\nu = 0{,}0001$ m$^2$/seg.

*5.104* Para una pérdida de carga de 8 cm de agua en una longitud de 200 m, para un flujo de aire atmosférico a 15° C a través de un conducto ($\epsilon = 0{,}001$ m) de 120 cm de diámetro, calcular el caudal en metros cúbicos por minuto.

*5.105* Un gas de peso molecular 37 fluye a través de un conducto de hierro galvanizado de 60 cm de diámetro a una presión absoluta de 6 kg/cm$^2$ y 40° C. La pérdida de carga cada 100 m de conducto es de 16 cm de agua. ¿Cuál es el caudal en masa medido en unidades técnicas de masa por hora?

*5.106* ¿Qué potencia en caballos de vapor por kilómetro necesitará un soplador, de 70 por 100 de rendimiento, para mantener el caudal del Problema 5.105?

*5.107* Se necesitan 50 kg$_m$/min de aire para ventilar una mina. Se transporta en una tubería galvanizada de 600 m de larga y 30 cm de diámetro. Despreciando las pérdidas menores, ¿qué altura en metros de columna de agua debe producir una soplante para dar este flujo? $p = 1$ kg/cm (abs); $t = 30°$ C.

*5.108* En la Fig. 5.44, $H = 18$ m, $L = 150$ m, $D = 5$ cm, $\gamma = 880$ kg/m$^3$, $\mu = 0{,}04$ poises, $\epsilon = 0{,}001$ m. Determinar el caudal en peso (kilogramos por segundo).

*5.109* En un proceso determinado se conducen 5.000 kg/h de agua destilada a 20° C a través de un tubo suave entre dos depósitos que están separados 9 m y cuya diferencia de alturas es 1,20 m. ¿Qué tamaño de tubería se necesita?

*5.110* ¿Qué tamaño de tubería nueva de hierro fundido se necesita para transportar 300 l/seg de agua, a 25° C, 1 km con una pérdida de altura de 1,20 m?

*5.111* Dos tipos de chapa de acero, cuyas rugosidades superficiales son $\epsilon_1 = 0{,}009$ cm y $\epsilon_2 = 0{,}03$ cm, tienen una diferencia de coste del 10 por 100 más la más lisa. Con una tensión admisible en cada una de 700 kg/cm$^2$, ¿qué placa se debe elegir para transportar 3 m$^3$/seg de agua a 14 kg/cm$^2$ con una pérdida de altura de 1,2 m/km?

*5.112* Una tubería vieja de 180 cm de diámetro tiene una rugosidad $\epsilon_1 = 0{,}3$ cm. Una cornisa de 12 mm de espesor reduce la rugosidad a $\epsilon = 0{,}012$ cm. ¿Cuánto se ahorra por año al bombear agua a 20° C a una velocidad de 2,4 m/seg por 1000 m de tubería? Las bombas y los motores tienen un rendimiento de 0,8 y el coste de la energía es 1 pta el kW/h.

*5.113* Calcular el diámetro necesario para una tubería de madera en excelentes condiciones para transportar 9 m$^3$/seg de agua a 15° C con una pérdida de altura de 1 m en 1.000 m de tubería.



*5.114* Dos depósitos que contienen aceite están situados en puntos cuya diferencia de cota es 5 m y conectados mediante una tubería de acero comercial de 300 m de longitud. ¿Qué diámetro debe tener la tubería para que circule un caudal de 3.700 l/min? $\mu = 0{,}005$ UTM/m seg; $\gamma = 880$ kg/m$^3$.

*5.115* Se suministran a una mina 6 m$^3$/seg de aire a $p = 1{,}2$ kg/cm$^2$ (abs) y $t = 20°$ C con una pérdida de altura de 25 cm de agua por 1.000 m de tubería. ¿Qué diámetro de tubería galvanizada se necesita?

*5.116* Calcular las pérdidas en kilográmetros por kilogramo que tienen lugar en

un flujo de 25 $m^3$/min de aire, a una presión absoluta $p = 1$ kg/cm$^2$ y $t = 20°$ C, a través de un ensanchamiento brusco de la tubería que pasa de 30 cm a 90 cm de diámetro. ¿Qué pérdida de carga se evitaría al utilizar un difusor cónico de 10°?

*5.117* Calcular el valor de $H$ en la Fig. 5.49 para 180 l/seg de agua a 15° C por tubería de acero comercial. Incluir las pérdidas menores.

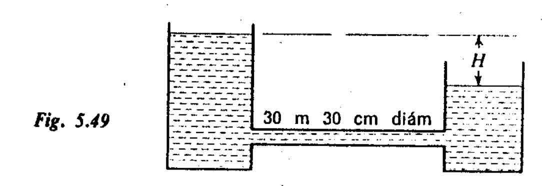



*Fig. 5.49*

*5.118* ¿Cuál sería el caudal de desagüe en el Prob. 5.28 si en la línea se insertara una válvula esférica? Suponer una tubería lisa y una entrada redondeada.

*5.119* En la Fig. 5.49 y para $H = 3$ m, calcular el caudal de aceite, $\gamma = 880$ kg/m$^3$ y $\mu = 0{,}07$ poises, que circula a través de la tubería lisa. Incluir las pérdidas menores.

*5.120* Si en la línea del Prob. 5.119 se pone una válvula y se ajusta para reducir el caudal a la mitad, ¿cuál es el valor de $K$ para la válvula y cuál la longitud equivalente de tubería para esta posición?

*5.121* Una línea que transporta agua a 20° C une dos depósitos y está constituida por 1.500 m de tubería de acero de 60 cm de diámetro, tres codos normales, una válvula esférica, y la entrada constituida por una boquilla de Borda. ¿Cuál es la diferencia de elevación entre los dos depósitos si el caudal es de 550 l/seg?

*5.122* Determinar el caudal de desagüe en el Prob. 5.121 si la diferencia de cota es de 15 m.

*5.123* Calcular la pérdida de energía en caballos de vapor para un flujo de 3 $m^3$/min a través de una contracción brusca en una tubería que pasa de 150 a 100 mm de diámetro.

*5.124* ¿Cuál es la longitud equivalente de tubería de 5 cm de diámetro, $f = 0{,}022$, para (*a*) una boquilla de Borda, (*b*) un ensanchamiento brusco de 5 a 10 cm de diámetro y (*c*) una válvula esférica y un empalme en $T$ normal?

*5.125* Determinar $H$ en la Fig. 5.50 para un flujo de aceite de 750 l/min, $\mu = 0{,}1$ poises, $\gamma = 960$ kg/m$^3$, para la válvula de ángulo totalmente abierta.

*5.126* Determinar el valor de $K$ para la válvula de ángulo del Prob. 5.125 cuando el caudal es de 300 l/min y la misma $H$.

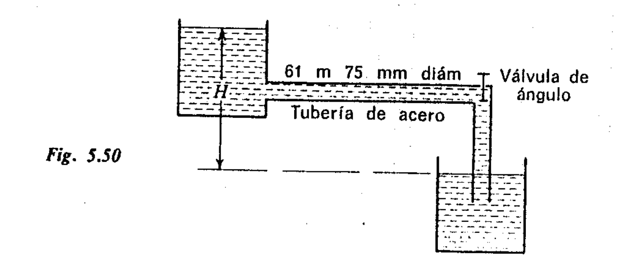



*Fig. 5.50*



*5.127* ¿Cuál es el caudal que pasa por el sistema de la Fig. 5.50 para agua a 25 C cuando $H = 6$ m?

*5.128* Comparar la Ec. (5.10.4) con la curva del diagrama de Moody para una tubería lisa para $\mathbf{R} = 10^5$, $10^6$, $10^7$.

*5.129* Utilizando la Ec. (5.10.7) comprobar la situación de la línea $\epsilon/D = 0{,}006$ en el diagrama de Moody.

*5.130* En la Ec. (5.10.7) demostrar que cuando $\epsilon = 0$ se reduce a la Ec. (5.10.4) y que cuando $\mathbf{R}$ es muy grande se reduce a la Ecuación (5.10.6).

*5.131* En la Fig. 5.51 la deslizadera tiene una anchura de 30 cm. Calcular (*a*) la carga que soporta la deslizadera, (*b*) la resistencia opuesta al movimiento de la deslizadera. Supóngase que no existe flujo normal al plano del dibujo.

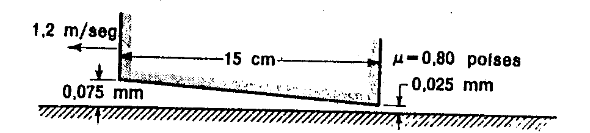



*Fig. 5.51*

*5.132* Determinar la presión máxima en el fluido del Prob. 5.131 y su situación.

*5.133* Determinar el centro de presión para la deslizadera del Problema 5.131.

*5.134* Demostrar que un eje concéntrico con su cojinete no puede soportar carga.

*5.135* La tensión de cortadura en un fluido en movimiento entre dos placas planas paralelas

(*a*) es constante en toda la sección recta;
(*b*) es nula en las placas y aumenta linealmente hasta el punto medio;
(*c*) varía parabólicamente a lo largo de la sección;
(*d*) es nula en el plano medio y varía linealmente con la distancia desde el plano medio;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.136* La distribución de velocidades para el flujo entre dos placas paralelas fijas

(*a*) es constante en toda la sección recta;
(*b*) es nula en las placas y aumenta linealmente hasta el plano medio;
(*c*) varía parabólicamente a lo largo de la sección;
(*d*) varía con la potencia $\frac{3}{2}$ de la distancia desde el punto medio;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.137* El caudal entre dos placas paralelas, separadas una distancia $a$, cuando una tiene la velocidad $U$ y la tensión de cortadura es cero en la placa fija, es

(*a*) $Ua/3$ (*b*) $Ua/2$ (*c*) $2Ua/3$ (*d*) $Ua$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.138* Un fluido se mueve con un movimiento laminar entre dos placas paralelas, de las que una es móvil, y está sometido a un gradiente de presiones de tal for-

ma que el caudal a través de una sección recta fija es nulo. La velocidad mínima se presenta en un punto que dista de la placa fija

(*a*) $a/6$ (*b*) $a/3$ (*c*) $a/2$ (*d*) $2a/3$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.139*** En el Prob. 5.138 el valor de la velocidad mínima es

(*a*) $-3U/4$ (*b*) $-2U/3$ (*c*) $-U/2$ (*d*) $-U/3$
(*e*) $-U/6$

***5.140*** La relación entre la presión y la tensión de cortadura en un flujo laminar unidimensional en la dirección de $x$ está dada por

(*a*) $dp/dx = \mu\, d\tau/dy$ (*b*) $dp/dy = d\tau/dx$ (*c*) $dp/dy = \mu\, d\tau/dx$
(*d*) $dp/dx = d\tau/dy$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.141*** La expresión de la potencia consumida por unidad de volumen por un fluido en movimiento laminar unidimensional en la dirección de $x$ es

(*a*) $\tau\, du/dy$ (*b*) $\tau/\mu^2$ (*c*) $\mu\, du/dy$ (*d*) $\tau(du/dy)^2$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.142*** Cuando un líquido tiene movimiento laminar a profundidad constante y desciende por una placa inclinada ($y$ medida normal a la superficie)

(*a*) la cortadura es cero en el líquido;
(*b*) $d\tau/dy = 0$ en la placa;
(*c*) $\tau = 0$ en la superficie del líquido;
(*d*) la velocidad es constante en el líquido;
(*e*) no hay pérdidas.

***5.143*** La tensión de cortadura en un líquido que fluye por una tubería circular

(*a*) es constante en toda la sección recta;
(*b*) es nula en la pared y se incrementa linealmente hasta el centro;
(*c*) varía parabólicamente a lo largo de la sección;
(*d*) es nula en el centro y varía linealmente con el radio;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.144*** Cuando la caída de presión es de 2,4 kg/cm$^2$ en 100 m en una tubería de 500 mm de diámetro la tensión de cortadura en kg/m es

(*a*) 0 (*b*) 30 (*c*) 15 (*d*) 300 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.145*** En flujo laminar en una tubería circular el caudal varía

(*a*) linealmente con la viscosidad;
(*b*) con el cuadrado del radio;
(*c*) inversamente a la caída de presión;
(*d*) inversamente a la viscosidad;
(*e*) con el cubo del diámetro.

***5.146*** Cuando un tubo está inclinado, el término $-dp/dl$ se remplaza por

(*a*) $-dz/dl$ (*b*) $-\gamma\, dz/dl$ (*c*) $-d(p + z)/dl$
(*d*) $-d(p + \rho z)/dl$ (*e*) $-d(p + \gamma z)/dl$



***5.147*** El número crítico superior de Reynolds es

(*a*) importante desde el punto de vista de los proyectos;
(*b*) el número para el cual el flujo cambia de turbulento a laminar;
(*c*) aproximadamente 2.000;
(*d*) no mayor de 2.000;
(*e*) no es de importancia práctica en los problemas de tuberías.

***5.148*** El número de Reynolds para el flujo en una tubería está dado por

(*a*) $VD/\nu$ (*b*) $VD\mu/\rho$ (*c*) $VD\rho/\nu$ (*d*) $VD/\mu$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.149*** El número de Reynolds crítico inferior vale

(*a*) 200 (*b*) 1.200 (*c*) 12.000 (*d*) 40.000 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.150*** El número de Reynolds para una esfera de 10 mm moviéndose a una velocidad de 10 m/seg en un aceite de $S = 0{,}80$ y $\mu = 0{,}01$ kg seg/m$^2$ es

(*a*) 8.000 (*b*) 8.160 (*c*) 816 (*d*) 800 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.151*** El número de Reynolds cuando un caudal de 250 l/seg de agua a 10° C fluye por una tubería de 100 mm de diámetro vale

(*a*) $7{,}64 \times 10^6$ (*b*) $7{,}64 \times 10^5$ (*c*) $2{,}43 \times 10^6$
(*d*) $2{,}37 \times 10^4$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.152*** La longitud de mezcla de Prandtl es

(*a*) independiente de la distancia radial desde el eje de la tubería;
(*b*) independiente de la tensión de cortadura;
(*c*) nula en la pared del tubo;
(*d*) una constante universal;
(*e*) útil para cálculos en los problemas de flujo laminar.

***5.153*** En una corriente de un fluido de baja viscosidad,

(*a*) el efecto de la viscosidad no aumenta apreciablemente la resistencia sobre el cuerpo;
(*b*) la teoría del potencial nos proporciona la fuerza de resistencia sobre el cuerpo;
(*c*) el efecto de la viscosidad se limita a una estrecha región cercana al cuerpo;
(*d*) la resistencia de deformación sobre el cuerpo es la que siempre predomina;
(*e*) la teoría del potencial no contribuye en nada a la forma del flujo alrededor de un cuerpo.

***5.154*** La sustentación sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida es

(*a*) debida a la fuerza de flotación;
(*b*) siempre en dirección opuesta a la gravedad;
(*c*) la resultante de las fuerzas ejercidas por el fluido sobre el cuerpo;
(*d*) la componente de la fuerza ejercida por el fluido sobre el cuerpo

normalmente a la velocidad de aproximación;

(*e*) la componente de la fuerza ejercida por el fluido sobre el cuerpo paralelamente a la velocidad de aproximación.

***5.155*** El espesor desplazado de la capa límite es

(*a*) el espesor de la zona que está afectado por la tensión de cortadura en la pared;
(*b*) un medio del espesor real de la capa límite;
(*c*) la distancia al punto donde $u/U = 0{,}99$;
(*d*) el espesor de la zona donde el flujo principal está alterado;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.156*** La tensión de cortadura en la superficie de una placa plana es

(*a*) $\partial p/\partial x$ (*b*) $\mu\, \partial u/\partial y|_{y=0}$ (*c*) $\rho\, \partial u/\partial y|_{y=0}$
(*d*) $\mu\, \partial u/\partial y|_{y=\delta}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.157*** ¿Cuál de las siguientes distribuciones de velocidades $u/U$ satisface las condiciones de contorno para el flujo a lo largo de una placa plana? $\eta = y/\delta$.

(*a*) $e^{\eta}$ (*b*) $\cos \pi\eta/2$ (*c*) $\eta - \eta^2$ (*d*) $2\eta - \eta^3$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.158*** El coeficiente de resistencia o arrastre para una placa plana es ($D$ = resistencia)

(*a*) $2D/\rho U^2 l$ (*b*) $\rho Ul/D$ (*c*) $\rho Ul/2D$ (*d*) $\rho U^2 l/2D$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.159*** La velocidad media dividida por la velocidad máxima, cuando está dada por la ley de la potencia $\frac{1}{7}$, es

(*a*) $\frac{49}{120}$ (*b*) $\frac{1}{2}$ (*c*) $\frac{6}{7}$ (*d*) $\frac{98}{120}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.160*** El espesor de la capa límite laminar varía con

(*a*) $1/x^{1/2}$ (*b*) $x^{1/7}$ (*c*) $x^{1/2}$ (*d*) $x^{6/7}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.161*** El espesor de la capa límite turbulenta varía con

(*a*) $1/x^{1/5}$ (*b*) $x^{1/5}$ (*c*) $x^{1/2}$ (*d*) $x^{4/5}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.162*** En el flujo a lo largo de una placa rugosa, el orden del tipo de flujo de aguas arriba a aguas abajo es

(*a*) laminar, influido por la rugosidad de la pared, región de transición, hidráulicamente liso;
(*b*) laminar, región de transición, hidráulicamente liso, influido por la rugosidad de la pared;
(*c*) laminar, hidráulicamente liso, región de transición, influido por la rugosidad de la pared;
(*d*) laminar, hidráulicamente liso, influido por la rugosidad de la pared, región de transición;



(*e*) laminar, influido por la rugosidad de la pared, hidráulicamente liso, región de transición.

***5.163*** La separación se origina por

(*a*) la reducción de la presión a la presión del vapor;
(*b*) la reducción del gradiente de presiones hasta anularse;
(*c*) un gradiente de presiones adverso;
(*d*) la reducción a cero del espesor de la capa límite;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.164*** La separación se presenta cuando

(*a*) se reduce la sección recta de un canal;
(*b*) la capa límite tiende al reposo;
(*c*) se alcanza la velocidad del sonido;
(*d*) la presión alcanza un mínimo;
(*e*) se cierra una válvula.

***5.165*** La estela

(*a*) es una región de altas presiones;
(*b*) es la causa principal del rozamiento pelicular;
(*c*) se presenta siempre que la resistencia de deformación predomina;
(*d*) se presenta siempre después de un punto de separación;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.166*** La resistencia de presión resulta de

(*a*) el rozamiento pelicular;
(*b*) la resistencia de deformación;
(*c*) la desaparición del flujo potencial cerca del punto de estancamiento;
(*d*) la presencia de una estela;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.167*** Un cuerpo largo con una parte anterior redondeada y cónica hacia atrás es, en general, adecuado para

(*a*) flujo laminar;
(*b*) flujo subsónico turbulento;
(*c*) flujo supersónico;
(*d*) flujo a la velocidad del sonido;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.168*** Un cambio rápido en la posición del punto de separación en el flujo alrededor de una esfera se presenta para un número de Reynolds de aproximadamente

(*a*) 1 (*b*) 300 (*c*) 30.000 (*d*) 3.000.000 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***5.169*** El efecto de la compresibilidad sobre la fuerza de resistencia es tal que

(*a*) le hace aumentar grandemente en las proximidades de la velocidad del sonido;
(*b*) le hace disminuir cerca de la velocidad del sonido;
(*c*) le hace tender asintóticamente a un valor constante para grandes números de Mach;

(*d*) le hace aumentar más rápidamente que el cuadrado de la velocidad para grandes números de Mach;
(*e*) la reduce para cualquier tipo de flujo.

*5.170* La velocidad final de una pequeña esfera que sedimenta en un fluido viscoso varía

(*a*) con la primera potencia de su diámetro;
(*b*) en razón inversa de la viscosidad del fluido;
(*c*) en razón inversa del cuadrado del diámetro;
(*d*) en razón inversa del diámetro;
(*e*) con el cuadrado de la diferencia de pesos específicos del sólido y del fluido.

*5.171* La pérdida de energía en el flujo en un canal abierto varía

(*a*) con la primera potencia de la rugosidad;
(*b*) en razón inversa de la rugosidad;
(*c*) con el cuadrado de la velocidad;
(*d*) en razón inversa del cuadrado del radio hidráulico;
(*e*) con la velocidad.

*5.172* En canales abiertos la clase de flujo de más simple cálculo es

(*a*) permanente y uniforme;
(*b*) no uniforme y permanente;
(*c*) no permanente y uniforme;
(*d*) no uniforme y no permanente;
(*e*) gradualmente variado.

*5.173* En un canal abierto de gran anchura, el radio hidráulico es

(*a*) $y/3$ (*b*) $y/2$ (*c*) $2y/3$ (*d*) $y$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.174* El coeficiente de rugosidad de Manning para hormigón acabado es

(*a*) 0,002 (*b*) 0,010 (*c*) 0,10 (*d*) depende del radio hidráulico; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.175* En flujo turbulento, una tubería rugosa tiene el mismo coeficiente de rozamiento que una tubería lisa

(*a*) en la zona de turbulencia completa, tuberías rugosas;
(*b*) cuando el coeficiente de rozamiento es independiente del número de Reynolds;
(*c*) cuando la altura de las rugosidades es mucho menor que el espesor de la capa límite;
(*d*) en toda la zona de transición;
(*e*) cuando el coeficiente de rozamiento es constante.

*5.176* El coeficiente de rozamiento en flujo turbulento en tuberías lisas depende de las siguientes magnitudes:

(*a*) $V, D, p, L, \mu$ (*b*) $Q, L, \mu, \rho$ (*c*) $V, D, \rho, p, \mu$
(*d*) $V, D, \mu, \rho$ (*e*) $p, L, D, Q, V$



*5.177* En una tubería *dada* rugosa la pérdida de energía depende de

(*a*) $f, V$ (*b*) $\mu, \rho$ (*c*) **R** (*d*) solamente $Q$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.178* En la zona de turbulencia completa y tuberías rugosas

(*a*) las tuberías lisas y rugosas tienen el mismo coeficiente de rozamiento;
(*b*) la película laminar cubre las rugosidades;
(*c*) el coeficiente de rozamiento depende únicamente del número de Reynolds;
(*d*) la pérdida de carga varía con el cuadrado de la velocidad;
(*e*) el coeficiente de rozamiento es independiente de la rugosidad relativa.

*5.179* El coeficiente de rozamiento para flujo de agua a 15° C por una tubería de 600 mm de diámetro de fundición, con una velocidad de 10 m/seg es

(*a*) 0 (*b*) 0,010 (*c*) 0,028 (*d*) 0,016 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*5.180* El procedimiento a seguir para el cálculo de las pérdidas de energía cuando se conocen $Q$, $L$, $D$, $\nu$, $\epsilon$, es

(*a*) suponer un $f$, buscar **R** en el diagrama de Moody, etc.;
(*b*) suponer un $h_f$, despejar $f$, comprobarlo con **R** en el diagrama de Moody;
(*c*) suponer un $f$, despejar $h_f$, calcular **R**, etc.;
(*d*) calcular **R**, buscar $f$ para $\epsilon/D$, calcular después $h_f$;
(*e*) suponer un **R**, calcular $V$, buscar $f$, despejar $h_f$.

*5.181* El procedimiento a seguir para hallar el caudal cuando se conocen $h_f$, $L$, $D$, $\nu$, $\epsilon$, es

(*a*) suponer un $f$, calcular $V$, **R**, $\epsilon/D$, buscar $f$, repitiendo si es necesario;
(*b*) suponer un **R**, calcular $f$, comprobar $\epsilon/D$, etc.;
(*c*) suponer un $V$, calcular **R**, buscar $f$, calcular $V$ de nuevo, etc.;
(*d*) despejar $V$ de la fórmula de Darcy-Weisbach, calcular $Q$;
(*e*) suponer un $Q$, calcular $V$, **R**, buscar $f$, etc.

*5.182* El procedimiento a seguir para obtener el diámetro de la tubería cuando se conocen $h_f$, $Q$, $L$, $\nu$, $\epsilon$, es

(*a*) suponer un $D$, calcular $V$, **R**, $\epsilon/D$, buscar $f$ y repetir;
(*b*) calcular $V$ por la ecuación de continuidad, suponer un $f$, despejar $D$;
(*c*) eliminar $V$ entre **R** y la fórmula de Darcy-Weisbach usando la ecuación de continuidad, suponer un $f$; despejar $D$, **R**, buscar $f$, y repetir;
(*d*) suponer un **R** y un $\epsilon/D$, buscar $f$, despejar $V^2/D$ en Darcy-Weisbach y despejar con continuidad $V$ y $D$, calcular un nuevo **R**, etc.;
(*e*) suponer un $V$, despejar $D$, **R**, $\epsilon/D$, buscar $f$ y repetir.

*5.183* La pérdida debida a una contracción brusca está dada por

(*a*) $\left(\frac{1}{C_c^2} - 1\right)\frac{V_2^2}{2g}$ (*b*) $(1 - C_c^2)\frac{V_2^2}{2g}$ (*c*) $\left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2\frac{V_2^2}{2g}$

(*d*) $(C_c - 1)^2\frac{V_2^2}{2g}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**5.184** La pérdida a la salida de una tubería sumergida en un depósito es

(*a*) despreciable (*b*) $0,05(V^2/2g)$ (*c*) $0,5(V^2/2g)$
(*d*) $V^2/2g$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**5.185** Las pérdidas menores pueden, en general, despreciarse cuando

(*a*) hay más de 100 m de tubería entre dos accesorios especiales;
(*b*) su valor es el 5 por 100 o menor que las pérdidas por rozamiento;
(*c*) hay 500 diámetros de tubería entre los lugares donde están localizadas dos pérdidas menores;
(*d*) no hay válvulas esféricas en la conducción;
(*e*) se usa una tubería rugosa.

**5.186** La longitud de tubería equivalente a una válvula esférica (en diámetros), siendo $f = 0,025$, es

(*a*) 40 (*b*) 200 (*c*) 300 (*d*) 400 (*e*) no se puede determinar por insuficiencia de datos.

**5.187** El radio hidráulico está dado por

(*a*) el perímetro mojado dividido por el área;
(*b*) el área dividida por el cuadrado del perímetro mojado;
(*c*) la raíz cuadrada del área;
(*d*) el área dividida por el perímetro mojado;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**5.188** El radio hidráulico de un canal rectangular de sección recta 6 m de profundidad por 12 m de ancho es en metros

(*a*) 3 (*b*) 2 (*c*) $\frac{1}{2}$ (*d*) $\frac{1}{3}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**5.189** En la teoría de la lubricación se hace la hipótesis de que

(*a*) la distribución de velocidades es la misma en todas las secciones rectas;
(*b*) la distribución de velocidades en cualquier sección es la misma que si las dos placas fuesen paralelas;
(*c*) la variación de presión a lo largo del cojinete es la misma que si las placas fuesen paralelas;
(*d*) la tensión de cortadura varía linealmente entre las dos superficies;
(*e*) la velocidad varía linealmente entre las dos superficies.

**5.190** Un eje de 100 mm de diámetro gira a 240 r.p.m. en un cojinete con una holgura radial de 0,15 mm. La tensión de cortadura en la película de aceite, $\mu = 0,1$ poises, es, en kg/cm²,

(*a*) 836 (*b*) 8,54 (*c*) 0,0836 (*d*) 0,854 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

# 6 Flujo compresible

En el Cap. 5 se consideraron principalmente los casos de movimiento de fluidos viscosos incompresibles. En este capítulo, dedicado al flujo compresible, entra una nueva variable, la densidad, y se puede utilizar una ecuación más, la ecuación de estado, que relaciona la presión y la densidad. Las demás ecuaciones —continuidad, cantidad de movimiento y el primer y el segundo principios de la termodinámica— son también necesarias en el análisis de los casos de movimiento de fluidos compresibles. En este capítulo se estudian los temas relativos al flujo *permanente* unidimensional de un gas perfecto. Se limita esta aproximación unidimensional a aquellas aplicaciones en las que se pueden considerar constantes la velocidad y la densidad en una sección recta cualquiera. Cuando las variaciones de densidad son graduales y ésta no cambia en más de un pequeño tanto por ciento, se puede considerar el flujo como incompresible utilizando una densidad media.

En este capítulo se estudian los temas siguientes: relaciones de los gases perfectos, velocidad de una onda sonora, número de Mach, flujo isoentrópico, ondas de choque, líneas de Fanno y Rayleigh, flujo adiabático, flujo con transmisión de calor, flujo isotérmico, vuelo a alta velocidad y la analogía entre las ondas de choque y las ondas en los canales abiertos.

## 6.1 Relaciones de los gases perfectos

En la Sec. 1.6 [Ec. (1.6.2)] se definió el gas perfecto como un fluido que tiene los calores específicos constantes y que siguen la ley

$$p = \rho RT \tag{6.1.1}$$

donde $p$ y $T$ son, respectivamente, la presión absoluta y la temperatura absoluta, $\rho$ es la densidad y $R$ la constante de los gases. En esta sección se definen los calores específicos, se introduce la relación entre calores específicos y se relacionan los calores específicos con la constante de los gases, se relacionan la energía interna y la entalpía con la temperatura,

se establecen las relaciones entrópicas y se presentan los procesos isoentrópicos y politrópicos reversibles.

En general, se define el calor específico $c_v$ a volumen constante mediante

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \qquad (6.1.2)$$

donde $u$ es la energía interna por unidad de masa. Es decir, $c_v$ es la cantidad de energía interna necesaria para aumentar en un grado la temperatura de una unidad de masa del gas cuando su volumen permanece constante. En la termodinámica se demuestra que $u$ es función solo de la temperatura, para un gas perfecto.

El calor específico $c_p$ a presión constante se define mediante

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \qquad (6.1.3)$$

donde $h$ es la entalpía por unidad de masa, dada por $h = u + p/\rho$. Como $p/\rho$ es igual a $RT$ y $u$ es solo función de la temperatura para un gas perfecto, $h$ solo depende de la temperatura. La mayor parte de los gases corrientes, tal como el vapor de agua, el hidrógeno, el oxígeno, el monóxido de carbono y el aire, experimentan un cambio en sus calores específicos extremadamente pequeño en el margen de temperaturas de 270 a 560° K, y se toma un valor intermedio para su empleo como gases perfectos. La Tabla C.2 del Apéndice C da algunos gases perfectos con sus calores específicos a 26,5° C.

Para los gases perfectos la Ec. (6.1.2) se convierte en

$$du = c_v\, dT \qquad (6.1.4)$$

y la Ec. (6.1.3) en

$$dh = c_p\, dT \qquad (6.1.5)$$

Entonces, a partir de

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + RT$$

diferenciando,

$$dh = du + R\, dT$$

y sustituyendo los valores de las Ecs. (6.1.4) y (6.1.5),

$$c_p = c_v + R \qquad (6.1.6)$$

válida para cualquier gas que satisfaga a la Ec. (6.1.1) (aun cuando $c_p$ y $c_v$ varían con la temperatura). Si $c_p$ y $c_v$ vienen dados en unidades de calor por unidad de masa (por ejemplo, kilocalorías por kilogramo masa por grado Kelvin), entonces $R$ se ha de dar también en unidades de calor (por ejemplo, calorías por kilogramo masa por grado Kelvin). El factor de conversión es 1 kcal = 427 kgm si se desea dar en el sistema metro-kilogramo peso-segundo.



Se define la *relación de calores específicos* $k$ como el cociente

$$k = \frac{c_p}{c_v} \qquad (6.1.7)$$

Entre ésta y la Ec. (6.1.6),

$$c_p = \frac{k}{k-1} R \qquad c_v = \frac{R}{k-1} \qquad (6.1.8)$$

*Ecuaciones de la entropía*

El primer principio de la termodinámica establece para un sistema que el calor que se aporta al sistema es igual al trabajo que efectúa el sistema más el aumento de su energía interna [Ec. (3.8.11)]. En función de la entropía $s$ la ecuación toma la forma

$$T\, ds = du + p\, d\frac{1}{\rho} \qquad (3.8.13)$$

que es una relación entre propiedades termodinámicas y se debe cumplir por todas las sustancias puras.

El cambio de energía interna de un gas perfecto es

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) \qquad (6.1.9)$$

y el de entalpía es

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \qquad (6.1.10)$$

El cambio de entropía

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} d\frac{1}{\rho} = c_v \frac{dT}{T} + R\rho\, d\frac{1}{\rho} \qquad (6.1.11)$$

se puede obtener de las Ecs. (6.1.4) y (6.1.1). Integrando,

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad (6.1.12)$$

Utilizando las Ecs. (6.1.8) y (6.1.1) la Ec. (6.1.12) se convierte en

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1}\right] \qquad (6.1.13)$$

o sea

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\right] \qquad (6.1.14)$$

y

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^k\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-k}\right] \qquad (6.1.15)$$

Estas ecuaciones son formas del segundo principio de la termodinámica.

Si el proceso es reversible, $ds = dq_H/dT$, o $T\,ds = dq_H$; además, si el proceso fuera adiabático, $dq_H = 0$. Por tanto, $ds = 0$ para un proceso reversible adiabático, o $s = \text{const}$; por tanto, el proceso *reversible y adiabático es isoentrópico*. Entonces, de la Ec. (6.1.14) para $s_2 = s_1$,

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k} \qquad (6.1.16)$$

Esta ecuación combinada con la ecuación general de los gases da

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1} \qquad (6.1.17)$$

El cambio de entalpía para un proceso isoentrópico es

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = c_pT_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = c_pT_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \qquad (6.1.18)$$

El proceso *politrópico* se define mediante

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const} \qquad (6.1.19)$$

y es una aproximación para algunos procesos reales en los que $p$ se representaría en esencia mediante una línea recta en función de $\rho$ en papel doblemente logarítmico. Esta relación se utiliza frecuentemente para calcular el trabajo cuando el proceso politrópico es reversible, sustituyendo en la relación $w = \int p\, dV$. Un intercambio de calor se produce en todo proceso reversible politrópico excepto cuando $n = k$, caso isoentrópico.

*Ejemplo 6.1* Expresar $R$ en kilocalorías por UTM por grado Kelvin para el helio.



En primer lugar se pasa 1 kgm/kg$_m$ °K a kilocalorías por UTM por grado Kelvin. Como 1 kcal = 427 kgm y 1 UTM = 9,81 kg$_m$,

$$\frac{1\ \text{kgm}}{\text{kg}_m\ °\text{K}} = 1\,\frac{\text{kcal}}{427}\,\frac{9,81}{\text{UTM}\ °\text{K}} = 0,0229\,\frac{\text{kcal}}{\text{UTM}\ °\text{K}}$$

Entonces, para el helio, la Tabla C.2 da

$$R = 212\,\frac{\text{kgm}}{\text{kg}_m\ °\text{K}} = 212 \times 0,0229\,\frac{\text{kcal}}{\text{UTM}\ °\text{K}} = 4,87\,\frac{\text{kcal}}{\text{UTM}\ °\text{K}}$$

*Ejemplo 6.2* Calcular el valor de $R$ para los valores de $k$ y $c_p$ para el aire y comprobar en la Tabla C.2.

De la Ec. (6.1.8)

$$R = \frac{k-1}{k}\,c_p = \frac{1,40 - 1,0}{1,40} \times 0,240 = 0,0686\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}_m\ °\text{K}}$$

Pasando las kcal a kgm

$$R = 0,0686 \times 427 = 29,3\,\frac{\text{kgm}}{\text{kg}_m\ °\text{K}}$$

que coincide con el valor de la Tabla C.2.

*Ejemplo 6.3* Calcular el cambio de entalpía de 4 kg$_m$ de oxígeno cuando las condiciones iniciales son $p_1 = 1,4$ kg/cm$^2$ (abs), $t_1 = 10°$ C y las condiciones finales son $p_2 = 5,6$ kg/cm$^2$ (abs), $t_2 = 90°$ C.

La entalpía es función solo de la temperatura. Utilizando la Ec. (6.1.10), la variación de entalpía por kilogramo masa es

$$c_p(T_2 - T_1) = 0,219(90 - 10) = 17,52\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}_m}$$

y la variación de entalpía para 4 kg$_m$ es

$$H_2 - H_1 = 4 \times 17,52 = 70,08\ \text{kcal}$$

*Ejemplo 6.4* Determinar el cambio de entropía en 6,5 UTM de vapor de agua cuando las condiciones iniciales son $p_1 = 0,52$ kg/cm$^2$ (abs), $t_1 = 40°$ C y las condiciones finales son $p_2 = 2,8$ kg/cm$^2$ (abs) y $t_2 = 4°$ C.

De la Ec. (6.1.15) y la Tabla C.2

$$s_2 - s_1 = 0,335 \ln\left[\left(\frac{273 + 4}{273 + 40}\right)^{1,33}\left(\frac{2,8}{0,5}\right)^{-0,33}\right] = -0,735\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}_m\ °\text{K}}$$

o sea

$$S_2 - S_1 = -0,735 \times 6,5 \times 9,8 = -47,8\,\frac{\text{kcal}}{°\text{K}}$$

*Ejemplo 6.5* Un cilindro que contiene 2 $kg_m$ de nitrógeno a 1,5 kg/cm² (abs) y 5° C se comprime isoentrópicamente a 3,2 kg/cm² (abs). Hallar la temperatura final y el trabajo necesario.

Por el principio de conservación de la energía, el trabajo efectuado sobre el gas debe igualar su aumento de energía interna, ya que no hay intercambio de calor en un proceso isoentrópico, es decir,

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = \text{trabajo}$$

Según la Ec. (6.1.17)

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} = (273 + 5)\left(\frac{3,2}{1,5}\right)^{(1,4-1)/1,4} = 348° \text{ K}$$

y

$$\text{Trabajo realizado} = 0,177(348 - 278) \times 2 = 24,8 \text{ kcal}$$

*Ejemplo 6.6* 4,4 UTM de aire intervienen en un proceso politrópico reversible en el que las condiciones iniciales son $p_1 = 0,8$ kg/cm² (abs), $t_1 = 15°$ C pasan a $p_2 = 1,4$ kg/cm² (abs) y el volumen $V = 28,6$ m³. Determinar (*a*) la fórmula del proceso, (*b*) el trabajo realizado sobre el aire, (*c*) la cantidad de calor transferida y (*d*) la variación de entropía.

$$(a)\quad \rho_1 = \frac{p_2}{RT_1} = \frac{0,8 \times 10^4}{290 \times (273 + 15)} = 0,0993 \text{ UTM/m}^3$$

*R* se ha puesto en kilográmetros por unidad técnica de masa por grado Kelvin. Además,

$$\rho_2 = \frac{4,4}{28,6} = 0,154 \text{ UTM/m}^3$$

De la Ec. (6.1.19)

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n}$$

$$n = \frac{\ln (p_2/p_1)}{\ln (\rho_2/\rho_1)} = \frac{\ln (1,4/0,8)}{\ln (0,154/0,0993)} = 1,26$$

por consiguiente,

$$\frac{p}{\rho^{1,45}} = \text{const}$$

representa el proceso politrópico.

(*b*) El trabajo de expansión es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV$$



Este es el trabajo realizado por el gas sobre el medio que le rodea. Como

$$p_1V_1^n = p_2V_2^n = pV^n$$

sustituyendo en la integral,

$$W = p_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{1-n} = \frac{mR}{1-n}(T_2 - T_1)$$

si *m* es la masa del gas. $V_2 = 28,6$ m³ y

$$V_1 = V_2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/n} = 28,6\left(\frac{1,4}{0,8}\right)^{1/1,26} = 44 \text{ m}^3$$

Entonces

$$W = \frac{1,4 \times 28,6 - 0,8 \times 44}{1 - 1,26} \times 10^4 = -1,845 \times 10^5 \text{ kgm}$$

Por consiguiente, el trabajo realizado sobre el gas es 1,845 × 10⁵ kgm.

(*c*) Del primer principio de la termodinámica el calor aportado menos el trabajo realizado por el gas debe ser igual al aumento de energía interna; es decir,

$$Q_H - W = U_2 - U_1 = c_v m(T_2 - T_1)$$

En primer lugar,

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R} = \frac{1,4 \times 10^4}{0,154 \times 290} = 314° \text{ K}$$

Luego

$$Q_H = -\frac{1,845 \times 10^5}{427} + 0,171 \times 9,8 \times 4,4(314 - 288) = -240 \text{ kcal}$$

Se intercambiaron 240 kcal con la masa de aire.

(*d*) De la Ec. (6.1.14) el cambio de entropía es

$$s_2 - s_1 = 0,171 \ln\left[\frac{1,4}{0,8}\left(\frac{0,0993}{0,154}\right)^{1,4}\right] = -0,0181 \text{ kcal/kg}_m \text{ °K}$$

y

$$S_2 - S_1 = -0,0181 \times 4,4 \times 9,8 = -0,778 \text{ kcal/°K}$$

Utilizando la Ec. (3.8.12) se puede hacer una comprobación aproximada del calor intercambiado, tomando una temperatura media $T = (288 + 314)/2 = 301°$ K, y recordando que en un proceso reversible las pérdidas son cero,

$$Q_H = T(S_2 - S_1) = 301(-0,778) = -234 \text{ kcal}$$

## 6.2 Velocidad de una onda sonora. Número de Mach

La velocidad de una pequeña perturbación en un canal puede determinarse aplicando las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de continuidad. La cuestión consiste primeramente en determinar si puede ocurrir en un canal una pequeña variación permanente de la velocidad, presión y densidad. Refiriéndonos a la Fig. 6.1, la ecuación de continuidad puede escribirse

$$\rho VA = (\rho + d\rho)(V + dV)A$$

siendo $A$ el área de la sección del canal. La ecuación puede reducirse a

$$\rho\, dV + V\, d\rho = 0$$

Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento [Ec. (3.11.9)]

$$pA - (p + dp)A = \rho VA(V + dV - V)$$

o sea

$$dp = -\rho V\, dV$$

y eliminando $\rho\, dV$ entre las dos ecuaciones

$$V^2 = \frac{dp}{d\rho} \qquad (6.2.1)$$

Por consiguiente, una pequeña perturbación o cambio brusco en las condiciones del flujo permanente puede ocurrir únicamente cuando en el canal existe la particular velocidad $V = \sqrt{dp/d\rho}$. Ahora, si se supone una velocidad uniforme $V = \sqrt{dp/d\rho}$ hacia la izquierda de la Fig. 6.1, las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento pueden aplicarse como anteriormente y la pequeña perturbación se propaga a través del fluido en reposo. Esta velocidad se llama la velocidad del sonido $c$ en el medio. La perturbación desde una fuente puntual originaría una onda esférica, pero a alguna distancia de la fuente el frente de onda sería esencialmente lineal o unidimensional. Las grandes perturbaciones pueden desplazarse más rápidamente que la velocidad del sonido, como,

*Fig. 6.1 Flujo permanente en un canal prismático con un pequeño cambio brusco en la velocidad, la presión y la densidad.*



por ejemplo, la explosión de una bomba. La ecuación de la velocidad del sonido

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad (6.2.2)$$

puede expresarse de otras formas. Introduciendo el módulo de elasticidad volumétrico:

$$K = -\frac{dp}{d\mathcal{V}/\mathcal{V}}$$

siendo $\mathcal{V}$ el volumen del fluido sometido al cambio de presión $dp$. Como

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \frac{dv_s}{v_s} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$K$ puede expresarse por

$$K = \frac{\rho\, dp}{d\rho}$$

Entonces, de la Ec. (6.2.2)

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad (6.2.3)$$

Esta ecuación se aplica a líquidos lo mismo que a gases.

***Ejemplo 6.7*** El tetracloruro de carbono tiene un módulo de elasticidad volumétrico de 11.900 kg/cm² y una densidad de 162 UTM/m³. ¿Cuál es la velocidad del sonido en este medio?

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{11.900 \times 10^4}{162}} = 857 \text{ m/seg}$$

Como los cambios de presión y temperatura debidos al paso de una onda sonora son extremadamente pequeños, el proceso es casi reversible. Además, el proceso relativamente rápido del paso de la onda, junto con los cambios de temperatura, hace el proceso casi adiabático. En el límite, se puede considerar que el proceso es isoentrópico,

$$p\rho^{-k} = \text{const} \qquad \frac{dp}{d\rho} = \frac{kp}{\rho}$$

y

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \qquad (6.2.4)$$

y como para los gases ideales $p = \rho RT$,

$$c = \sqrt{kRT} \tag{6.2.5}$$

que demuestra que la velocidad del sonido en un gas ideal es una función únicamente de su temperatura absoluta. En el flujo de un gas a través de un conducto, la velocidad del sonido generalmente cambia de una sección a otra, lo mismo que la temperatura varía por los cambios de densidad y los efectos del rozamiento. En el flujo isotermo, la velocidad del sonido permanece constante.

El número de Mach ha sido definido como la relación de la velocidad de un flujo a la velocidad local del sonido en el medio,

$$\mathbf{M} = \frac{V}{c} \tag{6.2.6}$$

Elevando al cuadrado el número de Mach resulta $V^2/c^2$, que puede interpretarse como la relación de la energía cinética del fluido a su energía térmica, ya que la energía cinética es proporcional a $V^2$, y la térmica es proporcional a $T$. El número de Mach es una medida de la importancia de la compresibilidad. En un fluido incompresible $K$ es infinito y $\mathbf{M} = 0$. Para los gases ideales,

$$K = kp \tag{6.2.7}$$

cuando la compresión es isoentrópica.

*Ejemplo 6.8* ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire seco al nivel del mar cuando $t = 20°$ C, y en la estratosfera cuando $t = -20°$ C?

Al nivel del mar, por la Ec. (6.2.5):

$$c = \sqrt{1{,}4 \times 9{,}8 \times 29{,}3 \times (273 + 20)} = 343 \text{ m/seg}$$

y en la estratosfera,

$$c = \sqrt{1{,}4 \times 9{,}8 \times 29{,}3 \times (273 - 20)} = 318 \text{ m/seg}$$

### 6.3 Flujo isoentrópico

El flujo adiabático sin rozamiento o isoentrópico es un ideal que no se puede alcanzar en el movimiento de los gases reales. Sin embargo, se toma como aproximación, en el flujo a través de transiciones, toberas y venturímetros donde los efectos del rozamiento son menores, debido a las distancias cortas del trayecto, y el intercambio de calor es menor debido a que los cambios que experimenta una partícula son lo suficientemente lentos para conservar pequeños los gradientes de velocidad y temperatura†. Corrientemente se compara el rendimiento de las máquinas de fluidos con el rendimiento que se obtiene suponiendo que el flujo fuera isoentrópico. En esta sección se estudia primeramente el flujo a través de toberas convergentes y después a través de toberas convergentes-divergentes.



Puede llegarse a valiosas conclusiones a partir de la ecuación de Euler (despreciando los cambios de altura), Ec. (3.6.5), puesta en forma diferencial

$$V\,dV + \frac{dp}{\rho} = 0 \tag{6.3.1}$$

y de la ecuación de la continuidad

$$\rho A V = \text{const} \tag{6.3.2}$$

Diferenciando $\rho AV$ y dividiendo por $\rho AV$,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{6.3.3}$$

Usando la Ec. (6.2.2) para eliminar $dp$ en la ecuación de la energía

$$V\,dV + c^2\frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{6.3.4}$$

Después de eliminar $d\rho/\rho$ en las dos últimas y reagrupando

$$\frac{dA}{dV} = \frac{A}{V}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right) = \frac{A}{V}(\mathbf{M}^2 - 1) \tag{6.3.5}$$

En esta ecuación se ha supuesto que el flujo es permanente y sin rozamiento. No se han impuesto limitaciones respecto al intercambio de calor. La Ec. (6.3.5) demuestra que para el flujo subsónico ($\mathbf{M} < 1$) $dA/dV$ es siempre negativo, es decir, el área de la sección de la tobera debe disminuir al aumentar $V$. Como $dA/dV$ es cero para $\mathbf{M} = 1$, la ecuación demuestra que la velocidad aumenta hasta que se alcanza la garganta o sección mínima y que solo en esta sección puede el flujo ser sónico. Además, para números de Mach superiores a la unidad (flujo supersónico) $dA/dV$ es positivo y el área debe aumentar al aumentar la velocidad. Por consiguiente, para obtener flujo permanente supersónico a partir de un fluido en reposo en un recipiente, se le debe hacer pasar primero por un conducto convergente y después por un conducto divergente.

† H. W. Liepmann y A. Roshko, «Elements of Gas Dynamics», pág. 51, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.

Cuando el análisis se restringe a flujo isoentrópico, la Ec. (6.1.16) se puede escribir

$$p = p_1 \rho_1^{-k} \rho^k \tag{6.3.6}$$

Diferenciando y sustituyendo $dp$ en la Ec. (6.3.1),

$$V\,dV + k\frac{p_1}{\rho_1^k}\rho^{k-2}\,d\rho = 0$$

Integrando se obtiene

$$\frac{V^2}{2} - \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1^k}\rho^{k-1} = \text{const.}$$

o sea

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{6.3.7}$$

Esta ecuación es útil cuando se expresa en función de la temperatura y de $p = \rho RT$

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}RT_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1}RT_2 \tag{6.3.8}$$

Para flujo adiabático desde un recipiente donde las condiciones son $p_0$, $\rho_0$, $T_0$, en otra sección cualquiera

$$\frac{V^2}{2} = \frac{kR}{k-1}(T_0 - T) \tag{6.3.9}$$

En función del número de Mach local $V/c$, donde $c^2 = kRT$,

$$\mathbf{M}^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{2kR(T_0 - T)}{(k-1)kRT} = \frac{2}{k-1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

o sea

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2 \tag{6.3.10}$$

Para el flujo isoentrópico, las Ecs. (6.1.10) y (6.1.17) se reducen ahora



a las ecuaciones siguientes,

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{k/(k-1)} \tag{6.3.11}$$

y

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{1/(k-1)} \tag{6.3.12}$$

Las condiciones del flujo se denominan críticas en la sección de garganta cuando la velocidad en dicha sección es igual a la del sonido. Se representan las condiciones sónicas con un asterisco; $\mathbf{M} = 1$; $c^* = V^* = \sqrt{kRT^*}$. Aplicando las Ecs. (6.3.10) y (6.3.12) a la sección de garganta para las condiciones críticas (para $k = 1{,}4$ en la parte numérica),

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = 0{,}833 \qquad k = 1{,}40 \tag{6.3.13}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}528 \qquad k = 1{,}40 \tag{6.3.14}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} = 0{,}634 \qquad k = 1{,}40 \tag{6.3.15}$$

Estas relaciones demuestran que para flujo de aire la temperatura absoluta desciende aproximadamente el 17 por 100 desde el recipiente a la garganta, la presión crítica es el 52,8 por 100 de la presión del recipiente y la densidad se reduce aproximadamente en el 37 por 100.

Se obtiene la variación del área con el número de Mach para el caso crítico utilizando la ecuación de continuidad y las Ecs. (6.3.10) y (6.3.15). En primer lugar

$$\rho A V = \rho^* A^* V^* \tag{6.3.16}$$

donde $A^*$ es el área mínima, o de la garganta. Entonces

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V} \tag{6.3.17}$$

Ahora bien, $V^* = c^* = \sqrt{kRT^*}$, y $V = c\mathbf{M} = \mathbf{M}\sqrt{kRT}$, luego

$$\frac{V^*}{V} = \frac{1}{\mathbf{M}}\sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{\mathbf{M}}\sqrt{\frac{T^*}{T_0}}\sqrt{\frac{T_0}{T}} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left\{\frac{1 + [(k-1)/2]\mathbf{M}^2}{(k+1)/2}\right\}^{1/2} \tag{6.3.18}$$

empleando las Ecs. (6.3.13) y (6.3.10). De forma análoga

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho} = \left\{\frac{1 + [(k-1)/2]\mathbf{M}^2}{(k+1)/2}\right\}^{1/(k-1)} \tag{6.3.19}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la Ec. (6.3.17)

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left\{\frac{1 + [(k-1)/2]\mathbf{M}^2}{(k+1)/2}\right\}^{(k+1)/2(k-1)} \tag{6.3.20}$$

que da la variación de área del conducto en función del número de Mach. $A/A^*$ nunca es menor que la unidad, y para cualquier valor mayor que la unidad habrá dos valores del número de Mach, uno menor y otro mayor que la unidad. Para gases con $k = 1{,}40$, la Ec. (6.3.20) se reduce a

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left(\frac{5 + \mathbf{M}^2}{6}\right)^3 \qquad k = 1{,}40 \tag{6.3.21}$$

El máximo caudal en masa $\dot{m}_{max}$ se puede expresar en función del área de la garganta y las condiciones en el depósito:

$$\dot{m}_{max} = \rho^* A^* V^* = \rho_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} A^*\sqrt{\frac{kR2T_0}{k+1}}$$

utilizando las Ecs. (6.3.15) y (6.3.13). Sustituyendo $\rho_0$ por $p_0/RT_0$,

$$\dot{m}_{max} = \frac{A^* p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}} \tag{6.3.22}$$

Para $k = 1{,}40$ se reduce a

$$\dot{m}_{max} = 0{,}686\,\frac{A^* p_0}{\sqrt{RT_0}} \tag{6.3.23}$$

Para $\dot{m}_{max}$ en UTM por segundo, con aire, $R = 29{,}3 \times 9{,}81$ kgm/UTM °K, $A^*$ en cm², $p_0$ en kilogramos por centímetro cuadrado absolutos y $T_0$ en grados Kelvin. La Ec. (6.3.23) demuestra que el caudal en masa varía linealmente con $A^*$ y $p_0$ y varía inversamente con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta.

Para flujo subsónico a través de un conducto convergente-divergente, la velocidad en la garganta debe ser menor que la velocidad del sonido, o sea $\mathbf{M}_t < 1$, donde el subíndice $t$ indica la sección de garganta. El caudal



en masa $\dot{m}$ se obtiene de

$$\dot{m} = \rho V A = A\sqrt{2p_0\rho_0\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/k}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}\right]} \tag{6.3.24}$$

que se deduce de las Ecs. (6.3.9) y (6.3.6) y de la ley de los gases perfectos. Esta ecuación se cumple para una sección cualquiera y se aplica siempre que la velocidad en la garganta sea subsónica. Se puede aplicar a la sección de garganta, y para dicha sección, de la Ec. (6.3.14),

$$\frac{p_t}{p_0} \geq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

siendo $p_t$ la presión en la garganta. Cuando se emplea el signo igual, la Ec. (6.3.24) se reduce a la Ec. (6.3.22).

Para un caudal en masa máximo, el flujo aguas abajo de la garganta puede ser supersónico o subsónico, según la presión aguas abajo. Sustituyendo el valor de $\dot{m}$ de la Ec. (6.3.22) en la Ec. (6.3.24) y simplificando,

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/k}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}\right] = \frac{k-1}{2}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}\left(\frac{A^*}{A}\right)^2 \tag{6.3.25}$$

Se puede considerar que $A$ es el área de la sección de salida y $p$ la presión en dicha sección. Para $A^*/A$ dado (menor que la unidad) habrá dos valores de $p/p_0$ entre cero y la unidad, el valor superior se refiere al flujo subsónico a través del conducto divergente y el menor al flujo supersónico a través del conducto divergente. Para todas las demás relaciones de presiones menores que el valor superior es imposible un flujo isoentrópico total y se formarán ondas de choque en o exactamente aguas abajo del conducto divergente. En la sección siguiente se estudiará brevemente.

***Ejemplo 6.9*** Se desea un anteproyecto de un túnel aerodinámico para obtener un número de Mach igual a 3 en la salida. El caudal en masa es 1 $kg_m$/seg a la presión $p_0 = 0{,}8$ kg/cm², $t_0 = 27°$ C. Determinar: (*a*) el área de la garganta, (*b*) el área de salida y (*c*) la velocidad, la presión, la temperatura y la densidad en la salida.

(*a*) El área de la garganta se determina a partir de la Ec. (6.3.23):

$$A^* = \frac{\dot{m}_{max}\sqrt{RT_0}}{0{,}686 p_0} = \frac{1}{9{,}8} \times \frac{\sqrt{29{,}3(273 + 25)9{,}8}}{0{,}686 \times 0{,}8 \times 10^4} = 0{,}00545 \text{ m}^2 = 54{,}5 \text{ cm}^2$$

(*b*) El área de salida se puede determinar a partir de la Ec. (6.3.21):

$$A = \frac{A^*}{\mathbf{M}}\left(\frac{5 + \mathbf{M}^2}{6}\right)^3 = \frac{54{,}5}{3}\left(\frac{5 + 3^2}{6}\right)^3 = 230{,}8 \text{ cm}^2$$

(*c*) De la Ec. (6.3.11)

$$p = \frac{p_0}{[1 + (k-1)\mathbf{M}^2/2]^{k/(k-1)}} = \frac{0{,}8}{[1 + (1{,}4 - 1)3^2/2]^{1{,}4/(1{,}4-1)}} = 0{,}0218 \text{ kg/cm}^2 \text{ (abs)}$$

De la Ec. (6.3.12)

$$\rho = \frac{\rho_0}{[1 + (k-1)\mathbf{M}^2/2]^{1/(k-1)}} = \frac{p_0}{RT_0[1 + (k-1)\mathbf{M}^2/2]^{1/(k-1)}}$$

$$= \frac{0{,}8 \times 10^4}{29{,}3 \times 9{,}8 \times 300(1 + 0{,}2 \times 3^2)^{2{,}5}} = 0{,}021 \frac{\text{UTM}}{\text{m}^3}$$

De la Ec. (6.3.10)

$$T = \frac{T}{1 + (k-1)\mathbf{M}^2/2} = \frac{300}{1 + 0{,}2 \times 3^2} = 107{,}1^\circ \text{ K}$$

La velocidad es

$$V = c\mathbf{M} = \sqrt{kRT}\, 3 = 3\sqrt{1{,}4 \times 29{,}3 \times 9{,}8 \times 107{,}1} = 622{,}2 \text{ m/seg}$$

***Ejemplo 6.10*** Un conducto de aire convergente-divergente tiene de sección recta de la garganta 370 cm² y de sección recta de salida 925 cm². La presión en el recipiente es de 2 kg/cm² (abs) y la temperatura 15° C. Determinar el margen de números de Mach y el margen de presión en la salida para flujo isoentrópico. Hallar el caudal en masa máximo.

Resolviendo la Ec. (6.3.21)

$$\frac{A}{A^*} = 2{,}5 = \frac{1}{\mathbf{M}}\left(\frac{5 + \mathbf{M}^2}{6}\right)^3$$

por tanto, da $\mathbf{M} = 2{,}44$ y $0{,}24$. Cada uno de estos valores del número de Mach en la salida es para condiciones críticas; por consiguiente, el margen del número de Mach para flujo isoentrópico es de 0 a 0,24 y el valor aislado 2,44.

De la Ec. (6.3.11)

$$\frac{p_0}{p} = (1 + 0{,}2\mathbf{M}^2)^{3{,}5}$$

Para $\mathbf{M} = 2{,}44$, $p = 2/15{,}55 = 0{,}128$ kg/cm² (abs), y para $\mathbf{M} = 0{,}24$, $p = 2/1{,}041 = 1{,}923$ kg/cm² (abs). Entonces el margen de presión aguas abajo es desde 1,923 a 2 kg/cm² (abs) y el punto aislado 0,128 kg/cm² (abs).

El caudal en masa máximo se determina a partir de la Ec. (6.3.23):

$$\dot{m}_{max} = \frac{0{,}686 \times 370 \times 2}{\sqrt{29{,}3 \times 9{,}8(273 + 15)}} = 1{,}78 \text{ UTM/seg} = 17{,}45 \text{ kg}_m\text{/seg}$$



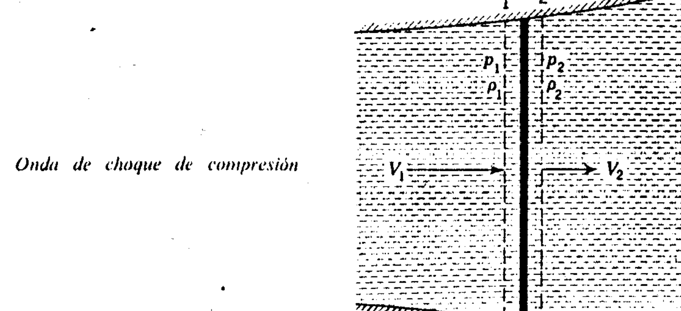



*Fig. 6.2 Onda de choque de compresión normal.*

***Ejemplo 6.11*** Un conducto convergente-divergente en una línea de transporte de aire, aguas abajo de un recipiente, tiene una garganta de 5 cm de diámetro. Determinar el caudal en masa cuando $p_0 = 8{,}4$ kg/cm² (abs), $t_0 = 32°$ C y $p_1 = 5{,}6$ kg/cm² (abs).

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{8{,}4 \times 10^4}{29{,}3 \times 9{,}8(273 + 32)} = 0{,}959 \text{ UTM/m}^3$$

De la Ec. (6.3.24)

$$\dot{m} = \frac{\pi \times 0{,}0025}{4}\sqrt{2 \times 8{,}4 \times 10 \times 0{,}959\frac{1{,}4}{1{,}4 - 1}\left(\frac{5{,}6}{8{,}4}\right)^{2/1{,}4}\left[1 - \left(\frac{5{,}6}{8{,}4}\right)^{0{,}4/1{,}4}\right]}$$

$$= 376 \text{ UTM/seg}$$

Al final del capítulo se dan las referencias de los libros de Cambel y Jennings y de Shapiro et al., donde hay tablas que simplifican grandemente los cálculos en flujo isoentrópico.

## 6.4 Ondas de choque

En flujo unidimensional, el único tipo de onda de choque que aparece es una onda de choque de compresión normal, como se indica en la Fig. 6.2. Para un estudio completo del flujo convergente-divergente para todos los márgenes† seguros de la presión de aguas abajo, se deben tener en cuenta las ondas de choque oblicuas que se presentan en la salida. En la sección anterior se demostró que aparecía flujo isoentrópico a través de una tobera convergente-divergente para un margen de presiones

† H. W. Liepmann y A. Roshko, «Elements of Gas Dynamics». John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.

aguas abajo en el cual el flujo era subsónico a través de toda la tobera y para una presión aguas abajo, para flujo supersónico a través del difusor (parte divergente). En esta sección se estudia la onda de choque normal en un difusor, con flujo isoentrópico a través de toda la tobera, excepto en la superficie de la onda de choque. La onda de choque aparece en flujo supersónico y reduce éste a subsónico, como se demostrará en la sección siguiente. Tiene muy poco espesor, del orden del camino molecular libre medio del gas. Las ecuaciones que gobiernan el flujo adiabático son (Fig. 6.2)

Continuidad:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{6.4.1}$$

Energía:

$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2 = h_0 = \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} \tag{6.4.2}$$

que se obtienen de la Ec. (3.8.8) no habiendo cambio en la altura, ni intercambio de calor ni se realiza trabajo. La entalpía es $h = u + p/\rho = c_p T$, y $h_0$ es el valor de la entalpía de estancamiento, es decir, su valor en el depósito o donde el fluido esté en reposo. La Ec. (6.4.2) se cumple para fluidos reales y es válida aguas arriba y aguas abajo de una onda de choque. La ecuación de la cantidad de movimiento (3.11.9) para un volumen de control entre la sección 1 y 2 es

$$(p_1 - p_2)A = \rho_2 A V_2^2 - \rho_1 A V_1^2$$

o sea

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \tag{6.4.3}$$

Para unas condiciones aguas arriba dadas $h_1$, $p_1$, $V_1$, $\rho_1$, se despejan $p_2$, $\rho_2$ y $V_2$ de entre las tres ecuaciones. También se puede utilizar la ecuación de estado de un gas perfecto, $p = \rho RT$. El valor de $p_2$ es

$$p_2 = \frac{1}{k+1}[2\rho_1 V_1^2 - (k-1)p_1] \tag{6.4.4}$$

Una vez determinada $p_2$, combinando las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_1 V_1 V_2 \tag{6.4.5}$$



se obtiene $V_2$ inmediatamente. Por último, $\rho_2$ se obtiene de la ecuación de continuidad.

Para condiciones aguas arriba dadas, con $\mathbf{M}_1 > 1$, existen los valores de $p_2$, $V_2$, $\rho_2$, y $\mathbf{M}_2 = V_2/\sqrt{kp_2/\rho_2}$ y $\mathbf{M}_2 < 1$. Eliminando $V_1$ y $V_2$ entre las Ecs. (6.4.1), (6.4.2) y (6.4.3) se obtienen las ecuaciones de Rankine-Hugoniot:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{[(k+1)/(k-1)](\rho_2/\rho_1) - 1}{[(k+1)/(k-1)] - \rho_2/\rho_1} \tag{6.4.6}$$

y

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + [(k+1)/(k-1)]p_2/p_1}{[(k+1)/(k-1)] + p_2/p_1} = \frac{V_1}{V_2} \tag{6.4.7}$$

Estas ecuaciones, que relacionan las condiciones en cada lado de la onda de choque, ocupan el lugar de la relación isoentrópica, Ec. (6.1.16), $p\rho^{-k} =$ constante.

De la Ec. (6.4.2), la ecuación de la energía,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{c^{*2}}{2} + \frac{c^{*2}}{k-1} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c^{*2}}{2} \tag{6.4.8}$$

ya que la ecuación se cumple para todos los puntos en flujo adiabático sin cambio en la altura, y $c^* = \sqrt{kp^*/\rho^*}$ es la velocidad del sonido. Dividiendo la Ec. (6.4.3) por la Ec. (6.4.1),

$$V_1 - V_2 = \frac{p_2}{\rho_2 V_2} - \frac{p_1}{\rho_1 V_1}$$

y eliminando $p_2/\rho_2$ y $p_1/\rho_1$, utilizando la Ec. (6.4.8),

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V_2)\left[\frac{c^{*2}(k+1)}{2kV_1V_2} + \frac{k-1}{2k}\right] \tag{6.4.9}$$

que se satisface para $V_1 = V_2$ (no hay onda de choque) y para

$$V_1 V_2 = c^{*2} \tag{6.4.10}$$

Se puede escribir

$$\frac{V_1}{c^*}\cdot\frac{V_2}{c^*} = 1 \tag{6.4.11}$$

Cuando $V_1$ es mayor que $c^*$, el número de Mach aguas arriba es mayor que la unidad y $V_2$ es menor que $c^*$, de manera que el número de Mach final es menor que la unidad, y viceversa. En la sección siguiente se de-

muestra que el proceso solo puede producirse a partir de flujo supersónico aguas arriba para pasar a flujo subsónico aguas abajo.

Utilizando la Ec. (6.1.14), junto con las Ecs. (6.4.4), (6.4.6) y (6.4.7), se puede obtener una expresión para la variación de entropía a través de una onda de choque normal en función de $\mathbf{M}_1$ y $k$. De la Ec. (6.4.4),

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[\frac{2k\rho_1 V_1^2}{kp_1} - (k-1)\right] \tag{6.4.12}$$

Como $c_1^2 = kp_1/\rho_1$ y $\mathbf{M}_1 = V_1/c_1$, de la Ec. (6.4.12),

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k\mathbf{M}_1^2 - (k-1)}{k+1} \tag{6.4.13}$$

Llevando este valor de $p_2/p_1$ a la Ec. (6.4.7), da

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\mathbf{M}_1^2(k+1)}{2 + \mathbf{M}_1^2(k-1)}$$

Ahora bien, el sustituir estas relaciones de presión y de densidad en la Ec. (6.1.14),

$$S_2 - S_1 = c_v \ln\left\{\frac{2k\mathbf{M}_1^2 - k + 1}{k+1}\left[\frac{2 + \mathbf{M}_1^2(k-1)}{\mathbf{M}_1^2(k+1)}\right]^k\right\} \tag{6.4.14}$$

Sustituyendo en esta ecuación $\mathbf{M}_1 > 1$ para el valor adecuado de $k$, se puede demostrar que la entropía aumenta a través de la onda de choque, mostrándose a la vez que la onda de choque normal debe pasar de un flujo supersónico aguas arriba a un flujo subsónico aguas abajo. Sustituyendo valores de $\mathbf{M}_1 < 1$ en la Ec. (6.4.14) no tiene sentido la ecuación resultante, ya que la Ec. (6.4.13) de un valor negativo de la relación $p_2/p_1$.

En la sección siguiente se estudia más a fondo la onda de choque introduciendo las líneas de Fanno y Rayleigh.

***Ejemplo 6.12*** Si se produce una onda de choque normal en el flujo de helio con $p_1 = 0{,}07$ kg/cm² (abs), $t_1 = 5°$ C, $V_1 = 1.800$ m/seg, hallar $p_2$, $\rho_2$, $V_2$ y $t_2$.

De la Tabla C.2, $R = 212$, $k = 1{,}66$, y

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0{,}07 \times 10^4}{212 \times 9{,}8 \times (273 + 5)} = 0{,}00121 \text{ UTM/m}^3$$

De la Ec. (6.4.4)

$$p_2 = \frac{1}{1{,}66 + 1}[2 \times 0{,}00121 \times (1.800) - (1{,}66 - 1) \times 0{,}07 \times 10^4]$$

$$= 2.770 \text{ kg/m}^2 \text{ (abs)}$$



De la Ec. (6.4.5)

$$V_2 = V_1 - \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 V_1} = 1.800 - \frac{(0{,}277 - 0{,}07) \times 10^4}{1.800 \times 0{,}00121} = 850 \text{ m/seg}$$

De la Ec. (6.4.1)

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 0{,}00121 \frac{1.800}{850} = 0{,}00256 \text{ UTM/m}^3$$

y

$$t_2 = T_2 - 273 = \frac{p_2}{\rho_2 R} - 273 = \frac{2770}{0{,}00256 \times 9{,}8 \times 212} - 273 = 247° \text{ C}$$

### 6.5 *Líneas de Fanno y Rayleigh*

Para examinar con más detalle la naturaleza de la variación de flujo en la corta distancia que define una onda de choque, donde se puede considerar constante el área, se combinan las ecuaciones de continuidad y de la energía para el flujo adiabático permanente y con rozamiento. Considerando fijas las condiciones aguas arriba, es decir, $p_1$, $V_1$, $\rho_1$, se puede hacer un diagrama de todas las condiciones posibles en la sección 2, Fig. 6.2. Las líneas de dicho diagrama para caudal en masa constante $G$ por unidad de área se llaman *líneas de Fanno*. El diagrama más idóneo es aquel cuyos ejes son la entalpía y la entropía, es decir, un diagrama *hs*.

La ecuación de la variación de entropía para un gas perfecto, Ec. (6.1.14), es

$$s - s_1 = c_v \ln\left[\frac{p}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^k\right] \tag{6.5.1}$$

La ecuación de la energía para flujo adiabático sin cambio en altura es, a partir de la Ec. (6.4.2),

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \tag{6.5.2}$$

y la ecuación de continuidad cuando no hay cambio de área es, de la Ec. (6.4.1),

$$G = \rho V \tag{6.5.3}$$

La ecuación de estado, que relaciona $h$, $p$ y $\rho$, es

$$h = c_p T = \frac{c_p p}{R\rho} \tag{6.5.4}$$

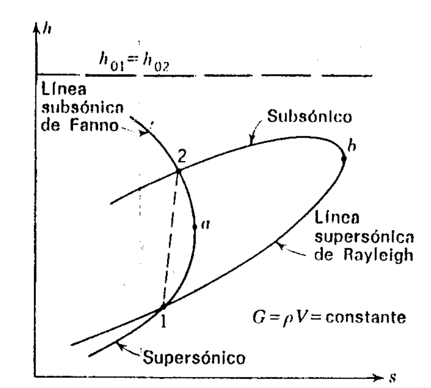



*Fig. 6.3* *Líneas de Fanno y Rayleigh.*

Eliminando $p$, $\rho$ y $V$ de las cuatro ecuaciones,

$$s = s_1 + c_v \ln\left[\frac{\rho_1^k}{p_1}\frac{R}{c_p}\left(\frac{\sqrt{2}}{G}\right)^{k-1}\right] + c_v \ln\left[h(h_0 - h)^{(k-1)/2}\right] \qquad (6.5.5)$$

que se representa en la Fig. 6.3 (que no está a escala). Para hallar las condiciones de entropía máxima se deriva la Ec. (6.5.5) respecto a $h$ y se iguala a cero $ds/dh$. Indicando mediante el subíndice $a$ los valores en el punto de entropía máxima tenemos que

$$\frac{ds}{dh} = 0 = \frac{1}{h_a} - \frac{k-1}{2}\frac{1}{h_0 - h_a}$$

o sea

$$h_a = \frac{2}{k+1} h_0$$

Sustituyendo este valor en la Ec. (6.5.2) hallar $V_a$

$$h_0 = \frac{k+1}{2} h_a = h_a + \frac{V_a^2}{2}$$

y

$$V_a^2 = (k-1)h_a = (k-1)c_p T_a = (k-1)\frac{kR}{k-1} T_a = kRT_a = c_a^2 \qquad (6.5.6)$$

Por consiguiente se obtiene la entropía máxima en el punto $a$ para $\mathbf{M} = 1$, o sea condiciones sónicas. Para $h > h_a$ el flujo es subsónico, y para $h < h_a$ el flujo es supersónico. Las dos condiciones, antes y después de la onda de choque, deben caer en la línea de Fanno apropiada para el área donde



aparece la onda de choque. No se ha utilizado la ecuación de la cantidad de movimiento para determinar la línea de Fanno, por lo que aún no se ha determinado la solución completa.

### *Línea de Rayleigh*

Las condiciones antes y después de la onda de choque deben satisfacer también las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de continuidad. Suponiendo constantes las condiciones aguas arriba y que el área es constante, se utilizan las Ecs. (6.5.1), (6.5.3), (6.5.4) y (6.4.1) para determinar la *línea de Rayleigh*. Eliminando $V$ entre las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento,

$$p + \frac{G^2}{\rho} = \text{const} = B \qquad (6.5.7)$$

A continuación, eliminando $p$ entre esta ecuación y la de la entropía,

$$s = s_1 + c_v \ln\frac{\rho_1^k}{p_1} + c_v \ln\frac{B - G^2/\rho}{\rho^k} \qquad (6.5.8)$$

La entalpía se puede expresar como función de $\rho$ y de las condiciones aguas arriba, según la Ec. (6.5.7):

$$h = c_p T = c_p\frac{p}{R\rho} = \frac{c_p}{R}\frac{1}{\rho}\left(B - \frac{G^2}{\rho}\right) \qquad (6.5.9)$$

Las dos últimas ecuaciones determinan $s$ y $h$ en función del parámetro $\rho$ y se representan en el diagrama $hs$ como se indica en la Fig. 6.3. Esta es la *línea de Rayleigh*. Se halla el valor de entropía máxima hallando $ds/d\rho$ y $dh/d\rho$ en estas dos ecuaciones, después se dividen y se iguala a cero, utilizando el subíndice $b$ para el punto de entropía máxima:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{c_v}{c_p}.R\rho_b\frac{G^2/[\rho_b(B - G^2/\rho_b)] - k}{2G^2/\rho_b - B} = 0$$

Para satisfacer esta ecuación, el numerador debe ser cero y el denominador distinto de cero. Igualando a cero el numerador da

$$k = \frac{G^2}{\rho_b(B - G^2/\rho_b)} = \frac{\rho_b^2 V_b^2}{\rho_b p_b}$$

o sea

$$V_b^2 = \frac{k p_b}{\rho_b} = c_b^2$$

es decir, $\mathbf{M} = 1$. Para este valor el denominador es distinto de cero. De nuevo, como con la línea de Fanno, aparecen las condiciones sónicas en el punto de entropía máxima. Como las condiciones deben estar sobre ambas curvas, inmediatamente antes e inmediatamente después de la onda de choque, debe pasar bruscamente de un punto de intersección al otro. La entropía no puede disminuir, ya que no se transfiere calor del flujo, de modo que el punto aguas arriba debe ser la intersección con entropía mínima. En todos los gases estudiados, la intersección en el flujo subsónico tiene la entropía máxima. Por tanto, la onda de choque aparece desde el flujo supersónico al subsónico.

Las líneas de Fanno y Rayleigh son valiosas para analizar el flujo en conductos de área constante. Estos se estudian en las secciones siguientes.

## 6.6 *Flujo adiabático con rozamiento en conductos*

En esta sección se analiza el flujo de gas a través de una tubería o conducto de área constante sometido a las hipótesis siguientes:

1. Gas perfecto (calores específicos constantes).
2. Flujo permanente unidimensional.
3. Flujo adiabático (no hay transmisión de calor a través de las paredes).
4. Coeficiente de rozamiento constante en toda la longitud del conducto.
5. El diámetro efectivo del conducto $D$ es cuatro veces el radio hidráulico (área de la sección recta dividida por el perímetro).
6. Los cambios de altura son despreciables frente a los efectos del rozamiento.
7. Ni se añade ni se extrae trabajo del flujo.

Las ecuaciones de control son las de la continuidad, la de la energía, de la cantidad de movimiento y la ecuación de estado. La línea de Fanno desarrollada en la Sec. 6.5 y representada en la Fig. 6.3, se refería a casos de área constante y utilizaba las ecuaciones de continuidad y de la energía; por consiguiente, se aplica al flujo adiabático en un conducto de área constante. Una partícula de gas en el extremo aguas arriba del conducto se puede representar mediante un punto en la línea de Fanno adecuada para entalpía propia de estancamiento $h_0$ y caudal en masa $G$ por unidad de área. Cuando la partícula se mueve aguas abajo, cambian sus propiedades, debido al rozamiento o a las irreversibilidades de manera que la entropía siempre aumente en el flujo adiabático. Por tanto, el punto que representa estas propiedades se mueve a lo largo de la línea de Fanno hacia el punto de máximo $s$, donde $\mathbf{M} = 1$. Si el conducto se alimenta mediante una tobera convergente-divergente, el flujo debe ser originalmente supersónico; entonces la velocidad debe disminuir aguas abajo. Si el flujo es subsónico en el extremo aguas arriba, la velocidad debe aumentar en el sentido aguas abajo.



*Tabla 6.1*

| *Propiedad* | *Flujo subsónico* | *Flujo supersónico* |
|---|---|---|
| Velocidad $V$ | Aumenta | Disminuye |
| Número de Mach $\mathbf{M}$ | Aumenta | Disminuye |
| Presión $p$ | Disminuye | Aumenta |
| Temperatura $T$ | Disminuye | Aumenta |
| Densidad $\rho$ | Disminuye | Aumenta |
| Entalpía de estancamiento | Constante | Constante |
| Entropía | Aumenta | Aumenta |

Unicamente para una longitud de tubería, que depende de las condiciones aguas arriba, el flujo en el extremo aguas abajo es exactamente sónico ($\mathbf{M} = 1$). Para longitudes más cortas de la tubería, el flujo no habrá alcanzado las condiciones sónicas en la salida, pero para longitudes más largas de la tubería, debe haber ondas de choque (y posiblemente *estrangulación*) si el flujo es supersónico y efectos de *estrangulación* si es subsónico. Por *estrangulación* se entiende que un caudal en masa especificado no se puede alcanzar en dicho estado y aparecerá menos flujo. La Tabla 6.1 indica los sentidos de las propiedades del gas en flujo adiabático a través de un conducto de área constante, como se puede demostrar de las ecuaciones de esta sección.

El gas no puede cambiar gradualmente de subsónico a supersónico o viceversa en un conducto de área constante.

A continuación, la ecuación de la cantidad de movimiento debe incluir los efectos de la tensión cortante en la pared y se escribe para un segmento del conducto de longitud $\delta x$ de la manera siguiente (Fig. 6.4):

$$pA - \left(p + \frac{dp}{dx}\,\delta x\right)A - \tau_0 \pi D\,\delta x = \rho V A\left(V + \frac{dV}{dx}\,\delta x - V\right)$$

Simplificando,

$$dp + \frac{4\tau_0}{D}\,dx + \rho V\,dV = 0 \qquad (6.6.1)$$

Utilizando la Ec. (5.10.2), $\tau_0 = \rho f V^2/8$, donde $f$ es el coeficiente de rozamiento de Darcy-Weisbach,

$$dp + \frac{f\rho V^2}{2D}\,dx + \rho V\,dV = 0 \qquad (6.6.2)$$

Para $f$ constante, o un valor medio para toda la longitud considerada,

se puede transformar esta ecuación en una ecuación de $x$ en función del número de Mach. Dividiendo la Ec. (6.6.2) por $p$,

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{2D}\frac{\rho V^2}{p}dx + \frac{\rho V}{p}dV = 0 \tag{6.6.3}$$

y ahora se desarrolla cada término en función de **M**. Por definición, $V/c = \mathbf{M}$,

$$V^2 = \mathbf{M}^2\frac{kp}{\rho} \tag{6.6.4}$$

o sea

$$\frac{\rho V^2}{p} = k\mathbf{M}^2 \tag{6.6.5}$$

para el término central de la ecuación de la cantidad de movimiento. Reagrupando la Ec. (6.6.4),

$$\frac{\rho V}{p}dV = k\mathbf{M}^2\frac{dV}{V} \tag{6.6.6}$$

A continuación, para expresar $dV/V$ en función de **M** tenemos que de la ecuación de la energía,

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = c_pT + \frac{V^2}{2} \tag{6.6.7}$$

Diferenciando,

$$c_p\,dT + V\,dV = 0 \tag{6.6.8}$$

Dividiendo por $V^2 = \mathbf{M}^2kRT$,

$$\frac{c_p}{R}\frac{1}{k\mathbf{M}^2}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

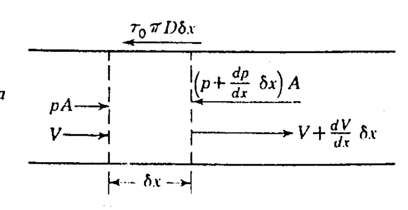



*Fig. 6.4 Notación para la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento.*



Como $c_p/R = k/(k-1)$,

$$\frac{dT}{T} = -\mathbf{M}^2(k-1)\frac{dV}{V} \tag{6.6.9}$$

Diferenciando $V^2 = \mathbf{M}^2kRT$ y dividiendo la ecuación diferencial por la propia ecuación,

$$2\frac{dV}{V} = 2\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} + \frac{dT}{T} \tag{6.6.10}$$

Eliminando $dT/T$ entre las Ecs. (6.6.9) y (6.6.10) y simplificando,

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\mathbf{M}/\mathbf{M}}{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2 + 1} \tag{6.6.11}$$

que permite eliminar $dV/V$ en la Ec. (6.6.6), dando

$$\frac{\rho V}{p}dV = \frac{k\mathbf{M}\,d\mathbf{M}}{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2 + 1} \tag{6.6.12}$$

Y por último, para expresar $dp/p$ en función de **M**, de $p = \rho RT$ y $G = \rho V$,

$$pV = GRT \tag{6.6.13}$$

Diferenciando y dividiendo por la propia ecuación,

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

Las Ecs. (6.6.9) y (6.6.11) se utilizan para eliminar $dT/T$ y $dV/V$:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{(k-1)\mathbf{M}^2 + 1}{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2 + 1}\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} \tag{6.6.14}$$

A continuación se sustituyen las Ecs. (6.6.5), (6.6.12) y (6.6.14) en la Ec. (6.6.3). Reagrupando términos,

$$\frac{f}{D}dx = \frac{2(1-\mathbf{M}^2)}{k\mathbf{M}^3\{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2 - 1\}}d\mathbf{M}$$

$$= \frac{2}{k}\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}^3} - \frac{k+1}{k}\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}\{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2 + 1\}} \tag{6.6.15}$$

que se puede integrar directamente. Utilizando las condiciones de con-

torno $x = 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ y $x = l$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}$,

$$\frac{fl}{D} = -\frac{1}{k\mathbf{M}^2}\Big]_{\mathbf{M}_0}^{\mathbf{M}} - \frac{k+1}{2k}\ln\frac{\mathbf{M}^2}{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2+1}\Big]_{\mathbf{M}_0}^{\mathbf{M}} \tag{6.6.16}$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\mathbf{M}_0^2} - \frac{1}{\mathbf{M}^2}\right) + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\left(\frac{\mathbf{M}_0}{\mathbf{M}}\right)^2\frac{(k-1)\mathbf{M}^2+2}{(k-1)\mathbf{M}_0^2+2}\right] \tag{6.6.17}$$

Para $k = 1{,}4$, se reduce a

$$\frac{fl}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{\mathbf{M}_0^2} - \frac{1}{\mathbf{M}^2}\right) + \frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{\mathbf{M}_0}{\mathbf{M}}\right)^2\frac{\mathbf{M}^2+5}{\mathbf{M}_0^2+5}\right] \qquad k = 1{,}4 \tag{6.6.18}$$

Si $\mathbf{M}_0$ es mayor que 1, entonces $\mathbf{M}$ no puede ser menor que 1, y si $\mathbf{M}_0$ es menor que 1, $\mathbf{M}$ no puede ser mayor que 1. Para $\mathbf{M} = 1$ y $k = 1{,}4$,

$$\frac{fL_{max}}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{\mathbf{M}_0^2} - 1\right) + \frac{6}{7}\ln\frac{6\mathbf{M}_0^2}{\mathbf{M}_0^2+5} \qquad k = 1{,}4 \tag{6.6.19}$$

Experiencias realizadas por Keenan y Neumann† muestran coeficientes de rozamiento aparentes para flujo supersónico de aproximadamente la mitad del valor para flujo subsónico.

***Ejemplo 6.13*** Determinar la longitud máxima de una tubería de diámetro interior 5 cm, $f = 0{,}02$ para flujo de aire, cuando el número de Mach a la entrada de la tubería es 0,30.

De la Ec. (6.6.19)

$$\frac{0{,}02}{5}L_{max} = \frac{5}{7}\left[\frac{1}{(0{,}3)^2} - 1\right] + \frac{6}{7}\ln\frac{6\times(0{,}3)^2}{(0{,}3)^2+5}$$

de donde $L_{max} = 1.325$ cm $= 13{,}25$ m.

También se pueden expresar la presión, la velocidad y la temperatura en forma integral en función del número de Mach. Para simplificar las ecuaciones que siguen se integran desde las condiciones aguas arriba a las condiciones en $\mathbf{M} = 1$, representadas mediante $p^*$, $V^*$ y $T^*$. De la Ec. (6.6.14)

$$\frac{p^*}{p_0} = \mathbf{M}_0\sqrt{\frac{(k-1)\mathbf{M}_0^2+2}{k+1}} \tag{6.6.20}$$

† J. H. Keenan y E. P. Neumann, Measurements of Friction in a Pipe for Subsonic and Supersonic Flow of Air, *J. Appl. Mech.*, vol. 13, n.° 2, pág. A-91, 1946.



De la Ec. (6.6.11)

$$\frac{V^*}{V_0} = \frac{1}{\mathbf{M}_0}\sqrt{\frac{(k-1)\mathbf{M}_0^2+2}{k+1}} \tag{6.6.21}$$

De las Ecs. (6.6.9) y (6.6.11)

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\frac{\mathbf{M}\,d\mathbf{M}}{[(k-1)/2]\mathbf{M}^2+1}$$

que, integrada, da

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{(k-1)\mathbf{M}_0^2+2}{k+1} \tag{6.6.22}$$

***Ejemplo 6.14*** Una tubería de diámetro interior 10 cm y $f = 0{,}01$, tiene aire a 1 kg/cm² y a $t = 15°$ C que fluye en el extremo aguas arriba con un número de Mach 3,0. Determinar $L_{max}$, $p^*$, $V^*$, $T^*$ y los valores de $p$, $V$, $T$ y $L$ en $\mathbf{M} = 2{,}0$.

De la Ec. (6.6.19)

$$\frac{0{,}01}{10}L_{max} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{9} - 1\right) + \frac{6}{7}\ln\frac{6\times 9}{9+5}$$

de donde $L_{max} = 600$ cm $= 6$ m. Para $\mathbf{M} = 2$, la longitud $L_{max}$ vale

$$\frac{0{,}01}{10}L_{max} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4} - 1\right) + \frac{6}{7}\ln\frac{6\times 2^2}{2^2+5}$$

de donde $L_{max} = 304{,}2$ cm $= 3{,}042$ m.

Por consiguiente, la longitud desde la sección aguas arriba para $\mathbf{M} = 3$ hasta la sección donde $\mathbf{M} = 2$ es $6 - 3{,}042 = 2{,}958$ m.

La velocidad en la entrada es

$$V = \sqrt{kRT}\,\mathbf{M} = \sqrt{1{,}4\times 29{,}3\times 9{,}80(273+15)}\times 3 = 1.020 \text{ m/seg}$$

De las Ecs. (6.6.20) y (6.6.22)

$$\frac{p^*}{1} = 3\sqrt{\frac{0{,}4\times 3^2+2}{2{,}4}} = 4{,}56$$

$$\frac{V^*}{1.020} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{0{,}4\times 3^2+2}{2{,}4}} = 0{,}507$$

$$\frac{T^*}{288} = \frac{0{,}4\times 3^2+2}{2{,}4} = \frac{7}{3}$$

De manera que $p^* = 4{,}56$ kg/cm² (abs), $V^* = 517{,}14$ m/seg, $T^* = 672°$ K. Para

$\mathbf{M} = 2$, las mismas ecuaciones sirven para hallar ahora $p'_0$, $V'_0$ y $T'_0$:

$$\frac{4{,}56}{p'_0} = 2\sqrt{\frac{0{,}4 \times 2^2 + 2}{2{,}4}} = 2{,}44$$

$$\frac{517{,}14}{V'_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0{,}4 \times 2^2 + 2}{2{,}4}} = 0{,}61$$

$$\frac{672}{T'_0} = \frac{0{,}4 \times 2^2 + 2}{2{,}4} = \frac{3}{2}$$

De donde $p'_0 = 1{,}87$ kg/cm² (abs), $V'_0 = 847{,}77$ m/seg y $T'_0 = 448°$ K.

## 6.7 *Flujo sin rozamiento a través de conductos con transferencia de calor*

En esta sección se considera el flujo permanente de un gas perfecto (con calores específicos constantes) a través de un conducto de área constante. Se desprecia el rozamiento y no se realiza trabajo alguno sobre o por el flujo.

Las ecuaciones adecuadas para el análisis de este caso son

Continuidad:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho V \tag{6.7.1}$$

Cantidad de movimiento:

$$p + \rho V^2 = \text{const} \tag{6.7.2}$$

Energía:

$$q_H = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$
$$= c_p(T_{02} - T_{01}) \tag{6.7.3}$$

$T_{01}$ y $T_{02}$ son las temperaturas isoentrópicas de estancamiento, es decir, la temperatura que se alcanza en una sección al pasar el flujo de manera isoentrópica al reposo.

La línea de Rayleigh, obtenida de la solución de la cantidad de movimiento y de continuidad para una sección recta constante y despreciando el rozamiento, es de mucha utilidad para examinar el flujo. En primer lugar, al eliminar $V$ en las Ecs. (6.7.1) y (6.7.2),



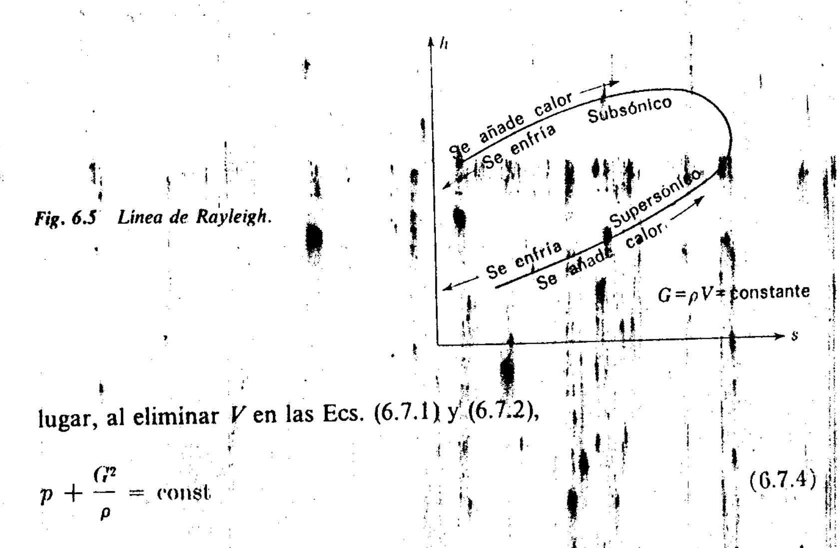



Fig. 6.5 Línea de Rayleigh.

$$p + \frac{G^2}{\rho} = \text{const} \tag{6.7.4}$$

que es la Ec. (6.5.7). Las Ecs. (6.5.8) y (6.5.9) expresan la entropía $s$ y la entalpía $h$ en función del parámetro $\rho$ para las hipótesis de esta sección, como se representa en la Fig. 6.5.

Como, según la Ec. (3.8.13), para pérdidas nulas, sólo puede aumentar la entropía cuando se aporta calor, las propiedades del gas deben variar como se indica en la Fig. 6.5, desplazándose hacia el punto de entropía máxima cuando se aporta calor. En el punto de $s$ máxima no hay variación de entropía para un pequeño cambio de $h$ y son aplicables las condiciones isoentrópicas. La velocidad del sonido en condiciones isoentrópicas viene dada por $c = \sqrt{dp/d\rho}$, Ec. (6.2.2). Diferenciando la Ec. (6.7.4),

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{\rho^2} = V^2$$

teniendo en cuenta la Ec. (6.7.1). Por consiguiente, en el punto de $s$ máxima de la línea de Rayleigh, $V = \sqrt{dp/d\rho}$ y prevalece $\mathbf{M} = 1$, o sea las condiciones sónicas. Al aportar calor al flujo supersónico se logra que el número de Mach del flujo descienda hacia $\mathbf{M} = 1$, y si se aporta exactamente la cantidad de calor precisa, $\mathbf{M}$ se hace 1. Si se aporta más calor, se produce estrangulamiento y se modifican las condiciones en el extremo aguas arriba tendiendo a reducirse el caudal en masa. Al aportar calor al flujo subsónico se logra un aumento en el número de Mach hacia $\mathbf{M} = 1$, y a su vez, demasiado calor da lugar a estrangulamiento con un reajuste del caudal en masa aguas arriba a un valor menor.

De la Ec. (6.7.3) se observa que una medida de la cantidad de calor aportado es el aumento de la presión isoentrópica de estancamiento. De

$V^2 = \mathbf{M}^2 kRT$, $p = \rho RT$ y la ecuación de continuidad,

$$pV = GRT$$

y

$$\rho V^2 = kp\mathbf{M}^2$$

Ahora bien, de la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$p_1 + kp_1\mathbf{M}_1^2 = p_2 + kp_2\mathbf{M}_2^2$$

y

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + k\mathbf{M}_2^2}{1 + k\mathbf{M}_1^2} \tag{6.7.5}$$

Escribiendo esta ecuación para el caso límite $p_2 = p^*$ cuando $\mathbf{M}_2 = 1$,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + k}{1 + k\mathbf{M}^2} \tag{6.7.6}$$

siendo $p$ la presión en un punto cualquiera del conducto donde $\mathbf{M}$ es el número de Mach correspondiente. Para el caso subsónico, si $\mathbf{M}$ aumenta hacia la derecha (Fig. 6.5), $p$ debe disminuir, y para el caso supersónico, cuando $\mathbf{M}$ disminuye hacia la derecha, $p$ debe aumentar.

Para desarrollar las restantes ecuaciones correspondientes, se utiliza la ecuación de la energía (6.7.3),

$$c_p T_0 = \frac{kR}{k-1} T_0 = \frac{kR}{k-1} T + \frac{V^2}{2}$$

en la que $T_0$ es la temperatura isoentrópica de estancamiento y $T$ la temperatura de la corriente libre en la misma sección. Aplicándolo a la sección 1, después de dividir por $kRT_1/(k-1)$,

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + (k-1)\frac{\mathbf{M}_1^2}{2} \tag{6.7.7}$$

y para la sección 2

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + (k-1)\frac{\mathbf{M}_2^2}{2} \tag{6.7.8}$$

Dividiendo la Ec. (6.7.7) por la Ec. (6.7.8),

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{T_1}{T_2}\frac{2 + (k-1)\mathbf{M}_1^2}{2 + (k-1)\mathbf{M}_2^2} \tag{6.7.9}$$



La relación $T_1/T_2$ se determina en función de los números de Mach de la manera siguiente: A partir de la ley de los gases perfectos, $p_1 = \rho_1 RT_1$, $p_2 = \rho_2 RT_2$,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{6.7.10}$$

De la continuidad, $\rho_2/\rho_1 = V_1/V_2$ y por definición,

$$\mathbf{M}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} \qquad \mathbf{M}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{kRT_2}}$$

de manera que

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{M}_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

y

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{M}_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \tag{6.7.11}$$

Ahora bien, al sustituir las Ecs. (6.7.5) y (6.7.11) en la Ec. (6.7.10) y simplificar,

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{M}_2}\frac{1 + k\mathbf{M}_2^2}{1 + k\mathbf{M}_1^2}\right)^2 \tag{6.7.12}$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (6.7.9),

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \left(\frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{M}_2}\frac{1 + k\mathbf{M}_2^2}{1 + k\mathbf{M}_1^2}\right)^2 \frac{2 + (k-1)\mathbf{M}_1^2}{2 + (k-1)\mathbf{M}_2^2} \tag{6.7.13}$$

Al aplicar esta ecuación a la sección aguas abajo donde $T_{02} = T_0^*$ y $\mathbf{M}_2 = 1$, quitando los subíndices para la sección aguas arriba,

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{\mathbf{M}^2(k+1)[2 + (k-1)\mathbf{M}^2]}{(1 + k\mathbf{M}^2)^2} \tag{6.7.14}$$

Ahora son utilizables todas las ecuaciones necesarias para la determinación del flujo sin rozamiento con transferencia de calor en un conducto de área constante. La cantidad de calor intercambiada por unidad de masa viene dada por $q_H = c_p(T_0^* - T_0)$ para $\mathbf{M} = 1$ en la salida. El uso de las ecuaciones se ilustra en el ejemplo siguiente.

***Ejemplo 6.15*** A través de un conducto de 10 cm de diámetro fluye aire a $V_1 = 100$ m/seg, $p = 3$ kg/cm², $t = 15°$ C. ¿Qué cantidad de calor se necesita por unidad de masa para tener condiciones sónicas en la salida? Determinar la presión, la temperatura y la velocidad en la salida y en la sección donde $\mathbf{M} = 0{,}70$.

$$\mathbf{M}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{100}{\sqrt{1{,}4 \times 29{,}3 \times 9{,}8(273 + 15)}} = 0{,}294$$

La temperatura isoentrópica de estancamiento en la entrada es, según la Ec. (6.7.7),

$$T_{01} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1{}^2\right) = 288[1 + 0{,}2 \times (0{,}294)^2] = 293° \text{ K}$$

La temperatura isoentrópica de estancamiento en la salida es, según la Ec. (6.7.14),

$$T_0^* = \frac{T_0(1 + k\mathbf{M}^2)^2}{(k+1)\mathbf{M}^2[2 + (k-1)\mathbf{M}^2]} = \frac{293[1 + 1{,}4 \times (0{,}294)^2]^2}{2{,}4 \times (0{,}294)^2[2 + 0{,}4 \times (0{,}294)^2]} = 779° \text{ K}$$

La cantidad de calor intercambiada por UTM de aire en movimiento es

$$q_H = c_p(T_0^* - T_{01}) = 0{,}24 \times 9{,}8(779 - 293) = 1{,}143 \text{ kcal/UTM}$$

La presión en la salida es, según la Ec. (6.7.6),

$$p^* = p\,\frac{1 + k\mathbf{M}^2}{k+1} = \frac{3}{2{,}4}\,1 + 1{,}4 \times (0{,}294) = 1{,}4 \text{ kg/cm}^2$$

y la temperatura según la Ec. (6.7.12)

$$T^* = T\left[\frac{1 + k\mathbf{M}^2}{(k+1)\mathbf{M}}\right]^2 = 288\left[\frac{1 + 1{,}4 \times (0{,}294)^2}{2{,}4 \times 0{,}294}\right]^2 = 728 \text{ K}$$

En la salida,

$$V^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{1{,}4 \times 29{,}3 \times 9{,}8 \times 728} = 540 \text{ m/seg}$$

En la sección donde $\mathbf{M} = 0{,}7$, de la Ec. (6.7.6),

$$p = p^*\,\frac{k+1}{1 + k\mathbf{M}^2} = \frac{1{,}4 \times 2{,}4}{1 + 1{,}4 \times (0{,}7)^2} = 1{,}99 \text{ kg/cm}^2$$

De la Ec. (6.7.12)

$$T = T^*\left[\frac{(k+1)\mathbf{M}}{1 + k\mathbf{M}^2}\right]^2 = 728\left[\frac{2{,}4 \times 0{,}7}{1 + 1{,}4 \times (0{,}7)^2}\right]^2 = 722° \text{ K}$$

y

$$V = \mathbf{M}\sqrt{kRT} = 0{,}7\sqrt{1{,}4 \times 29{,}3 \times 9{,}8 \times 722} = 377 \text{ m/seg}$$



En la Tabla 6.2 se muestran los sentidos de variación de las propiedades del flujo.

Para curvas y tablas que tabulan las distintas ecuaciones, consultar los libros de Cambel y Jennings, Shapiro, y Shapiro et al., indicados en las referencias del final de este capítulo.

## *6.8 Flujo isotérmico permanente en tuberías largas*

En el análisis del flujo isotérmico de un gas perfecto a través de conductos largos, no son aplicables las líneas de Fanno ni de Rayleigh, ya que la línea de Fanno se aplica al flujo adiabático y la de Rayleigh al flujo sin rozamiento. A continuación se desarrolla un análisis en cierto modo análogo a los de las dos secciones anteriores para mostrar el sentido de variación de las propiedades con el número de Mach.

Las ecuaciones adecuadas son:

Cantidad de movimiento [Ec. (6.6.3)]:

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{2D}\frac{\rho V^2}{p}\,dx + \frac{\rho V}{p}\,dV = 0 \qquad (6.8.1)$$

Ecuación de estado:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} \qquad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} \qquad (6.8.2)$$

Continuidad:

$$\rho V = \text{const} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \qquad (6.8.3)$$

***Tabla 6.2 Sentidos de variación en las propiedades del flujo***

| *Propiedad* | *Calentamiento* | | *Enfriamiento* | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathbf{M} > 1$ | $\mathbf{M} < 1$ | $\mathbf{M} > 1$ | $\mathbf{M} < 1$ |
| Presión $p$ | Aumenta | Disminuye | Disminuye | Aumenta |
| Velocidad $V$ | Disminuye | Aumenta | Aumenta | Disminuye |
| Temperatura isoentrópica de estancamiento $T_0$ | Aumenta | Aumenta | Disminuye | Disminuye |
| Densidad $\rho$ | Aumenta | Disminuye | Disminuye | Disminuye |
| Temperatura $T$ | Aumenta | Aumenta para $\mathbf{M} < 1/k$ Disminuye para $\mathbf{M} > 1/k$ | Disminuye | Disminuye para $\mathbf{M} < 1/k$ Aumenta para $\mathbf{M} > 1/k$ |

Energía [Ec. (6.7.7)]:

$$T_0 = T\left[1 + \frac{(k-1)}{2}\mathbf{M}^2\right] \qquad (6.8.4)$$

donde $T_0$ es la temperatura isoentrópica de estancamiento en la sección donde la temperatura constante de la corriente libre es $T$ y el número de Mach es $\mathbf{M}$.

Presión de estancamiento [Ec. (6.3.11)]:

$$p_0 = p\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{k/(k-1)} \qquad (6.8.5)$$

donde $p_0$ es la presión (en la sección de $p$ y $\mathbf{M}$) obtenida reduciendo isoentrópicamente a cero la velocidad.

De las definiciones y usando las ecuaciones anteriores,

$$V = c\mathbf{M} = \sqrt{kRT}\,\mathbf{M} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{M}^2}{2\mathbf{M}^2}$$

$$\frac{\rho V}{p}dV = \frac{V\,dV}{RT} = \frac{c^2}{RT}\mathbf{M}\,d\mathbf{M} = k\mathbf{M}\,d\mathbf{M}$$

$$\frac{\rho V^2}{p} = \frac{c^2\mathbf{M}^2}{RT} = k\mathbf{M}^2$$

Sustituyendo en la ecuación de la cantidad de movimiento, utilizando las relaciones,

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{M}^2}{\mathbf{M}^2} = -\frac{k\mathbf{M}^2}{1-k\mathbf{M}^2}\frac{f\,dx}{2D} \qquad (6.8.6)$$

El diferencial $dx$ es positivo en la dirección aguas abajo, por tanto se puede sacar en conclusión que la dirección de las propiedades varía según que $\mathbf{M}$ sea menor o mayor que $1/\sqrt{k}$. Para $\mathbf{M} < 1/\sqrt{k}$, disminuyen la presión y la densidad y aumentan la velocidad y el número de Mach, para $\mathbf{M} > 1/\sqrt{k}$ se invierten los sentidos; por consiguiente, el número de Mach tiende siempre a $1/\sqrt{k}$, en lugar de a la unidad, en el flujo isotérmico en tuberías.

Para determinar la dirección del intercambio de calor, se diferencia la Ec. (6.8.4) y se divide por ella misma, teniendo en cuenta que $T$ es constante,

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k-1}{2+(k-1)\mathbf{M}^2}d\mathbf{M}^2 \qquad (6.8.7)$$



Eliminando $d\mathbf{M}^2$ entre esta ecuación y la Ec. (6.8.6),

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k(k-1)\mathbf{M}^4}{(1-k\mathbf{M}^2)[2+(k-1)\mathbf{M}^2]}\frac{f\,dx}{D} \qquad (6.8.8)$$

que muestra que la temperatura isoentrópica de estancamiento aumenta cuando $\mathbf{M} < 1/\sqrt{k}$, lo que indica que el calor se transfiere al fluido. Para $\mathbf{M} > 1/\sqrt{k}$ el intercambio de calor es desde el fluido.

De las Ecs. (6.8.5) y (6.8.6)

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{2-(k+1)\mathbf{M}^2}{2+(k-1)\mathbf{M}^2}\frac{k\mathbf{M}^2}{k\mathbf{M}^2-1}\frac{f\,dx}{2D} \qquad (6.8.9)$$

La Tabla 6.3 muestra cómo varían las propiedades del fluido.

Integrando las Ecs. (6.8.6) en función de $\mathbf{M}$, se halla la variación con el número de Mach. Los dos últimos términos dan

$$\frac{f}{D}\int_0^{L_{max}} dx = \frac{1}{k}\int_{\mathbf{M}}^{1/\sqrt{k}} \frac{(1-k\mathbf{M}^2)}{\mathbf{M}^4}d\mathbf{M}^2$$

o sea

$$\frac{f}{D}L_{max} = \frac{1-k\mathbf{M}^2}{k\mathbf{M}^2} + \ln(k\mathbf{M}^2) \qquad (6.8.10)$$

donde, como antes, $L_{max}$ representa la longitud máxima del conducto. Para longitudes mayores se produce estrangulamiento y disminuye el caudal en masa. Para hallar la variación de presión,

$$\int_p^{p^{*t}} \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{M}}^{1/\sqrt{k}} \frac{d\mathbf{M}^2}{\mathbf{M}^2}$$

y

$$\frac{p^{*t}}{p} = \sqrt{k}\,\mathbf{M} \qquad (6.8.11)$$

*Tabla 6.3 Sentidos de variación en las propiedades del fluido para flujo isotérmico*

| Propiedad | $\mathbf{M} < 1/\sqrt{k}$ subsónico | $\mathbf{M} > 1/\sqrt{k}$ subsónico o supersónico |
|---|---|---|
| Presión $p$ | Disminuye | Aumenta |
| Densidad $\rho$ | Disminuye | Aumenta |
| Velocidad $V$ | Aumenta | Disminuye |
| Número de Mach $\mathbf{M}$ | Aumenta | Disminuye |
| Temperatura de estancamiento $T_0$ | Aumenta | Disminuye |
| Presión de estancamiento $p_0$ | Disminuye | Aumenta para $\mathbf{M} < \sqrt{2/(k+1)}$<br>Disminuye para $\mathbf{M} > \sqrt{2/(k+1)}$ |

El superíndice $*'$ indica las condiciones en $\mathbf{M} = 1/\sqrt{k}$, y $\mathbf{M}$ y $p$ representan los valores en cualquier sección aguas arriba.

*Ejemplo 6.16* En una tubería de 10 cm de diámetro interior entra helio desde una tobera convergente-divergente a $\mathbf{M} = 1{,}30$, $p = 0{,}15$ kg/cm², $T = 222°$ K. Determinar para flujo isotérmico: (*a*) la longitud máxima de la tubería para que no haya estrangulamiento, (*b*) las condiciones aguas abajo y (*c*) la distancia desde la salida a la sección donde $\mathbf{M} = 1$, $f = 0{,}006$.

(*a*) De la Ec. (6.8.10) para $k = 1{,}66$

$$\frac{0{,}006L_{max}}{10} = \frac{1 - 1{,}66 \times (1{,}3)^2}{1{,}66 \times (1{,}3)^2} + \ln[1{,}66 \times (1{,}3)^2]$$

de donde $L_{max} = 646{,}2$ cm $= 6{,}462$ m.

(*b*) De la Ec. (6.8.11)

$$p^{*t} = p\sqrt{k}\,\mathbf{M} = 0{,}14\sqrt{1{,}66}\,1{,}3 = 0{,}23 \text{ kg/cm}^2$$

El número de Mach en la salida es $1/\sqrt{1{,}66} = 0{,}756$. De la Ec. (6.8.6)

$$\int_V^{V^{*t}} \frac{dV}{V} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{M}}^{1/\sqrt{k}} \frac{d\mathbf{M}^2}{\mathbf{M}^2}$$

o sea

$$\frac{V^{*t}}{V} = \frac{1}{\sqrt{k}\mathbf{M}}$$

En la sección aguas arriba

$$V = \mathbf{M}\sqrt{kRT} = 1{,}3\sqrt{1{,}66 \times 212 \times 9{,}8 \times 222} = 1138 \text{ m/seg}$$

y

$$V^{*t} = \frac{V}{\sqrt{k}\mathbf{M}} = \frac{1138}{\sqrt{1{,}66}\,1{,}3} = 673 \text{ m/seg}$$

(*c*) De la Ec. (6.8.10) para $\mathbf{M} = 1$,

$$\frac{0{,}006L'_{max}}{10} = \frac{1 - 1{,}66}{1{,}66} + \ln 1{,}66$$

o sea $L'_{max} = 1{,}80$ m. $\mathbf{M} = 1$ se obtiene a 1,80 m de la salida.

## 6.9 Vuelo a gran velocidad

Esta sección, dedicada al vuelo a gran velocidad, trata cinco aspectos del problema: efecto de las ondas de choque y del desprendimiento sobre



la sustentación del perfil de ala, estampido sónico, arrastre de onda, regla del área y calentamiento aerodinámico. Estos cuatro últimos temas se han reproducido con variaciones mínimas de «Supplementary Notes, Aerodynamics and Gas Dynamics», Department of Mechanics, United States Military Academy, West Point, Nueva York.

### *Efecto de las ondas de choque y del desprendimiento sobre la sustentación y la resistencia del perfil de ala*

El coeficiente de sustentación $C_L$ del perfil normal de ala en el vuelo subsónico tiende a aumentar casi linealmente (Fig. 5.23) con el ángulo de ataque. $C_L$ alcanza un valor máximo entre 1,2 y 1,8, que se limita por la separación de la capa límite (Sec. 5.6) de la superficie superior del ala. Cuando la línea de corriente límite se despega, como en la Fig. 6.6, la presión sobre el ala en la región despegada se hace aproximadamente igual a la presión no perturbada de la corriente de fluido. Como la mayor parte de la sustentación se produce normalmente por depresión en la superficie superior más que por sobrepresión en la superficie inferior, el coeficiente de sustentación baja pronunciadamente. Esta formación de una gran zona turbulenta sobre la mayor parte de la superficie superior se conoce como desprendimiento, y va acompañada también de un pronunciado aumento en el coeficiente de resistencia. Para ángulos de ataque pequeño (Fig. 6.6*a*) el flujo se separa cerca del borde de salida, pero esto no afecta materialmente a la sustentación.

Cuando la velocidad del perfil de ala se aproxima a la velocidad del sonido en el aire, se hacen importantes los efectos de compresibilidad.

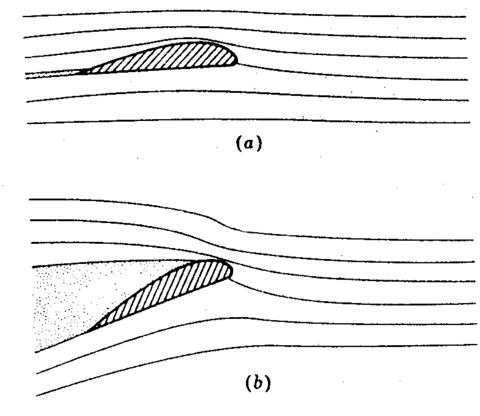



*Fig. 6.6 Perfil de ala en flujo subsónico. (a) Flujo sin desprendimiento. (b) Flujo con desprendimiento.*

Un perfil de ala delgado en flujo subsónico tiene un coeficiente de sustentación que está relacionado con el coeficiente de sustentación para flujo incompresible $C_{L0}$, mediante la transformación de Prandtl-Glauert

$$C_L = \frac{C_{L0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

donde $\mathbf{M}_\infty$ es el número de Mach de la velocidad de aproximación relativa al perfil de ala. Por consiguiente, el coeficiente de sustentación aumenta cuando aumenta el número de Mach hasta la zona transónica. El coeficiente de arrastre aumenta grandemente en esta zona (Fig. 5.25).

La zona transónica se define como la zona del número de Mach de la velocidad de aproximación en la que alrededor del perfil de ala se producen flujo subsónico y supersónico (Fig. 6.7). Considerando que la velocidad de aproximación (o velocidad del perfil de ala a través de aire en calma) aumenta lentamente, aparece en primer lugar una región de flujo supersónico sobre una pequeña zona de la superficie superior del perfil de ala donde la velocidad local es máxima. Se forman ondas de choque

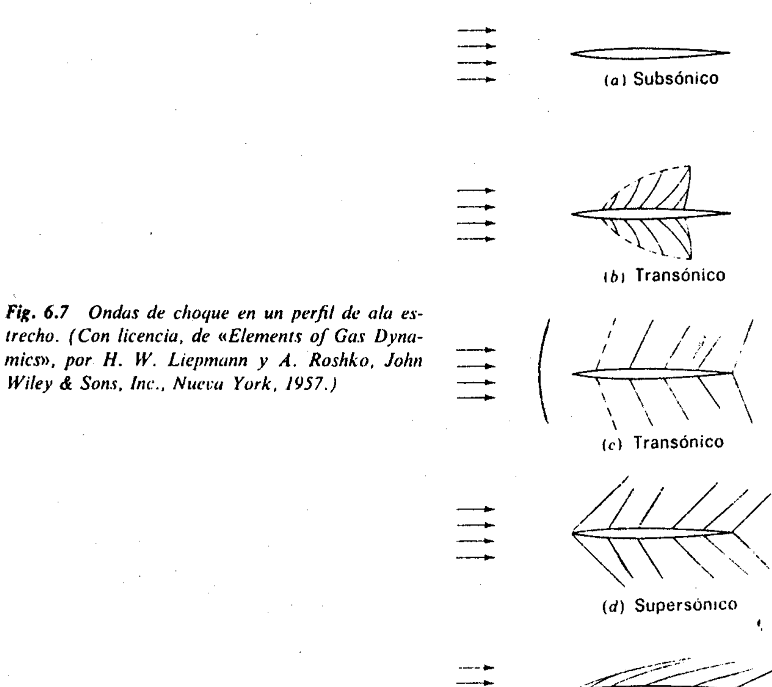



*Fig. 6.7 Ondas de choque en un perfil de ala estrecho. (Con licencia, de «Elements of Gas Dynamics», por H. W. Liepmann y A. Roshko, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.)*



oblicuas y hay una disminución en el coeficiente de sustentación y un aumento en el coeficiente de resistencia o arrastre. El gradiente adverso de presiones a través de las ondas de choque afecta indudablemente la capa límite y puede influir seriamente en la separación. Para números de Mach ligeramente mayores, también aparecen ondas de choque a lo largo de la superficie inferior, como se ve en la Fig. 6.7*b*. En la Fig. 6.8, para algunos perfiles de ala, se ve que el coeficiente de sustentación empieza a disminuir cuando se forman las ondas de choque superiores (punto *A*) y después comienza a aumentar cuando aparecen las ondas de choque inferiores (punto *B*).

Para velocidades de aproximación mayores en la zona transónica, se forma una onda de choque separada delante del perfil de ala, con flujo subsónico entre ella y la parte delantera del perfil (Fig. 6.7*c*). Para $\mathbf{M}_\infty$ mayor, la onda de choque separada se aproxima al borde frontal del perfil. Cuando llega a tocar dicho borde, el flujo es supersónico en todas partes (Fig. 6.7*d*). La Fig. 6.7*e* indica la formación de la onda de choque para el caso *hipersónico*.

### *Estampido sónico*

Este sonido es producido por una onda de presión que golpea el oído. Un sonido muy alto, en el que hay una gran diferencia de presión a través de la onda, se interpreta por el oído como una explosión. Este tipo de onda de presión se llama onda de choque.

Cuando un avión vuela con una velocidad superior a la del sonido, crea ondas de choque en el aire. Bajo ciertas condiciones atmosféricas dichas ondas de choque alcanzan el suelo y se perciben como explosiones, o «estampidos sónicos». La mayor parte de los estampidos que se oyen son las ondas de choque intensas que se originan al acelerar un avión y atravesar la barrera del sonido en un picado. Al hacer esto, se forman

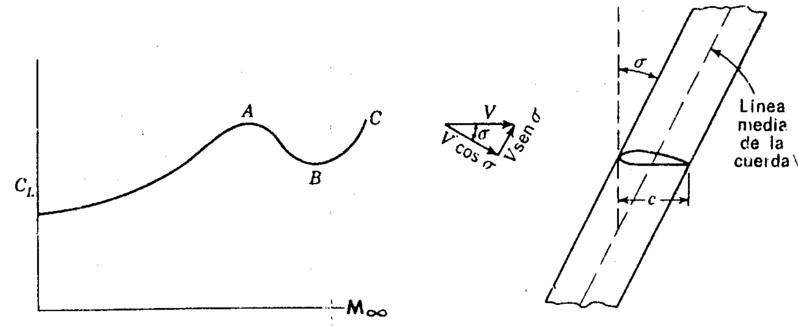



*Fig. 6.8 Variación de $C_L$ en el margen transónico.*

*Fig. 6.9 Ala retraída.*

muchas ondas de choque en el avión, con las más fuertes (las de mayor diferencia de presión) en la punta y en la cola. Entonces, mientras el piloto sale del picado, el avión disminuye la velocidad y la onda de choque continúa hacia abajo, llegando a los oídos del observador que oye uno o dos estampidos, según las condiciones atmosféricas, la dirección del picado, etc. El ruido dependerá de la velocidad del avión, de su velocidad de arranque, y de su altitud en el extremo inferior del picado. A baja altitud, nivel de vuelo para velocidades supersónicas se escuchará el estampido, pero no hasta que el avión haya dejado atrás al observador.

### *Arrastre de onda*

El hecho de que se produzcan ondas de choque va en detrimento del rendimiento de un avión por dos razones. El repentino aumento de presión a través de una onda de choque produce un gradiente de presión adverso en la capa límite, produciéndose su separación y los efectos normales en la sustentación y la resistencia (respectivamente, disminuye y aumenta). Además, aparece una resistencia adicional ya que la energía se hace inútil a través de las ondas de choque.

La resistencia que resulta de los efectos de compresibilidad (llamada *arrastre de onda*) comienza a afectar un avión a velocidades ligeramente inferiores a la del sonido debido a la presencia de regiones de flujo supersónico en las superficies del avión a estas velocidades. El menor número de Mach para el que aparecerán dichas regiones y las ondas de choque correspondientes se llama número de Mach crítico ($\mathbf{M}_{crit}$). El aumento rápido en la resistencia, la disminución en la sustentación y en la eficacia propulsora aparecen aproximadamente para $\mathbf{M}_{crit} = 0{,}7$ haciendo creer a un gran número de personas en la década de 1930 que existía una «barrera del sonido», velocidad límite más allá de la que nunca podría volar un avión. Los sistemas de propulsión de los aviones en uso en aquella época no podían producir el impulso suficiente para sobrepasar dicha velocidad. Aún al comienzo de la década de 1940, solo se había ampliado esta velocidad de «divergencia de arrastre» hasta velocidades próximas a $\mathbf{M}_{crit} = 0{,}8$. En 1945, la North American Aviation, combinando alas de envergadura retraída y un motor de chorro, pasó la barrera del sonido.

Probablemente los dos métodos más eficaces para retardar los efectos de la compresibilidad en los perfiles de alas son el uso de perfiles delgados y de envergadura retraída. Un ala de envergadura retraída es aquella cuya línea media (Fig. 6.9) no es perpendicular a la velocidad relativa del aire. Para comprender el concepto físico de este diseño, considérese un ala uniforme de longitud infinita cuyo borde frontal forma un ángulo $\sigma$ hacia atrás respecto a la normal a la velocidad relativa del aire $V$. El flujo normal al borde frontal tiene la velocidad $V \cos \sigma$. La velocidad tangencial $V$ sen $\sigma$ del flujo original no influye en la sustentación del ala y solo



es importante para determinar las tensiones de rozamiento. Como solo es significativa la componente normal de la velocidad, el número de Mach eficaz es $\mathbf{M} \cos \sigma$. Por tanto, aun cuando el número de Mach del vuelo puede ser 1 o mayor, el número de Mach eficaz $\mathbf{M} \cos \sigma$ puede, para un $\sigma$ conveniente, ser lo suficientemente pequeño para posponer y aminorar el efecto adverso de los choques (desprendimiento por él).

La envergadura retraída tiene dos inconvenientes principales. El primero es que la sustentación disminuye, ya que la componente normal de la velocidad pasa de $V$ a $V \cos \sigma$, por tanto se necesitan áreas de las alas mayores. El segundo es que hay varios problemas estructurales relacionados con las alas de envergadura retraída, que se deben hacer mayores para proporcionar área adicional. Los inconvenientes anteriores se superan en régimen transónico utilizando alas en delta (por ejemplo, el F-102 o el B-58), que, sin embargo, plantean problemas de estabilidad y control. Por otra parte, las ventajas inherentes de las alas con envergadura retraída se pueden utilizar en el régimen de vuelo supersónico. En este caso las velocidades son suficientemente grandes para que el área del ala no tenga relativamente importancia para la sustentación ($L = C_L \frac{1}{2} \rho A V^2$) y las alas fuertes y cortas de este diseño son suficientes para el vuelo (por ejemplo, el F-101 y el F-105).

Además de los inconvenientes principales citados antes, existe también una disminución en $dC_L/d\alpha$ a velocidades bajas, por lo que se requiere un ángulo de ataque grande al aterrizar. También se presentan dificultades de control en las proximidades al desprendimiento, debidas a una tendencia al desprendimiento prematuro en los extremos. Tiras verticales paralelas a la dirección de vuelo y situadas exactamente hacia el cuerpo de los alerones son muy útiles para evitar el flujo de la capa límite que produce el fenómeno del desprendimiento en los extremos.

### *Regla del área*

Otro método para reducir el aumento de la resistencia que se produce cuando un avión entra en la zona transónica consiste en utilizar la *regla del área* al diseñar el avión. Pruebas experimentales han demostrado que el aumento de la resistencia en esta zona es principalmente función de la distribución axial del área de la sección recta del avión normal a la corriente de aire. En otras palabras, si el cambio en el área de la sección recta (pendiente de la curva, Fig. 6.10) es gradual desde el morro a la cola, la resistencia será menor. Sin embargo, al añadir un ala o una cola a un cuerpo de revolución produce un aumento brusco en el área de la sección recta efectiva (Fig. 6.10) y, por tanto, una resistencia transónica elevada. La regla del área establece que se debe diseñar el avión completo de modo que se produzca un cambio gradual en el área desde el morro a la cola (línea de trazo lleno, Fig. 6.11). Esto se podría cumplir dismi-

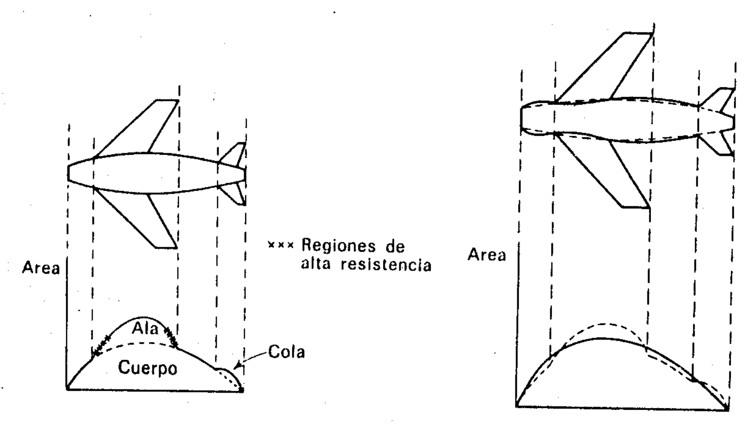



*Fig. 6.10* *Variación en el área de la sección recta del avión.*

*Fig. 6.11* *Variación en el área con el diseño de la regla del área.*

nuyendo la sección del fuselaje en la base de las alas y de la cola. Sin embargo, las necesidades de espacio para el motor, el combustible, los instrumentos, carga, etc., permanecen iguales; por tanto, el cambio gradual se realiza aumentando el volumen del cuerpo delante y detrás del ala, dando al avión una forma de «botella de Coca-Cola». Mediante esta regla se puede eliminar el 90 por 100 del aumento de la resistencia en la región de $1{,}00 < \mathbf{M} < 1{,}05$. Para números de Mach mayores, la resistencia que se obtiene mediante la regla del área tiende a la resistencia de un avión convencional.

### *Calentamiento aerodinámico*

Uno de los problemas del vuelo a muy alta velocidad (hipersónico) es el calentamiento aerodinámico. Si se desprecia la conducción de calor (flujo adiabático), la temperatura de un punto de estancamiento se halla a partir de la Ec. (6.6.7) sustituyendo $h_0$ por $c_pT_0$, entonces

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \tag{6.9.1}$$

donde $T$ es la temperatura estática de la corriente libre del fluido a la velocidad $V$ respecto a un cuerpo sumergido en el fluido. $T_0$ es la temperatura de estancamiento. De la Ec. (6.1.8) y $c = \sqrt{kRT}$,

$$R = \frac{k-1}{k} c_p$$

y

$$c = \sqrt{c_p(k-1)T} \tag{6.9.2}$$



Eliminando $c_p$ entre (6.9.1) y (6.9.2),

$$T_0 = T + \frac{V^2}{c^2}\frac{k-1}{2}T = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right) \tag{6.9.3}$$

Para el aire, $k = 1{,}4$,

$$T_0 = T(1 + 0{,}2\mathbf{M}^2) \tag{6.9.4}$$

Para un número de Mach de 5 resulta una temperatura de estancamiento seis veces la temperatura estática de la corriente libre.

En un fluido real, debido a la acción de la viscosidad, la velocidad en un contorno sólido es cero respecto al contorno y se puede demostrar† que el calor desarrollado en la capa límite por rozamiento produce aproximadamente el mismo aumento de temperatura que la compresión adiabática dada por la Ec. (6.9.3). La severidad de este calentamiento aerodinámico es una de las consideraciones predominantes en todo diseño de aviones avanzados.

El problema del calentamiento aerodinámico se puede resolver de varias maneras, algunas de las cuales se ponen de manifiesto en el diseño de los proyectiles corrientes de alta velocidad.

Una de ellas, el método del *sumidero de calor*, emplea una masa de refrigerante suficiente para absorber todo el calor que se produce sin sobrepasar los límites de temperatura de los materiales. Otro método, *ablación*, consiste en fabricar los bordes exteriores delanteros de un material que sea mal conductor de modo que la superficie exterior se funda o se sublime mientras que la superficie interna permanece fría. Ambos procedimientos, particularmente este último, no son muy adecuados para tiempos de vuelos largos (reentrada). Otro intento de solución consiste en utilizar la transpiración, o «enfriamiento por exudación», en la que un líquido, un gas o un vapor se bombea a través de una superficie porosa, absorbiendo el calor y enfriando por evaporización. Este procedimiento sirve tanto para vuelos de larga duración como de corta duración, pero tiene dos inconvenientes principales: (1) problema de materiales y (2) una gran tendencia a producir una transición del flujo laminar al turbulento de la capa límite, teniendo esta última la característica poco deseable de transferir a la superficie una cantidad de calor varias veces superior a la transferida por la capa límite laminar.

El diseño de sumidero de calor se representa mejor mediante los conos de punta roma empleados hoy día en los proyectiles balísticos intercontinentales (los ICBM). El cuerpo de punta roma va rodeado de una

† H. Schlichting, «Boundary Layer Theory», 4.ª ed., cap. 15, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1960.

capa límite de aire a alta temperatura que estará disociado parcialmente (descompuesto en los elementos constitutivos o disociación de un elemento simple, por ejemplo, $H_2 \rightleftharpoons 2H$) y, en menor extensión, ionizado y estará a temperaturas de unos 8.300° C a las velocidades de los ICBM (**M** $\approx$ 24). Este gas caliente puede transmitir calor al cuerpo por convección y por radiación. El primero es el principal aportador de calor, que el cuerpo disipa después por conducción o radiación. La transmisión de calor de origen convectivo al punto de estancamiento de un cuerpo romo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la superficie roma de la ojiva, $1/\sqrt{r}$. Por tanto, un radio grande, es decir, más curvado que puntiagudo, da como resultado menor transmisión de calor desde el aire a la superficie. Este diseño también proporciona más material de cono de punta inmediatamente adyacente a la temperatura máxima (punto de estancamiento), por tanto, facilita la conducción de calor desde este punto hacia el exterior. Se evita la transición de la capa límite de laminar a turbulenta, con el consiguiente aumento de transmisión de calor de origen convectivo al cono de punta, dando a éste un pulido muy cuidadoso en la superficie.

La utilización del diseño de sumidero de calor tiene una limitación impuesta por la conductividad térmica del material del sumidero de calor. Para los grandes picos de transmisión de calor que se producen en proyectiles de la mayor velocidad, no se puede conducir el calor desde la cara expuesta del sumidero de calor hacia el interior con la rapidez suficiente, y se producen fusiones catastróficas. Este procedimiento de fusión durante la reentrada se llama ablación y realmente es un tipo de transmisión de calor autorregulada por vaporización.

Normalmente, para la reentrada en la atmósfera de los satélites lentos se emplea material aislante adicional detrás de la capa de ablación para conservar la superficie interna a temperaturas dentro de límites que pueda tolerar la carga. Sin embargo, en la reentrada de un cono balístico de punta se producen transmisiones de calor mucho más severas, y la superficie del material que ha experimentado ablación se retrae a la misma velocidad que penetra el calor en el interior. Los materiales de ablación estudiados son plásticos puros, plásticos reforzados con fibras orgánicas e inorgánicas, óxido de silicio y otros óxidos, carbono y grafito, yeso, nitruro de magnesio y materiales cerámicos.

El problema del calentamiento aerodinámico está lejos aún de estar resuelto completamente y constituirá durante los años próximos un desafío en el campo de la aerofísica. Sin embargo, el avance realizado en unos pocos años, desde que pasó a ser importante, hacia una solución es una prueba positiva de que se descubrirán métodos cada vez mejores para reducir el calor producido y transmitir más calor hacia el espacio inmediato en un futuro muy próximo.



## 6.10 *Analogía de las ondas de choque con las ondas en canales abiertos*

Tanto las ondas de choque normales como oblicuas en un gas tienen su contrapartida en el flujo en canales abiertos. La onda elemental superficial en un líquido en reposo tiene la celeridad $\sqrt{gy}$, siendo $y$ la profundidad en un canal ancho y abierto. Cuando el flujo en el canal es tal que $V = V_c = \sqrt{gy}$, el número de Froude es la unidad y el flujo se dice que es *crítico*, es decir, una pequeña perturbación no puede propagarse aguas arriba. Esto es análogo a lo que sucede con flujo sónico en la garganta de una tobera con número de Mach igual a la unidad. Para velocidades del líquido mayores que $V_c = \sqrt{gy}$, el número de Froude es mayor que la unidad y la velocidad es superior a la crítica de manera análoga al flujo supersónico en un gas. Los cambios en profundidad en los canales son análogos a los cambios de densidad en el flujo de gases.

La ecuación de continuidad en un canal abierto de anchura constante es

$$Vy = \text{const}$$

y la ecuación de continuidad para el flujo compresible en un tubo de sección constante es

$$V\rho = \text{const}$$

La densidad $\rho$ en un fluido compresible y la profundidad $y$ de un canal abierto son análogas.

La misma analogía existe en la ecuación de la energía. La ecuación de la energía para un canal abierto horizontal de anchura constante, despreciando el rozamiento, es

$$\frac{V^2}{2g} + y = \text{const}$$

Diferenciando

$$V\,dV + g\,dy = 0$$

Sustituyendo $V_c = \sqrt{gy}$ para eliminar $g$,

$$V\,dV + V_c^2\frac{dy}{y} = 0$$

que se puede comparar con la ecuación de la energía para flujo compresible [Ec. (6.3.4)]

$$V\,dV + c^2\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Las dos velocidades críticas $V_c$ y $c$ son análogas y, por consiguiente, $y$ y $\rho$ son análogas.

Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento en un pequeño cambio de profundidad en el flujo de un canal horizontal y abierto, y en un brusco cambio de densidad en un flujo compresible, puede de nuevo demostrarse que la densidad y la profundidad del canal abierto son análogas. De hecho, la analogía es entre el número de Froude y el de Mach.

Análogo a la onda normal de choque es el resalto hidráulico, que origina un brusco cambio en la velocidad y en la profundidad y un cambio en el número de Froude de mayor a menor que la unidad. Análogo a la onda oblicua de choque y a las ondas de enrarecimiento en el flujo de gases son las ondas oblicuas líquidas producidas en un canal por los cambios en la dirección de las paredes del canal o por los cambios de altura de la solera.

Un cuerpo situado en un canal abierto con flujo para un número de Froude mayor que la unidad origina ondas sobre la superficie análogas a las ondas de choque y de enrarecimiento sobre un cuerpo semejante (bidimensional) en un túnel aerodinámico supersónico. Los aumentos de profundidad son análogos a ondas de choque de compresión y las disminuciones de profundidad son análogas a las ondas de enrarecimiento. Para estudiar las situaciones de flujo supersónico se utilizan depósitos de agua poco profundos llamados depósitos de olas, o mesas de agua.

## Problemas

*6.1* Tres kilos masa de un gas perfecto de peso molecular 36 aumentan 2° C su temperatura cuando se realizan 650 kgm de trabajo sobre ella en una cámara aislada, de volumen constante. Determinar $c_v$ y $c_p$.

*6.2* Un gas de peso molecular 48 tiene $c_p = 0{,}372$. ¿Qué valor tiene $c_v$ para este gas?

*6.3* Calcular la relación de calores específicos $k$ para los Problemas 6.1 y 6.2.

*6.4* La entalpía de cierto gas aumenta 0,4 kcal/kg$_m$ °K al añadirle calor a presión constante, y su energía interna aumenta 0,3 kcal/kg$_m$ °K si el calor se añade manteniendo constante su volumen. Calcular el peso molecular.

*6.5* Calcular la variación de entalpía de 3 kg$_m$ de óxido de carbono, cuando pasa de $p_1 = 2$ kg/cm² de presión absoluta y $T_1 = 4°$ C a $p_2 = 4$ kg/cm² de presión absoluta y $T_2 = 170°$ C.

*6.6* Calcular la variación de entropía en el Problema 6.5.

*6.7* A partir de la Ec. (6.1.13) y de la ley de los gases perfectos, deducir la ecuación de estado para flujo isoentrópico.

*6.8* Calcular la variación de entalpía por UTM cuando el helio pasa de $T_1 = 0°$ C, $p_1 = 1$ kg/cm (abs) a $T_2 = 100°$ C mediante un proceso isoentrópico.

*6.9* En un proceso isoentrópico 3 kg$_m$ de oxígeno con un volumen de 135 l a 15° C doblan su presión absoluta. ¿Cuál es la temperatura final?

*6.10* Deducir la expresión de la variación de la densidad con la temperatura para un proceso politrópico reversible.

*6.11* Hidrógeno a 3 kg/cm² y 0° C aumenta su temperatura a 50° C según un proceso politrópico reversible con $n = 1{,}20$. Calcular la presión final.



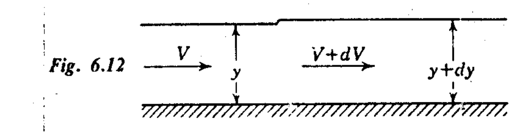


Fig. 6.12

*6.12* La densidad de un gas disminuye el 10 por 100 en un proceso politrópico reversible, cuando su temperatura pasa de 50° C a 4° C. Calcular el exponente $n$ de dicho proceso.

*6.13* Un proyectil se mueve en agua a 25° C con una velocidad de 900 m/seg. ¿Cuál es su número de Mach?

*6.14* Si un avión vuela a 1300 km/h al nivel del mar, donde $p = 1{,}033$ kg/cm² y $t = 20°$ C, y a la misma velocidad en la estratosfera donde $t = -53°$ C, ¿cuánto mayor es el número de Mach en el último caso?

*6.15* ¿Cuál es la velocidad del sonido en hidrógeno a 25° C?

*6.16* Deducir la ecuación de la velocidad de una ola pequeña en un líquido en un canal abierto utilizando los métodos de la Sec. 6.2 para la determinación de la velocidad del sonido (Figura 6.12).

*6.17* Usando la ecuación de la energía

$$V\,dV + \frac{dp}{\rho} + d\,(\text{pérdidas}) = 0$$

la ecuación de continuidad para una tubería $\rho V =$ constante, y $c = \sqrt{dp/d\rho}$, demostrar que en el flujo subsónico en una tubería la velocidad debe aumentar en la dirección de aguas abajo.

*6.18* En cierto tramo de una tubería tiene lugar un flujo isoentrópico de aire, siendo $p = 3$ kg/cm² (abs), $t = 32°$ C y $V = 165$ m/seg. Se sumerge un objeto en el flujo, pasando a cero la velocidad del flujo en la proa del objeto. ¿Cuáles son la temperatura y la presión en el punto de estancamiento?

*6.19* ¿Cuál es el número de Mach del flujo del Problema 6.18?

*6.20* ¿Cómo se comparan la temperatura y la presión en el punto de estancamiento en flujo isoentrópico con las condiciones en el depósito?

*6.21* Fluye aire desde un depósito a 70° C y 7 kg/cm² absolutos. Suponiendo flujo isoentrópico calcular la velocidad, la presión, la temperatura y la densidad en una sección donde **M** = 0,60.

*6.22* Desde un recipiente, donde $p_0 = 10$ kg/cm² (abs), $t_0 = 15°$ C, fluye oxígeno a través de una tubería de 15 cm de diámetro con una velocidad de 180 m/seg. Suponiendo el flujo isoentrópico, calcular el caudal en masa, el número de Mach, la presión y la temperatura en la sección de 15 cm.

*6.23* Desde una tobera convergente de 12 mm de diámetro fluye helio a su máxima velocidad para las condiciones del depósito que son $p = 4$ kg/cm² (abs), $t = 25°$ C. ¿Qué limitaciones tiene la presión aguas abajo? Calcular el caudal en masa y la velocidad del gas en la tobera.

*6.24* El aire contenido en un recipiente a 25 kg/cm² (abs), $t = 140°$ C, fluye a través de una tobera convergente-divergente de 5 cm de diámetro en la sección de garganta. Para **M** = 1 en la garganta, calcular en esta sección $p$, $\rho$ y $T$.

*6.25* ¿Cuáles deben ser la velocidad, presión, densidad, temperatura y diámetro en una sección recta de la tobera del Prob. 6.24 donde **M** = 2,4?

***6.26*** El nitrógeno en flujo sónico a través de una sección de garganta de 2,5 cm de diámetro tiene una presión absoluta de 0,6 kg/cm², $t = -18°$ C. Determinar el caudal en masa.

***6.27*** ¿Cuál es el número de Mach para el Prob. 6.26 en una sección de diámetro 4 cm en flujo supersónico y en flujo subsónico?

***6.28*** ¿Qué diámetro de sección de garganta se necesita para un flujo crítico de 0,2 $kg_m$/seg de óxido de carbono, desde un recipiente donde $p = 20$ kg/cm² (abs), $t = 38°$ C?

***6.29*** Se quiere diseñar una tobera supersónica para un flujo de aire con $\mathbf{M} = 3$ en la sección de salida, de 20 cm de diámetro, y donde la presión absoluta es $p =$ 0,1 kg/cm² la temperatura $-85°$ C. Calcular la sección de garganta y las condiciones en la recámara.

***6.30*** En el Prob. 6.29 calcular el diámetro de la sección recta para $\mathbf{M} = 1,5$, 2,0 y 2,5.

***6.31*** Para las condiciones $p_0 = 10$ kg/cm² (abs), $t_0 = 50°$ C del depósito, el aire fluye a través de un tubo convergente-divergente con diámetro de la garganta 75 mm y con un número de Mach máximo de 0,80. Determinar el caudal en masa del flujo y el diámetro, presión, velocidad y temperatura en la salida donde $\mathbf{M} = 0,50$.

***6.32*** Calcular la velocidad de salida y el caudal en masa de nitrógeno que desde una recámara, donde $p = 4$ kg/cm² (abs), $t = 27°$ C, fluye a través de una tobera convergente de 5 cm de diámetro, hacia la atmósfera.

***6.33*** Reducir la Ec. (6.3.25) a su forma para flujo de aire. Representar $p/p_0$ en función de $A^*/A$ para el intervalo de $p/p_0$ comprendido entre 0,98 y 0,02.

***6.34*** Utilizando el diagrama del Prob. 6.33, hallar las dos relaciones de presiones para $A^*/A = 0,50$.

***6.35*** En un conducto convergente-divergente en flujo supersónico de hidrógeno, el diámetro de la garganta es 50 mm. Determinar las relaciones de presión $p/p_0$ en los conductos convergente y divergente donde el diámetro sea 56 mm.

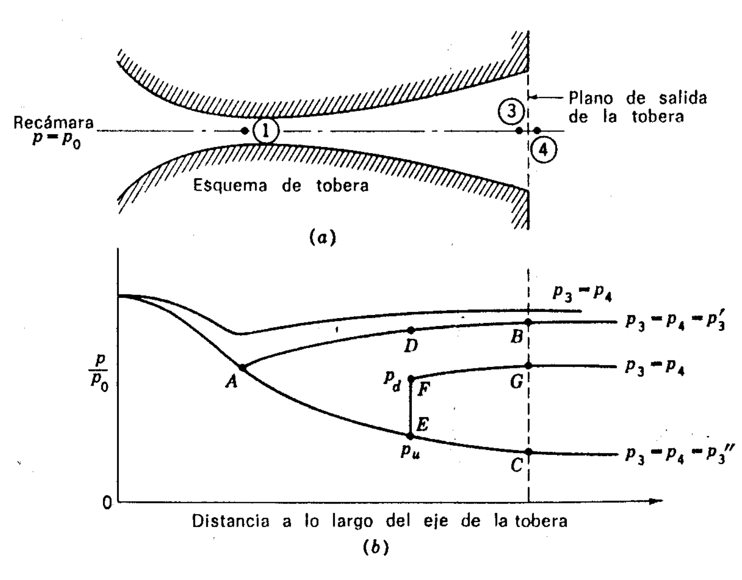



*Fig. 6.13*



***6.36*** En un conducto que transporta aire tiene lugar una onda de choque, siendo las condiciones aguas arriba de la misma: el número de Mach igual a 2,0, la temperatura 15° C y la presión absoluta 0,2 kg/cm². Calcular el número de Mach, la presión, la temperatura y la velocidad después de la onda de choque.

***6.37*** Demostrar que ha aumentado la entropía a través de la onda de choque del Problema 6.36.

***6.38*** Las condiciones inmediatamente antes de una onda de choque normal en un flujo de aire son $p_u = 0,4$ kg/cm² (abs), $t_u = 38°$ C, $V_u = 550$ m/seg. Encontrar $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{M}_d$, $p_d$ y $t_d$, donde el subíndice $d$ se refiere a las condiciones justamente aguas abajo de la onda de choque.

***6.39*** Para $A = 160$ cm² en el Prob. 6.38, calcular el aumento de entropía a través de la onda de choque en kcal/seg °K.

***6.40*** Deducir a partir de las Ecs. (6.3.1), (6.3.4) y (6.3.5) que en la garganta de una tobera convergente-divergente (De Laval), punto 1 de la Fig. 6.13*a*, $dp = 0$, $d\rho = 0$ para $\mathbf{M} \neq 1$ (ver la Fig. 6.13*b*). ¿Son cero estas diferenciales para $\mathbf{M} = 1$? Explicarlo.

***6.41*** Justificar partiendo de las Ecs. (6.3.1), (6.3.4) y (6.3.5) las pendientes de las curvas de la Fig. 6.13*b*. No considerar *EFG*.

***6.42*** Para la tobera descrita a continuación, trazar las curvas *ADB* y *AEC* (Fig. 6.13*b*). (*Sugerencias*: Determinar solamente un punto intermedio. Utilizar la sección VI.) El depósito tiene aire a 3,5 kg/cm² (abs) y 35° C cuando en la garganta se obtienen las condiciones sónicas.

| Sección | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X *Salida* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia aguas abajo desde la garganta, mm | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 |
| $A/A^*$ ($A^* = 28,17$ cm²) | 1,030 | 1,050 | 1,100 | 1,133 | 1,168 | 1,200 | 1,239 | 1,269 | 1,310 | 1,345 |

***6.43*** Utilizando los datos del Prob. 6.42 determinar $p_3/p_0$ cuando se produce una onda de choque normal en la sección VI.

***6.44*** ¿Se puede producir una discontinuidad en el flujo en la sección VI del Prob. 6.42 de manera que el camino que siga el flujo sea *ADFG* de la Fig. 6.13*b*? (*Sugerencia*: Determinar las variaciones de entropía.)

***6.45*** ¿Cuánto vale $p_3/p_0$ cuando se produce una onda de choque normal exactamente en el interior de la salida de la tobera? (*Sugerencia*: $p_d = p_4$ y $p_u = p_3$ para el flujo isoentrópico hasta la sección VI del Problema 6.42.)

***6.46*** Sugerir lo que debe ocurrir exactamente en el exterior de la tobera si hay una presión $p_4$ superior a aquella con que el gas fluye isoentrópicamente a través de la tobera dentro del recipiente de salida, punto *C* de la Fig. 6.13*b*, pero menor que aquella para la cual es posible una onda de choque normal en la salida de la tobera (ver el Problema 6.45).

***6.47*** Discutir lo que ocurre dentro y fuera de la tobera si la presión en el recipiente de salida es menor que la del punto *C* de la Fig. 6.13*b*.

***6.48*** Demostrar, a partir de las ecuaciones de la Sec. 6.6, que la temperatura,

la presión y la densidad disminuyen en el flujo real y adiabático por un conducto para condiciones subsónicas y aumentan para condiciones supersónicas.

*6.49* ¿Qué longitud de un conducto aislado de 100 mm de diámetro y $f = 0{,}012$ se necesita cuando entra oxígeno a $\mathbf{M} = 3$ y sale a $\mathbf{M} = 2$?

*6.50* Entra aire en una tubería aislada a $\mathbf{M} = 0{,}4$ y sale a $\mathbf{M} = 0{,}6$. ¿Qué parte de la longitud del conducto se necesita para que el flujo sea a $\mathbf{M} = 0{,}5$?

*6.51* Determinar la longitud máxima, sin choque, para flujo adiabático de aire en un conducto de 100 mm de diámetro y $f = 0{,}025$ cuando las condiciones aguas arriba son $t = 50°$ C, $V = 200$ m/seg, $p = 2$ kg/cm² (abs). ¿Cuáles son la presión y la temperatura a la salida?

*6.52* ¿Cuál es el diámetro mínimo del conducto, aislado térmicamente, necesario para transportar 1 $kg_m$/seg de nitrógeno a través de 300 m? Aguas arriba la temperatura es de 27° C y la velocidad 60 m/seg. $f = 0{,}020$.

*6.53* Hallar las presiones aguas arriba y aguas abajo en el Problema 6.52.

*6.54* ¿Cuál es el máximo caudal en masa de aire que a partir de un recipiente, donde $t = 15°$ C, fluye a través de 6 m de tubería de 2,5 cm de diámetro y aislada térmicamente, $f = 0{,}020$, desaguando en la atmósfera? $p = 1{,}033$ kg/cm² (abs).

*6.55* En flujo de oxígeno sin rozamiento a través de un conducto se mantienen las condiciones siguientes en la entrada y salida: $V_1 = 90$ m/seg, $t_1 = 25°$ C, $\mathbf{M}_2 = 0{,}4$. Hallar la altura que se aumenta por UTM y la relación de presiones $p_1/p_2$.

*6.56* A través de una tubería de 10 cm penetra un flujo sin rozamiento de aire de 0,15 $kg_m$/seg en las condiciones $t = 0°$ C, $p = 0{,}7$ kg/cm² (abs). ¿Cuánto calor, medido en kilocalorías por kilogramo masa, puede añadirse sin que se produzca el estrangulamiento del flujo.

*6.57* El flujo sin rozamiento a través de un conducto con transmisión de calor da lugar a que el número de Mach disminuya de 2 a 1,75. $k = 1{,}4$. Determinar las relaciones de temperaturas, velocidades, presiones y densidades.

*6.58* En el Prob. 6.57 el conducto es de sección cuadrada de 5 cm de lado, $p_1 = 1$ kg/cm² (abs) y $V_1 = 600$ m/seg. Calcular el caudal en masa si el gas que circula es aire.

*6.59* ¿Cuánto calor se debe transferir por kilogramo masa para que el número de Mach aumente de 2 a 2,8 en un conducto sin rozamiento que transporta aire? $V_1 = 450$ m/seg.

*6.60* A través de un conducto sin rozamiento de 5 cm de diámetro fluye oxígeno a $V_1 = 480$ m/seg, $p = 0{,}85$ kg/cm² (abs), $t = -7°$ C. ¿Qué cantidad de calor por kilogramo masa es necesario transferir para alcanzar las condiciones sónicas en la sección de salida?

*6.61* Comprobar las variaciones de la densidad, presión y velocidad dadas en la Sec. 6.8, en la tabla de variaciones de las propiedades del flujo.

*6.62* Aplicar el primer principio de la termodinámica, Ec. (3.8.8), al flujo isotérmico de un gas perfecto en una tubería horizontal, y desarrollar una expresión para el calor aportado por UTM en movimiento.

*6.63* A través de una tubería horizontal de $f = 0{,}02$ y diámetro 75 mm fluye aire a temperatura constante. A la entrada $V_1 = 90$ m/seg, $t = 50°$ C, $p_1 = 2$ kg/cm² (abs). ¿Cuál es la longitud máxima de esta tubería para este flujo, y cuánto calor se transmite al aire por kilogramo masa?

*6.64* A través de una tubería de 2,5 cm de diámetro fluye aire a la temperatura constante de 15° C. En la sección de entrada $V_1 = 60$ m/seg y en la salida $V_2 = 90$ m/seg. $f = 0{,}016$. ¿Cuál es la longitud de la tubería?



*6.65* Si la presión a la entrada de la tubería del Prob. 6.64 es 1,4 kg/cm² (abs), ¿cuál será la presión a la salida y cuál será el calor transferido a la tubería por segundo?

*6.66* Por una tobera convergente y a $\mathbf{M} = 1$, $p = 0{,}3$ kg/cm² (abs), $t = -30°$ C entra en una tubería hidrógeno. Determinar, para el caso de flujo isotérmico, la longitud máxima de la tubería, medida en diámetros, y la variación que sufre la presión a lo largo de dicha longitud. $f = 0{,}010$.

*6.67* Desde un depósito a presión, $p = 140$ kg/cm² (abs), fluye oxígeno a temperatura constante de 20° C, a través de un tubo de diámetro interior 3 mm y longitud 3 m a otro depósito donde $p = 110$ kg/cm² (abs). $f = 0{,}010$. Determinar el caudal en masa.

*6.68* En flujo isotérmico se transfiere 1 $kg_m$/seg de nitrógeno a 27° C desde un depósito donde $p = 14$ kg/cm² (abs) a otro depósito, donde $p = 11$ kg/cm² (abs), y que dista del primero 30 m. ¿Cuál es el diámetro mínimo de tubería, $f = 0{,}016$, necesario?

*6.69* El calor específico a volumen constante se define mediante

(*a*) $kc_p$ (*b*) $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p$ (*c*) $\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_v$ (*d*) $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$

(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*6.70* El calor específico a presión constante, para un gas perfecto, *no* viene dado por

(*a*) $kc_v$ (*b*) $(\partial h/\partial T)_p$ (*c*) $(h_2 - h_1)/(T_2 - T_1)$
(*d*) $[\Delta u + \Delta(p/\rho)]/\Delta t$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*6.71* Para un gas perfecto, la entalpía

(*a*) aumenta siempre debido a las pérdidas;
(*b*) depende solo de la presión;
(*c*) depende solo de la temperatura;
(*d*) puede aumentar mientras disminuye la energía interna;
(*e*) no satisface ninguna de las respuestas anteriores.

*6.72* Las siguientes clases de sustancias se pueden considerar gases perfectos:

(*a*) fluidos ideales;
(*b*) vapor saturado, vapor de agua y aire;
(*c*) fluidos con módulo de elasticidad volumétrico constante;
(*d*) vapor de agua, hidrógeno y nitrógeno a baja presión;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*6.73* $c_p$ y $c_v$ están relacionados por

(*a*) $k = c_p/c_v$ (*b*) $k = c_p c_v$ (*c*) $k = c_v/c_p$ (*d*) $c_p = c_v^k$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*6.74* Si $c_p = 0{,}30$ kcal/$kg_m$ °K y $k = 1{,}66$, $c_v$ en kgm/UTM °C es

(*a*) 0,582 (*b*) 1452 (*c*) 4520 (*d*) 7500 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

6.75 Si $c_p = 0{,}30$ kcal/kg$_m$ °K y $k = 1{,}33$, la constante del gas en kcal/kg$_m$ °K es

(a) 0,075 (b) 0,099 (c) 0,399 (d) 0,699 (e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.76 $R = 34$ kgm/kg$_m$ °K y $c_p = 0{,}279$ kcal/kg$_m$ °C. El exponente isoentrópico $k$ es

(a) 1,2 (b) 1,33 (c) 1,66 (d) 1,89 (e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.77 La relación de calores específicos viene dada por

(a) $\dfrac{1}{1 - R/c_p}$ (b) $1 + \dfrac{c_v}{R}$ (c) $\dfrac{c_p}{c_v} + R$ (d) $\dfrac{1}{1 - c_v/R}$

(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.78 La variación de entropía para un gas perfecto es

(a) siempre positiva;
(b) función solo de la temperatura;
(c) $(\Delta q_H/T)_{rev}$
(d) una propiedad termodinámica que depende de la temperatura y la presión;
(e) una función de la energía interna únicamente.

6.79 Un proceso isoentrópico es siempre

(a) irreversible y adiabático;
(b) reversible e isotérmico;
(c) sin rozamiento y adiabático;
(d) sin rozamiento e irreversible;
(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.80 La relación $p = \text{const}\ \rho^k$ se cumple solo para los procesos

(a) reversibles politrópicos;
(b) isoentrópico;
(c) isotérmico sin rozamiento;
(d) adiabático irreversible;
(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.81 El proceso politrópico reversible es

(a) adiabático sin rozamiento;
(b) dado por $p/\rho = \text{const}$;
(c) dado por $p\rho^k = \text{const}$;
(d) dado por $p/\rho^n = \text{const}$;
(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.82 Un proceso politrópico reversible puede darse mediante

(a) $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1}$ (b) $\dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n}$ (c) $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{n-1}$

(d) $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{(n-1)/n}$ (e) ninguna de las respuestas anteriores.



6.83 En un proceso politrópico reversible

(a) se produce algún intercambio de calor;
(b) la entropía permanece constante;
(c) la entalpía permanece constante;
(d) la energía interna permanece constante;
(e) la temperatura permanece constante.

6.84 La ecuación diferencial de la energía en flujo isoentrópico puede tener la forma

(a) $dp + d(\rho V^2) = 0$

(b) $\dfrac{dV}{V} + \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{dA}{A} = 0$

(c) $2V\,dV + \dfrac{dp}{\rho} = 0$

(d) $V\,dV + \dfrac{dp}{\rho} = 0$

(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.85 Elegir la expresión que *no* da la velocidad de una onda sonora:

(a) $\sqrt{kRT}$ (b) $\sqrt{p/\rho}$ (c) $\sqrt{dp/d\rho}$ (d) $\sqrt{kp/\rho}$
(e) $\sqrt{K/\rho}$

6.86 La velocidad de una onda sonora en un gas es análoga a

(a) la velocidad del flujo en un canal abierto;
(b) la velocidad de una onda elemental en un canal abierto;
(c) el cambio de profundidad en un canal abierto;
(d) la velocidad de una perturbación que se desplaza hacia aguas arriba en un líquido en movimiento;
(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.87 La velocidad del sonido en el agua, en m/seg, en condiciones normales es aproximadamente

(a) 140 (b) 340 (c) 1400 (d) 3400 (e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.88 La velocidad del sonido en un gas ideal varía directamente con

(a) la densidad;
(b) la presión absoluta;
(c) la temperatura absoluta;
(d) el módulo de elasticidad volumétrico;
(e) ninguna de las respuestas anteriores.

6.89 Elegir el enunciado correcto con respecto al flujo sin rozamiento:

(*a*) En conductos divergentes la velocidad disminuye siempre.
(*b*) La velocidad es siempre sónica en la garganta de un tubo convergente-divergente.
(*c*) En flujo supersónico el área disminuye al aumentar la velocidad.
(*d*) No se puede sobrepasar la velocidad del sonido en la garganta de un tubo convergente-divergente.
(*e*) La velocidad es sónica para número de Mach cero.

***6.90*** En flujo isoentrópico la temperatura

(*a*) no puede sobrepasar la temperatura del depósito;
(*b*) no puede bajar, luego aumenta de nuevo aguas abajo;
(*c*) es independiente del número de Mach;
(*d*) es función solo del número de Mach;
(*e*) permanece constante en el flujo en un conducto.

***6.91*** La relación crítica de presiones para flujo isoentrópico del monóxido de carbono es

(*a*) 0,528 (*b*) 0,634 (*c*) 0,833 (*d*) 1,0 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***6.92*** Elegir la proposición correcta con respecto al flujo a través de una tobera convergente-divergente.

(*a*) Cuando el número de Mach a la salida es mayor que la unidad no se produce ninguna onda de choque en la tobera.
(*b*) Cuando se sobrepasa la relación de presiones crítica el número de Mach en la garganta es mayor que la unidad.
(*c*) Para velocidad sónica en la garganta una y solo una presión o velocidad pueden presentarse en una sección dada de aguas abajo.
(*d*) El número de Mach en la garganta es siempre mayor que la unidad.
(*e*) La densidad aumenta en la dirección de aguas abajo a través de la porción convergente de la tobera.

***6.93*** En una onda de choque normal en un flujo unidimensional la

(*a*) velocidad, presión y densidad aumentan;
(*b*) presión, densidad y temperatura aumentan;
(*c*) velocidad, temperatura y densidad aumentan;
(*d*) presión, densidad y cantidad de movimiento por unidad de tiempo aumentan;
(*e*) la energía mecánica permanece constante.

***6.94*** Una onda de choque normal

(*a*) es reversible;
(*b*) puede presentarse en una tobera convergente;
(*c*) es sin rozamiento;
(*d*) es isoentrópica;
(*e*) no es ninguna de las anteriores.

***6.95*** Una onda de choque es análoga a

(*a*) una onda elemental en un líquido en reposo;



(*b*) un resalto hidráulico;
(*c*) las condiciones en un canal abierto cuando **F** < 1;
(*d*) flujo de un líquido a través de una tobera de expansión;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***6.96*** A través de una onda de choque normal en una tobera convergente-divergente para flujo adiabático son válidas las relaciones siguientes:

(*a*) ecuaciones de continuidad y de la energía, ecuación de estado y relación isoentrópica;
(*b*) ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento, ecuación de estado y relación isoentrópica;
(*c*) ecuaciones de continuidad, de la energía y de la cantidad de movimiento, ecuación de estado;
(*d*) ecuación de estado, relación isoentrópica, ecuación de la cantidad de movimiento y principio de conservación de la masa;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***6.97*** A través de una onda de choque hay un aumento en

(*a*) $p$, **M**, $s$ (*b*) $p$, $s$, disminución en **M** (*c*) $p$, disminución en $s$, **M** (*d*) $p$, **M**, ningún cambio en $s$ (*e*) $p$, **M**, $T$

***6.98*** Se obtiene una línea de Fanno de las ecuaciones siguientes:

(*a*) cantidad de movimiento y continuidad;
(*b*) energía y continuidad;
(*c*) cantidad de movimiento y energía;
(*d*) cantidad de movimiento, continuidad y energía;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***6.99*** Se obtiene una línea de Rayleigh a partir de las ecuaciones siguientes:

(*a*) cantidad de movimiento y continuidad;
(*b*) energía y continuidad;
(*c*) cantidad de movimiento y energía;
(*d*) cantidad de movimiento, continuidad y energía;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***6.100*** Elegir el enunciado correcto que corresponde a una línea de Fanno o de Rayleigh:

(*a*) Dos puntos con el mismo valor de entropía representan condiciones antes y después de una onda de choque.
(*b*) $pV$ se mantiene constante a lo largo de la línea.
(*c*) El número de Mach aumenta siempre con la entropía.
(*d*) La parte subsónica de la curva tiene entalpía mayor que la parte supersónica.
(*e*) El Mach 1 está situado en el punto de entalpía máxima.

***6.101*** Estrangulamiento del flujo en una tubería significa que

(*a*) se ha cerrado una válvula;
(*b*) se ha producido una limitación en el flujo;
(*c*) no se puede producir el caudal de masa específico;

(*d*) siempre aparecen ondas de choque;
(*e*) se ha presentado flujo supersónico en algún punto.

***6.102*** En flujo adiabático subsónico con rozamiento en una tubería

(*a*) $V$, **M**, $s$ aumentan; $p$, $T$, $\rho$ disminuyen;
(*b*) $p$, $V$, **M** aumentan; $T$, $\rho$ disminuyen;
(*c*) $p$, **M**, $s$ aumentan; $V$, $T$, $\rho$ disminuyen;
(*d*) $\rho$, **M**, $s$ aumentan; $V$, $T$, $p$ disminuyen;
(*e*) $T$, $V$, $s$ aumentan; **M**, $p$, $\rho$ disminuyen.

***6.103*** En flujo adiabático supersónico con rozamiento en una tubería

(*a*) $V$, **M**, $s$ aumentan; $p$, $T$, $\rho$ disminuyen;
(*b*) $p$, $T$, $s$ aumentan; $\rho$, $V$, **M** disminuyen;
(*c*) $p$, **M**, $s$ aumentan; $V$, $T$, $\rho$ disminuyen;
(*d*) $p$, $T$, $\rho$, $s$ aumentan; $V$, **M** disminuyen;
(*e*) $p$, $\rho$, $s$ aumentan; $V$, **M**, $T$ disminuyen.

***6.104*** Elegir el enunciado correcto que corresponde al flujo en un conducto sin rozamiento con transmisión de calor:

(*a*) Añadiendo calor al flujo supersónico aumenta el número de Mach.
(*b*) Añadiendo calor al flujo subsónico aumenta el número de Mach.
(*c*) Enfriando el flujo supersónico disminuye el número de Mach.
(*d*) La línea de Fanno es válida para analizar el flujo.
(*e*) La temperatura isoentrópica de estancamiento permanece constante a lo largo de la tubería.

***6.105*** Elegir las variaciones correctas en las propiedades del flujo para flujo en un conducto sin rozamiento con transferencia de calor a la tubería, $\mathbf{M} < 1$:

(*a*) $p$, $V$ aumentan; $\rho$, $T$, $T_0$ disminuyen;
(*b*) $V$, $T_0$ aumentan; $p$, $\rho$ disminuyen;
(*c*) $p$, $\rho$, $T$ aumentan; $V$, $T_0$ disminuyen;
(*d*) $V$, $T$ aumentan; $p$, $\rho$, $T_0$ disminuyen;
(*e*) $T_0$, $V$, $\rho$ aumentan; $p$, $T$ disminuyen.

***6.106*** Elegir las variaciones correctas al enfriar el flujo en un conducto sin rozamiento, $\mathbf{M} > 1$:

(*a*) $V$ aumenta; $p$, $\rho$, $T$, $T_0$ disminuyen;
(*b*) $p$, $V$ aumentan; $\rho$, $T$, $T_0$ disminuyen;
(*c*) $p$, $\rho$, $V$ aumentan; $T$, $T_0$ disminuyen;
(*d*) $p$, $\rho$ aumentan; $V$, $T$, $T_0$ disminuyen;
(*e*) $V$, $T$, $T_0$ aumentan; $p$, $\rho$ disminuyen.

***6.107*** En flujo permanente isotérmico en tuberías largas, el valor significativo de **M** para determinar las variaciones en las propiedades del flujo es

(*a*) $1/k$ (*b*) $1/\sqrt{k}$ (*c*) 1 (*d*) $\sqrt{k}$ (*e*) $k$

***6.108*** Elegir las variaciones correctas en las propiedades del fluido para flujo isotérmico en conductos con $\mathbf{M} < 0,5$:



(*a*) $V$ aumenta; **M**, $T_0$, $p$, $p_0$, $\rho$ disminuyen;
(*b*) $V$, **M** aumentan; $T_0$, $p$, $p_0$, $\rho$ disminuyen;
(*c*) $V$, **M**, $T_0$ aumentan; $p$, $p_0$, $\rho$ disminuyen
(*d*) $V$, $T_0$ aumentan; **M**, $p$, $p_0$, $\rho$ disminuyen
(*e*) $V$, **M**, $p_0$, $T_0$ aumentan; $p$, $\rho$ disminuyen.

## Referencias

Cambel, A. B., y B. H. Jennings: «Gas Dynamics», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.
Hunsaker, J. C., y B. G. Rightmire: «Engineering Applications of Fluid Mechanics», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1947.
Keenan, J. H., y E. P. Neumann: Measurements of Friction in a Pipe for Subsonic and Supersonic Flow of Air, *J. Appl. Mech.*, vol. 13, n.º 2, pág. A-91, 1946.
Liepmann, H. W., y A. Roshko: «Elements of Gas Dynamics», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.
Prandtl, L.: «Fluid Dynamics», Hafner Publishing Company, Inc., Nueva York, 1952.
Shapiro, A. H.: «The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow», vol. I, The Ronald Press Company, Nueva York, 1953.
———, W. R. Hawthorne y G. M. Edelman: «The Mechanics and Thermodynamics of Steady One-dimensional Gas Flow with Tables for Numerical Solutions», Meteor Report 14, Bureau of Ordnance Contract NOrd 9661, Dic. 1, 1947.

# 7

# *Flujo de un fluido ideal*

En los capítulos precedentes la mayoría de los cálculos se han desarrollado para flujo unidimensional, es decir, para un flujo en el que se supone que la velocidad media en cada sección recta es la velocidad de todos sus puntos, despreciándose las variaciones de velocidad a lo largo de la sección. Sin embargo, muchos problemas del flujo fluido requieren un conocimiento más exacto de la distribución de velocidades y presiones a lo largo de las superficies de contorno curvadas de un ala de avión, a través de los pasos de una bomba o un compresor, o sobre la cresta de una presa. El conocimiento del flujo bi y tridimensional de un fluido incompresible no viscoso proporciona al estudiante una aproximación mucho más real de la mayor parte de las verdaderas situaciones del flujo de fluidos. También hay analogías que permiten aplicar los mismos métodos al flujo a través de medios porosos.

En este capítulo se desarrollan los principios del flujo irrotacional de un fluido ideal y se aplican a casos elementales de flujo. Una vez establecidas las condiciones del flujo, se introduce el operador vectorial $\nabla$, se deduce la ecuación de Euler, y se define el potencial de velocidad. Después se integra la ecuación de Euler para obtener la ecuación de Bernoulli y se desarrollan las funciones de corriente y las condiciones de contorno. Por último se estudian casos de flujo en tres y dos dimensiones.

## 7.1 *Requisitos para el flujo de un fluido ideal*

La hipótesis de Prandtl (Sec. 5.6) establece que para fluidos de pequeña viscosidad los efectos de ésta son apreciables solo en una estrecha zona, próxima a los contornos del fluido. Para flujos en los que la capa límite es muy delgada, los resultados que se obtengan suponiendo que se trata del flujo de un fluido ideal pueden aplicarse al flujo de un fluido real con suficiente aproximación. Los flujos convergentes o acelerados tienen generalmente capas límites delgadas, pero en los flujos decelerados pueden existir el fenómeno de separación de la capa límite y producción de una estela de remolinos que es difícil de estudiar analíticamente.

Un fluido ideal debe satisfacer los siguientes requisitos:



1. La ecuación de continuidad, Sec. 3.5, div $\mathbf{q} = 0$, o

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

2. El segundo principio del movimiento de Newton en todos los puntos y en todo instante.
3. No penetra el fluido dentro de cualquier contorno sólido ni se forman tampoco oquedades entre el fluido y el contorno.

Si, además de los requisitos 1, 2 y 3, se admite la hipótesis de que el flujo es irrotacional, el movimiento fluido resultante se semeja al movimiento de un fluido real en el caso de fluidos de pequeña viscosidad, fuera de la capa límite.

Usando las condiciones anteriores, la aplicación del segundo principio de Newton a una partícula fluida conduce a las ecuaciones de Euler, que junto con el supuesto de flujo irrotacional pueden ser integradas para obtener la ecuación de Bernoulli. Las incógnitas en el caso del flujo de un fluido con contornos dados son la velocidad y la presión en cada punto. Desgraciadamente, en la mayoría de los casos es imposible llegar directamente, a partir de unas condiciones en los contornos dadas, a las ecuaciones de las distribuciones de las presiones y de las velocidades.

## 7.2 *El operador vectorial* $\nabla$

El operador vectorial $\nabla$ (pronúnciese «nabla»), que puede actuar sobre un vector como producto escalar o vectorial o puede actuar sobre una función escalar, es de la mayor utilidad para desarrollar la teoría del flujo de un fluido ideal.

Sea $U$ la magnitud sobre la que actúa el operador. El operador $\nabla$ se define mediante

$$\nabla U = \lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_S \mathbf{n}_1 U \, dS \tag{7.2.1}$$

$U$ se puede considerar como $\mathbf{a}$, $\times \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector cualquiera, o como un escalar, por ejemplo $\phi$. Consideremos un volumen $\mathcal{V}$ de superficie $S$ y un elemento de superficie $dS$. $\mathbf{n}_1$ es un vector unitario en la dirección de la normal $n$ exterior del elemento de superficie $dS$ (Fig. 7.1). Esta definición de operador se estudia a continuación para desarrollar los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional.

Cuando $U$ es un escalar, por ejemplo $\phi$, el *gradiente* de $\phi$ es

$$\text{grad}\ \phi = \nabla\phi = \lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_S \mathbf{n}_1 \phi \, dS \tag{7.2.2}$$

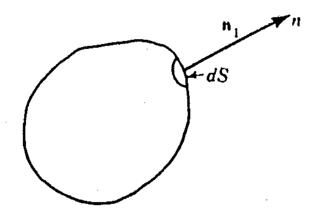



**Fig. 7.1** *Notación para el vector unidad* $\mathbf{n}_1$ *normal al elemento de área dS.*

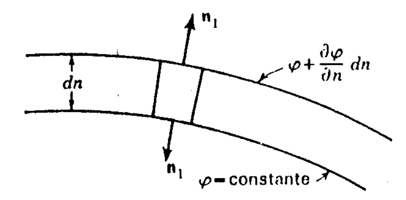



**Fig. 7.2** *Superficies de escalar* $\phi$ *constante.*

Para interpretar grad $\phi$, se considera el elemento de volumen como un prisma pequeño de área de la sección recta $dS$, de altura $dn$, con una base en la superficie $\phi(x,y,z) = c$ y la otra en la superficie

$$\phi + \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dn = \text{const}$$

(Fig. 7.2). Cuando no haya variación en $\phi$ en las superficies paralelas a las bases, por simetría, $\int \mathbf{n}_1 \phi \, dS$ extendida a la superficie curva del elemento se anula. Entonces

$$\int_S \mathbf{n}_1 \phi \, dS = \mathbf{n}_1 \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial n} dn - \phi\right) dS$$

y el segundo miembro de la Ec. (7.2.2) se convierte en

$$\lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{dS\, dn} \frac{\mathbf{n}_1 \partial \phi}{\partial n} dn\, dS = \mathbf{n}_1 \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

y

$$\text{grad}\, \phi = \nabla \phi = \mathbf{n}_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{7.2.3}$$

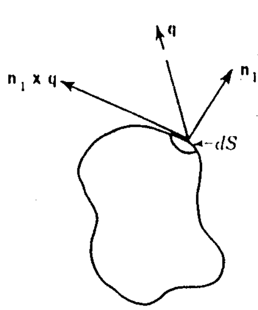
donde $\mathbf{n}_1$ es el vector unitario, normal a la superficie sobre la que $\phi$ sea constante, positivo en la dirección de $\phi$ creciente; grad $\phi$ es un vector.

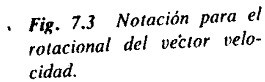
Considerando $U$ como el producto escalar con $\nabla$, se obtiene la *divergencia*. Sea $U \cdot \mathbf{q}$; entonces

$$\text{div}\, \mathbf{q} = \nabla \cdot \mathbf{q} = \lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_S \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{q}\, dS \tag{7.2.4}$$

Esta expresión se ha utilizado (en forma un tanto distinta) para deducir la ecuación general de continuidad en la Sec. 3.5. Es el flujo en volumen por unidad de volumen y de tiempo en un punto y es un escalar.





**Fig. 7.3** *Notación para el rotacional del vector velocidad.*

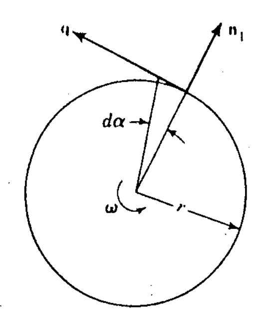



**Fig. 7.4** *Cilindro pequeño de fluido que gira como un sólido.*

El *rotacional* $\nabla \times \mathbf{q}$ es un concepto más difícil que está relacionado con la *vorticidad* o rotación de un elemento de fluido:

$$\text{rot}\, \mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{q} = \lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_S \mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}\, dS \tag{7.2.5}$$

Refiriéndonos a la Fig. 7.3, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}$ es la componente de velocidad tangente al elemento de superficie $dS$ en un punto, ya que el producto vectorial es un vector que forma un ángulo recto con el plano definido por los dos vectores constituyentes, cuando $n_1 = 1$ su módulo es $q$ sen $\theta$. Entonces $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}\, dS$ es un vector elemental que es el producto de la velocidad tangencial por el elemento de área de superficie. Integrado sobre la superficie, dividiendo por el volumen y tomando el límite cuando $\mathcal{V} \to 0$ se obtiene el rot $\mathbf{q}$ en un punto.

Para demostrar la relación entre rotacional y rotación se estudia un tipo especial de movimiento fluido. Sea un cilindro circular pequeño de fluido que gira respecto a su eje como si fuera un sólido (Fig. 7.4), con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, que es un vector paralelo al eje de rotación. El radio del cilindro es $r$ y la longitud $l$. En todo punto de la superficie curva $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}$ es un vector paralelo al eje y de módulo $q = \omega r$. En las bases el vector $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}$ es igual y opuesto en cada par de puntos correspondientes en cada una de ellas y, por tanto, no influye en el rotacional. Entonces, como $ds = lr\, d\alpha$,

$$\int_S \mathbf{n}_1 \times \mathbf{q}\, dS = \boldsymbol{\omega} \int_0^{2\pi} rlr\, d\alpha = 2\pi r^2 l \boldsymbol{\omega}$$

Entonces la Ec. (7.2.5) da

$$\text{rot}\, \mathbf{q} = \lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\pi r^2 l} 2\pi r^2 l \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$$

que demuestra que para la rotación del cuerpo sólido, el rotacional de la velocidad en un punto es dos veces el vector rotación. Si se considera la traslación pura de un elemento pequeño que se mueve como un sólido, entonces rot **q** es siempre cero. Como cualquier movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de una traslación y una rotación, se observa que el rotacional del vector velocidad es siempre el doble del vector rotación.

Sin embargo, un fluido puede no solo trasladarse y girar, sino también deformarse. Es aplicable la definición de rot **q**, y, por consiguiente, la *rotación de un fluido* en un punto se define mediante

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\text{rot}\,\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \mathbf{q} \qquad (7.2.6)$$

Cuando $\boldsymbol{\omega} = 0$ en algunas zonas de un fluido se dice que en ellas el movimiento es irrotacional. El vector vorticidad rot **q** tiene algunas características análogas al vector velocidad **q**. Las líneas vorticiales son siempre tangentes al vector vorticidad, y los tubos vorticiales, constituidos por las líneas vorticiales tangentes a una pequeña curva cerrada, siguen algunos principios de continuidad; por ejemplo, el producto de la vorticidad por el área del tubo debe permanecer constante a lo largo del tubo vorticial, o sea div (rot **q**) $= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{q}) = 0$.

El operador $\nabla$ actúa como un vector, pero se debe aplicar a un escalar o a un vector que tenga significado físico.

*Componentes escalares de las relaciones vectoriales*

Todo vector se puede descomponer en tres componentes según ejes perpendiculares dos a dos, por ejemplo, los ejes $x$-, $y$-, $z$-. La componente es un escalar, ya que solo se necesitan para definirla el módulo y el signo; $f_x = -3$ indica la componente en la dirección $x$ de un vector **f** que actúa en el sentido $-x$.

El vector se puede expresar en función de sus componentes escalares utilizando los vectores unitarios fijos **i**, **j**, **k** paralelos respectivamente a los ejes $x$-, $y$-, $z$-:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$$

Los vectores unitarios se combinan de la manera siguiente:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k} \qquad \text{etc.}$$

El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\cdot(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$



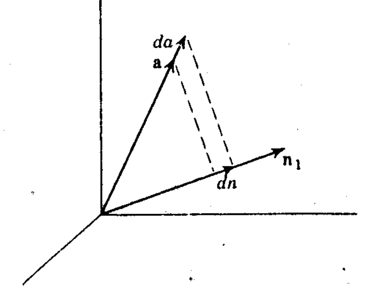



*Fig. 7.5 Variación del vector **a** que corresponde a una variación en la dirección normal.*

El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\times(\mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z) = \mathbf{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{k}(a_xb_y - a_yb_x)$$

Es conveniente escribirle en forma de determinante:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Para hallar las componentes escalares de $\nabla\phi$, consideremos en primer lugar $\mathbf{a}\cdot\nabla\phi$ (Fig. 7.5), donde **a** es un vector cualquiera. Según la Ec. (7.2.3)

$$\mathbf{a}\cdot\nabla\phi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1\frac{\partial\phi}{\partial n} = a\cos\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

donde $\theta$ es el ángulo que forman **a** y $\mathbf{n}_1$ y $n_1 = 1$. Una variación $da$ en el módulo de **a** corresponde a una variación en **n**, dada por $da\cos\theta = dn$, por consiguiente

$$a\cos\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial n} = a\frac{\partial\phi}{\partial a}$$

y

$$\mathbf{a}\cdot\nabla\phi = a\frac{\partial\phi}{\partial a} \qquad (7.2.7)$$

Las componentes escalares de $\nabla\phi$ son

$$\mathbf{i}\cdot\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad \mathbf{j}\cdot\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad \mathbf{k}\cdot\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

y

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{7.2.8}$$

El operador $\nabla$, en función de sus componentes escalares, es

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{7.2.8}$$

El producto escalar $\nabla\cdot\mathbf{q}$ se convierte en

$$\nabla\cdot\mathbf{q} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{7.2.10}$$

Como en la Sec. 3.5.

El producto vectorial $\nabla \times \mathbf{q}$, en componentes escalares, es

$$\nabla \times \mathbf{q} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w)$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7.2.11}$$

Las cantidades entre paréntesis son componentes de la vorticidad, que valen el doble de las componentes de la rotación $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$, de modo que

$$\nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{i}2\omega_x + \mathbf{j}2\omega_y + \mathbf{k}2\omega_z \tag{7.2.12}$$

### *7.3 Ecuación de Euler del movimiento*

En la Sec. 3.6 se dedujo la ecuación de Euler para el flujo permanente de un fluido sin rozamiento a lo largo de una línea de corriente. Aquí se hace la hipótesis de que el flujo es sin rozamiento y se supone un continuo. Se aplica el segundo principio de Newton del movimiento a una partícula de fluido de masa $\rho\,\delta\mathcal{V}$. Intervienen tres términos, la fuerza



másica, la fuerza superficial y la masa por la aceleración. Sea **F** la fuerza másica (tal como la gravedad) por unidad de masa que actúa sobre la partícula. Entonces $\mathbf{F}\rho\,\delta\mathcal{V}$ es la fuerza másica total. La fuerza superficial, según la sección anterior, es $-\int_S \mathbf{n}_1 p\, dS$ si el fluido es no viscoso y sin rozamiento, por tanto solo actúan fuerzas normales. El término de la masa por la aceleración es $\rho\,\delta\mathcal{V}\, d\mathbf{q}/dt$. Agrupando estos términos,

$$\mathbf{F}\rho\,\delta\mathcal{V} - \int_S \mathbf{n}_1 p\, ds = \rho\,\delta\mathcal{V}\frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

Dividiendo por la masa del elemento y tomando límites para $\delta\mathcal{V} \to 0$,

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\lim_{\delta\mathcal{V}\to 0}\frac{1}{\mathcal{V}}\int_S \mathbf{n}_1 p\, dS = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

Utilizando el operador $\nabla$,

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \tag{7.3.1}$$

Esta es la ecuación de Euler del movimiento en notación vectorial. Efectuando sucesivamente el producto escalar de cada término por **i**, **j** y **k** se obtienen las siguientes ecuaciones escalares componentes:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt}$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} \tag{7.3.2}$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt}$$

donde $X$, $Y$, $Z$ son las componentes de la fuerza másica por unidad de masa. Se pueden desarrollar los términos de aceleración. En general, $u = u(x,y,z,t)$, luego (ver el Apéndice B)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

La componente de la aceleración $a_x$ es la variación de $u$ por unidad de tiempo, o sea $du/dt$. Como la partícula se mueve $x$-, $y$-, $z$-, son funciones del tiempo $t$, y dividiendo la ecuación por $dt$ se obtiene

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Pero

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

y

$$\frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{7.3.3}$$

Análogamente

$$\frac{dv}{dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.3.4}$$

$$\frac{dw}{dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{7.3.5}$$

Si la fuerza externa es *conservativa*, se puede deducir de un potencial ($\mathbf{F} = -\text{grad}\ \Omega$):

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \tag{7.3.6}$$

En particular, si la única fuerza másica que actúa es la gravedad, $\Omega = gh$, con $h$ medida verticalmente hacia arriba; por tanto,

$$X = -g\frac{\partial h}{\partial x} \qquad Y = -g\frac{\partial h}{\partial y} \qquad Z = -g\frac{\partial h}{\partial z} \tag{7.3.7}$$

Teniendo en cuenta que $\rho$ es constante para un fluido ideal, al sustituir las Ecs. (7.3.3) a (7.3.7) en las Ecs. (7.3.2),

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{7.3.8}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.3.9}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{7.3.10}$$

Los tres primeros términos del segundo término de las ecuaciones son términos de «aceleración convectiva», que depende de los cambios de velocidad con el espacio. El último término es la «aceleración local», que depende del cambio de velocidad con el tiempo en un punto.



*Coordenadas naturales en el flujo bidimensional*

Las ecuaciones de Euler en dos dimensiones se obtienen a partir de las ecuaciones generales de las componentes haciendo $w = 0$ y $\partial/\partial z = 0$; por tanto,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{7.3.11}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.3.12}$$

Tomando los ejes $x$- e $y$- en ciertas direcciones particulares, las ecuaciones de Euler pueden reducirse a una forma que facilita su comprensión. Si el eje de las $x$- llamado eje de las $s$- se toma en la dirección paralela el vector velocidad en cualquier punto (Fig. 7.6) resulta tangente a la línea de corriente en el punto que se considere. El eje de las $y$- llamado eje de las $n$- se toma en la normal a la línea de corriente hacia el centro de la curvatura. La componente de la velocidad $u$ es $v_s$ y la componente $v$ es $v_n$. Como $v_n$ es nula, la Ec. (7.3.11) se convierte en

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma h) = v_s\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial t} \tag{7.3.13}$$

Aunque $v_n$ es nula en el punto $(s,n)$, sus variaciones unitarias con respecto a $s$ y $t$ no son necesariamente cero. La Ec. (7.3.12) se convierte en

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma h) = v_s\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \tag{7.3.14}$$

Considerando la velocidad en $s$ y $s + \delta s$ de una misma línea de corriente, $v_n$ varía desde cero hasta $\delta v_n$. Si es $r$ el radio de curvatura de la línea de corriente en $s$, por la semejanza de triángulos (Fig. 7.6)

$$\frac{\delta s}{r} = \frac{\delta v_n}{v_s}$$

o sea

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} = \frac{v_s}{r}$$

Sustituyendo en la Ec. (7.3.14)

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma h) = \frac{v_s^2}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \tag{7.3.15}$$

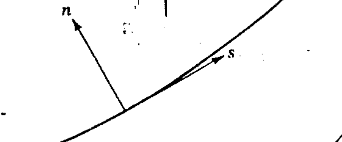



*Fig. 7.6 Notación para coordenadas naturales.*

Para un flujo permanente de un fluido incompresible las Ecs. (7.3.11) y (7.3.15) pueden escribirse

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}(p+\gamma h) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v_s^2}{2}\right) \tag{7.3.16}$$

y

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}(p+\gamma h) = \frac{v_s^2}{r} \tag{7.3.17}$$

La Ec. (7.3.16) puede integrarse con respecto a $s$ dando lugar a la Ec. (3.7.1) con una constante de integración que varía con $n$; es decir, de una línea de corriente a otra. La Ec. (7.3.17) demuestra que la altura de presión varía a través de las líneas de corriente. Cuando $v_s$ y $r$ son funciones conocidas de $n$, la Ec. (7.3.17) puede integrarse.

***Ejemplo 7.1*** Un recipiente que contiene un líquido gira con velocidad angular $\omega$ alrededor de un eje vertical como un sólido. Determinar la variación de la presión en el líquido.

$n$ es la distancia radial media hacia dentro, $n = -r$, $dn = -dr$ y $v_s = \omega r$. Integrando la Ec. (7.3.17)

$$-\frac{1}{\rho}(p+\gamma h) = -\int \frac{\omega^2 r^2\,dr}{r} + \text{const}$$

o sea

$$\frac{1}{\rho}(p+\gamma h) = \frac{\omega^2 r^2}{2} + \text{const}$$

Se determina la constante si $p = p_0$ cuando $r = 0$ y $h = 0$, entonces

$$p = p_0 - \gamma h + \rho\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

que demuestra que la presión es hidrostática a lo largo de una línea vertical y aumenta con el cuadrado del radio. La integración de la Ec. (7.3.16) demuestra que la presión es constante para una dada $h$ y $v_s$, es decir, a lo largo de una línea de corriente.





## 7.4 *Flujo irrotacional. Potencial de velocidad*

En esta sección se demuestra que la hipótesis del flujo irrotacional conduce a la existencia de un potencial de velocidad. Utilizando estas relaciones y la hipótesis de una fuerza másica conservativa, se pueden integrar las ecuaciones de Euler.

Las partículas de un fluido incompresible y sin rozamiento que están inicialmente en reposo no pueden ponerse a girar. Esto puede demostrarse considerando un pequeño cuerpo libre de fluido de forma esférica. Las fuerzas superficiales deben actuar normalmente a esta superficie por estar desprovisto el fluido de rozamiento y, por tanto, sus vectores pasan por el centro de la esfera. De manera semejante el peso pasa por el centro de la esfera. Por consiguiente, no se ejerce par alguno sobre la esfera y ésta debe permanecer sin rotación. Análogamente, si un fluido ideal tiene rotación no hay manera de alterarla porque no se puede ejercer un par sobre una esfera elemental del fluido.

Suponiendo que el fluido no tenga rotación, es decir, sea irrotacional, rot $\mathbf{q} = 0$, o de la Ec. (7.2.11)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{7.4.1}$$

Estas limitaciones en la velocidad se deben cumplir en todo punto (excepto en algunos puntos o líneas singulares especiales). La primera ecuación es la condición de irrotacionalidad para el flujo bidimensional. Es la condición de que la expresión diferencial,

$$u\,dx + v\,dy$$

sea exacta, o sea

$$u\,dx + v\,dy = -d\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\phi}{\partial y}dy \tag{7.4.2}$$

El signo menos es arbitrario; es un convenio que da lugar a que el valor de $\phi$ disminuya en la dirección de la velocidad. Comparando los términos con la Ec. (7.4.2), $u = -\partial\phi/\partial x$, $v = -\partial\phi/\partial y$. Esto prueba la existencia, en flujo bidimensional, de una función $\phi$ tal que su derivada negativa respecto a una dirección cualquiera es la componente de la velocidad en esa dirección. También se puede demostrar para flujo tridimensional. En forma vectorial,

$$\mathbf{q} = -\text{grad}\,\phi = -\nabla\phi \tag{7.4.3}$$

que es equivalente a

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{7.4.4}$$

La hipótesis de un potencial de velocidad equivale a la hipótesis de flujo irrotacional, ya que

$$\text{rot}\ (-\text{grad}\ \phi) = -\nabla \times \nabla\phi = 0 \tag{7.4.5}$$

puesto que $\nabla \times \nabla = 0$. Esto se demuestra por diferenciación cruzada en la Ec. (7.4.4):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial x}$$

demostrándose que $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$, etc.

Sustituyendo las Ecs. (7.4.4) en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

da

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{7.4.6}$$

En forma vectorial es

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla^2\phi = 0 \tag{7.4.7}$$

y se escribe $\nabla^2\phi = 0$. La Ec. (7.4.6) o la (7.4.7) es la ecuación de *Laplace*. Toda función $\phi$ que satisfaga la ecuación de Laplace es un caso posible de flujo irrotacional de un fluido. Cuando hay un número infinito de soluciones de la ecuación de Laplace, cada una de las cuales satisface ciertas condiciones de contorno del flujo, el problema principal consiste en la selección de la función idónea para el caso de flujo particular.

Como $\phi$ aparece en cada término de la Ec. (7.4.6) elevada a la primera potencia, es una ecuación lineal, y la suma de dos soluciones también es una solución; es decir, si $\phi_1$ y $\phi_2$ son soluciones de la Ec. (7.4.6), entonces $\phi_1 + \phi_2$ es una solución; por tanto,

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \qquad \nabla^2\phi_2 = 0$$

luego

$$\nabla^2(\phi_1 + \phi_2) = \nabla^2\phi_1 + \nabla^2\phi_2 = 0$$

Análogamente si $\phi_1$ es una solución, $C\phi_1$ es una solución si $C$ es una constante.



## 7.5 Integración de las ecuaciones de Euler. Ecuación de Bernoulli

La Ec. (7.3.8) se puede reagrupar de manera que cada término contenga una derivada parcial respecto a $x$. De la Ec. (7.4.1)

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{2} \qquad w\frac{\partial u}{\partial z} = w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{w^2}{2}$$

y de la Ec. (7.4.4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Haciendo estas sustituciones en la Ec. (7.3.8) y reagrupando términos,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0$$

Cuando $u^2 + v^2 + w^2 = q^2$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0 \tag{7.5.1}$$

Análogamente, para las direcciones $y$- y $z$-

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0 \tag{7.5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0 \tag{7.5.3}$$

Las cantidades dentro de los paréntesis son las mismas en las Ecs. (7.5.1) y (7.5.3). La Ec. (7.5.1) establece que dicha cantidad no es función de $x$, ya que su derivada respecto a $x$ es cero. Análogamente las otras dos ecuaciones demuestran que las cantidades correspondientes no son funciones de $y$ ni de $z$ respectivamente. Por tanto, puede ser solo función de $t$, por ejemplo, $F(t)$:

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(t) \tag{7.5.4}$$

En flujo permanente $\partial\phi/\partial t = 0$ y $F(t)$ se convierte en una constante $E$:

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} = E \tag{7.5.5}$$

La energía útil es constante a través de todo el fluido. Esta es la ecuación de Bernoulli para un fluido irrotacional.

El término relativo a la presión puede descomponerse en dos partes, la presión hidrostática $p_s$ y la presión dinámica $p_d$ de forma que $p = p_s + p_d$. Introduciéndolas en la Ec. (7.5.5)

$$gh + \frac{p_s}{\rho} + \frac{p_d}{\rho} + \frac{q^2}{2} = E$$

Los dos primeros términos pueden escribirse

$$gh + \frac{p_s}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p_s + \gamma h)$$

midiéndose $h$ verticalmente hacia arriba. La expresión es una constante, ya que expresa la ley hidrostática de variación de la presión. Estos dos términos pueden incluirse en la constante $E$. Suprimiendo el subíndice de la presión dinámica resulta

$$\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} = E \tag{7.5.6}$$

Esta simple ecuación permite determinar la variación de presión si se conoce la velocidad, o viceversa. Suponiendo que la velocidad $q_0$ y la presión dinámica $p_0$ se conoce en un punto,

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{q_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}$$

o sea

$$p = p_0 + \frac{\rho q_0^2}{2}\left[1 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2\right] \tag{7.5.7}$$

Aunque esta ecuación se ha deducido para flujo bidimensional, sirve también para flujo tridimensional.

*Ejemplo 7.2* Un submarino se mueve en el agua con una velocidad de 10 m/seg. En un punto $A$, 2 m por encima de la proa, la velocidad del submarino con relación al agua es de 15 m/seg. Determinar la diferencia de presiones dinámicas entre este punto y la proa y determinar la diferencia de presiones totales entre estos dos puntos.

Si el submarino está quieto y el agua se mueve, la velocidad en la proa es nula y la velocidad en $A$ es de 15 m/seg. Eligiendo la presión dinámica en el infinito como nula por la Ec. (7.5.6)

$$E = 0 + \frac{q_0^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50$$



En la proa

$$\frac{p}{\rho} = E = 50 \qquad p = 50 \times \frac{1000}{9,8} = 5100 \text{ kg/m}^2$$

En el punto $A$

$$\frac{p}{\rho} = E - \frac{q^2}{2} = 50 - \frac{15^2}{2}$$

y

$$p = \frac{1.000}{9,8}\left[\frac{10^2}{2} - \frac{15^2}{2}\right] = -6.380 \text{ kg/m}^2$$

Por tanto, la diferencia de presiones dinámicas es

$$-6.380 - 5.100 = -11.480 \text{ kg/cm}^2$$

La diferencia de presiones totales puede obtenerse aplicando la Ec. (7.5.5) al punto $A$ y a la proa $n$.

$$gh_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{q_A^2}{2} = gh_n + \frac{p_n}{\rho} + \frac{q_n^2}{2}$$

Por consiguiente,

$$p_A - p_n = \rho\left(gh_n - gh_A + \frac{q_n^2 - q_A^2}{2}\right) = \frac{1.000}{9,8}\left[-2g - \frac{15^2}{2}\right] = -13.480 \text{ kg/m}^2$$

Podría también haberse razonado que la diferencia de presiones totales era distinta de la diferencia de presiones dinámicas en $2\gamma$, puesto que $A$ está 2 m por encima de la proa y, por tanto, vale $-11.480 - 2 \times 1.000 = -13.480$ kg/m².

## 7.6 *Funciones de corriente. Condiciones de contorno*

Se definen dos funciones de corriente: una para flujo bidimensional, donde todas las líneas de movimiento son paralelas a un plano fijo, por ejemplo, el plano $xy$, y el flujo es idéntico en cada uno de estos planos, y la otra para el flujo tridimensional con simetría axial, es decir, todas las líneas de flujo están en planos que cortan la misma línea o eje, y el flujo es idéntico en cada uno de estos planos.

### *Función de corriente bidimensional*

Si $A$ y $P$ representan dos puntos en uno de los planos del flujo, por ejemplo, el plano $xy$ (Fig. 7.7), el caudal a lo largo de las dos líneas $ACP$

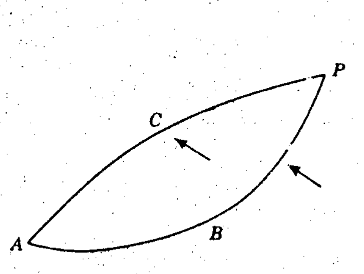



*Fig. 7.7* *Región de fluido que muestra la dirección positiva del flujo utilizado en la definición de función de corriente.*

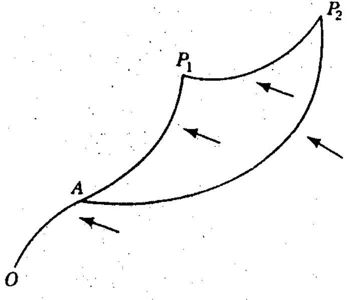



*Fig. 7.8* *Flujo entre dos puntos en una región de fluido.*

y $ABP$ tiene que ser el mismo si la densidad del fluido es constante y no se crea ni se destruye fluido dentro de la región $ABPC$, según se deduce de la continuidad. Si $A$ es un punto fijo y $P$ es un punto móvil, el caudal a través de cualquier línea que una los dos puntos es una función de la posición de $P$. Si esta función es $\psi$, y si se toma con el signo conveniente para que dé el caudal de derecha a izquierda cuando el observador recorre la línea desde $A$ hacia $P$, entonces

$$\psi = \psi(x,y)$$

es por definición la función de corriente.

Si $\psi_1$, $\psi_2$ representan los valores de la función de corriente en los puntos $P_1$ y $P_2$ (Fig. 7.8), respectivamente, entonces $\psi_2 - \psi_1$ es el caudal a través de $P_1P_2$ y es independiente de la situación de $A$. Eligiendo otro punto $O$ en vez de $A$, los nuevos valores de $\psi_1$, $\psi_2$ se diferencian de los antiguos en la misma cantidad, que es el valor del caudal a través de $OA$. Entonces $\psi$ tiene la indeterminación de una constante arbitraria.

Las componentes de la velocidad $u$, $v$ en las direcciones de $x$- e $y$- pueden obtenerse a partir de la función de corriente. En la Fig. 7.9*a*, el caudal $\delta\psi$ a través de $\overline{AP} = \delta y$ de derecha a izquierda es $-u\,\delta y$, o sea

$$u = -\frac{\delta\psi}{\delta y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (7.6.1)$$

y análogamente

$$v = \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (7.6.2)$$

Es decir, la derivada parcial de la función de corriente en una dirección da la componente de la velocidad en la dirección a $+90°$ en el sentido



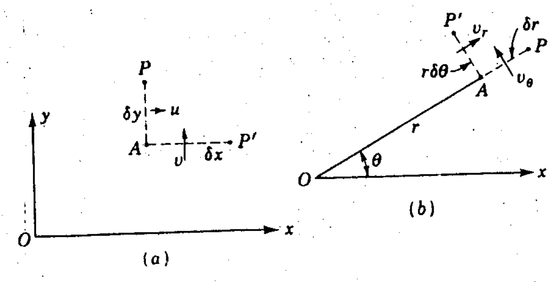



*Fig. 7.9* *Selección del camino para mostrar la relación de las componentes de la velocidad con la función de corriente.*

contrario a las agujas del reloj. En coordenadas polares planas,

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

con referencia a la Fig. 7.9*b*.

Cuando los dos puntos $P_1$, $P_2$ de la Fig. 7.8 están en la misma línea de corriente $\psi_1 - \psi_2 = 0$, puesto que no pasa caudal alguno a través de una línea de corriente. Por consiguiente, una línea de corriente está dada por la ecuación $\psi =$ const. Comparando las Ecs. (7.4.4) con las Ecs. (7.6.1) y (7.6.2)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (7.6.3)$$

Por las Ecs. (7.6.3) se pueden encontrar para cada potencial de velocidad una función de corriente. Si el potencial de velocidad satisface a la ecuación de Laplace también la función de corriente debe satisfacerla. Por tanto, la función de corriente puede considerarse como potencial de velocidad de otro flujo distinto.

*Función de corriente de Stokes para flujo simétrico axialmente.*

Tómense en un plano cualquiera que pase por el eje de simetría dos puntos $A$, $P$, tales que $A$ sea fijo y $P$ variable. Trácese una línea que una $A$ con $P$. El flujo que se produce a través de la superficie al girar $AP$ respecto al eje de simetría es una función de la posición de $P$. Sea dicha función $2\pi\psi$, y sea el eje de simetría el eje $x$ de un sistema cartesiano de referencia. Entonces $\psi$ es una función de $x$ y de $\varpi$, donde

$$\varpi = \sqrt{y^2 + z^2}$$

(a) (b)

*Fig. 7.10 Desplazamiento de P que muestra la relación entre las componentes de la velocidad y de la función de corriente de Stokes.*

es la distancia de $P$ al eje $x$. Las superficies $\psi$ = const son superficies de corriente.

Para hallar la relación entre $\psi$ y las componentes de la velocidad $u$, $v'$ paralelas al eje $x$ y al eje $\hat{\omega}$ (perpendicular al eje $x$), respectivamente, se utiliza un procedimiento análogo al empleado para el flujo bidimensional. Sea $PP'$ un paso infinitesimal paralelo primero a $\hat{\omega}$ y después a $x$; es decir, $PP' = \delta\hat{\omega}$ y luego $PP' = \delta x$. Las relaciones que resultan entre la función de corriente y la velocidad vienen dadas por

$$-2\pi\hat{\omega}\,\delta\hat{\omega}\,u = 2\pi\,\delta\psi \qquad \text{y} \qquad 2\pi\hat{\omega}\,\delta x\,v' = 2\pi\,\delta\psi$$

Despejando $u$ y $v'$,

$$u = -\frac{1}{\hat{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\omega}} \qquad v' = \frac{1}{\hat{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{7.6.4}$$

Se utiliza el mismo convenio de signos que en el caso bidimensional.

Las relaciones entre la función de corriente y la función potencial son

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\hat{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\omega}} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\hat{\omega}} = -\frac{1}{\hat{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{7.6.5}$$

En el flujo tridimensional con simetría axial, $\psi$ tiene las dimensiones $L^3T^{-1}$, o sea volumen por unidad de tiempo.

La función de corriente se emplea para flujo alrededor de cuerpos de revolución que se expresan con frecuencia en forma más concisa mediante coordenadas polares. Sea $r$ la distancia del origen y $\theta$ el ángulo polar; el ángulo meridiano no es necesario debido a la simetría axial. Con referencia a las Figs. 7.10$a$ y $b$,

$$2\pi r \operatorname{sen}\theta\,\delta r\,v_\theta = 2\pi\,\delta\psi$$
$$-2\pi r \operatorname{sen}\theta r\,\delta\theta\,v_r = 2\pi\,\delta\psi$$



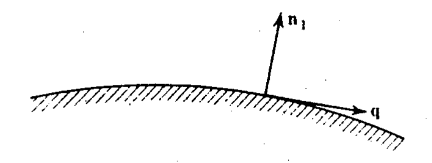



*Fig. 7.11 Notación para la condición de contorno en un contorno fijo.*

*Fig. 7.12 Notación para la condición de contorno en un contorno móvil.*

de las que

$$v_\theta = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad v_r = -\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{7.6.6}$$

y

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{7.6.7}$$

Estas expresiones son útiles al tratar de flujos alrededor de esferas, elipsoides y discos y a través de orificios.

## *Condiciones de contorno*

En un contorno fijo la componente de velocidad normal al contorno ha de ser cero en todo punto del contorno (Fig. 7.11):

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_1 = 0 \tag{7.6.8}$$

$\mathbf{n}_1$ es un vector unitario normal al contorno. En notación escalar se expresa fácilmente en función del potencial de velocidad

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \tag{7.6.9}$$

en todos los puntos del contorno. Para un contorno móvil (Fig. 7.12), donde el punto de contorno tiene la velocidad $\mathbf{V}$, la componente de la velocidad del fluido normal al contorno debe igualar la velocidad del contorno normal al contorno; por tanto,

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_1 = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_1 \tag{7.6.10}$$

o sea

$$(\mathbf{q} - \mathbf{V})\cdot\mathbf{n}_1 = 0 \tag{7.6.11}$$

Para dos fluidos en contacto, se necesita una condición dinámica de

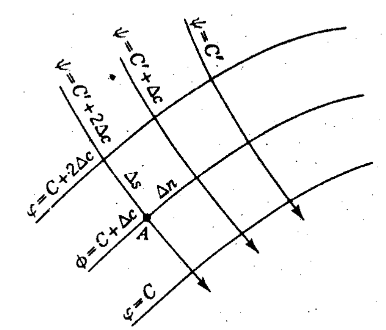



*Fig. 7.13 Elementos de una red de corriente.*

contorno; cual es que la presión debe ser continua a través de la cara de contacto.

Una superficie de corriente en flujo permanente (contornos fijos) satisface las condiciones para un contorno y se puede considerar como un contorno sólido.

## 7.7 La red de corriente

En flujo bidimensional la red de corriente es de gran utilidad; en esta sección se considera.

La línea definida por la ecuación $\phi(x,y) = \text{const}$ se llama línea *equipotencial*. Es una línea a lo largo de la cual el valor de $\phi$ (potencial de velocidad) no varía. Como la velocidad $v_s$ en cualquier dirección $s$ está dada por

$$v_s = -\frac{\partial \phi}{\partial s} = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s}$$

e $\Delta\phi$ es cero para dos puntos cercanos de una misma línea equipotencial, el vector velocidad no tiene componentes en la dirección de la línea que pasa por los dos puntos. En el límite, cuando $\Delta s \to 0$, esto prueba que no existe componente de la velocidad en dirección de la tangente a una línea equipotencial y que, por tanto, el vector velocidad debe ser en todos los puntos *normal* a una línea equipotencial (excepto en los puntos singulares, donde la velocidad es cero o infinita).

La línea $\psi(x,y) = \text{const}$ es una línea de corriente y es en todos sus puntos tangente al vector velocidad. Las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son, pues, *ortogonales*, es decir, se cortan en ángulos rectos excepto en los puntos singulares. Una *red de corriente* se compone de una familia de líneas equipotenciales, y una familia correspondiente de líneas de corriente con las constantes variando en progresión aritmética. Es habitual hacer que el incremento de la constante entre líneas equipotenciales adyacentes y líneas de corriente adyacentes sea el mismo, por ejemplo, $\Delta c$. Si en la Fig. 7.13 la distancia entre líneas de corriente es $\Delta n$ y la distancia entre líneas equipotenciales es $\Delta s$, en una pequeña región de la red de corriente, la velocidad aproximada $v_s$ viene dada entonces en función de la distancia de las líneas equipotenciales [Ec. (7.4.4)],



$$v_s \approx -\frac{\Delta \phi}{\Delta s} = -\frac{-\Delta c}{\Delta s} = \frac{\Delta c}{\Delta s}$$

o en función de la distancia de las líneas de corriente [Ecs. (7.6.1) y (7.6.2)],

$$v_s \approx \frac{\Delta \psi}{\Delta n} = \frac{\Delta c}{\Delta n}$$

Estas expresiones son aproximadas cuando $\Delta c$ es finito, pero cuando $\Delta c$ se hace muy pequeño, las expresiones se hacen exactas y dan la velocidad en un punto. Como las dos velocidades obtenidas tienen que ser la misma, las ecuaciones demuestran que $\Delta s = \Delta n$ o que la red de corriente consiste en un reticulado ortogonal que, cuando el tamaño de la retícula tiende a cero, tiende a un cuadrado perfecto.

Una vez que por cualquier medio se ha encontrado la red de corriente, de tal manera que satisfaga las condiciones en los contornos y que sea una red ortogonal, es decir, que se reduzca a cuadrados perfectos en el límite cuando el número de líneas aumenta, se demuestra en hidrodinámica el teorema de la unicidad que expresa que la red de corriente es la única solución para unos contornos dados. En flujo permanente, cuando los contornos estén quietos, ellos mismos forman parte de la red de corriente, puesto que son líneas de corriente. El problema de encontrar la red de corriente que satisfaga a unos contornos fijos dados, puede considerarse como un *ejercicio gráfico*, es decir, la construcción de un sistema ortogonal de líneas que incluya los contornos y que se reduzca a cuadrados perfectos cuando el número de líneas aumente. Este es uno de los métodos prácticos empleados en el análisis del flujo bidimensional que usualmente requiere muchos ensayos y enmiendas.

Otro método práctico de obtener una red de corriente para contornos fijos y dados es el de la *analogía eléctrica*. Los contornos de un modelo se hacen de bandas de material aislante montadas sobre una superficie aislante plana y las líneas equipotenciales extremas se hacen de bandas conductoras, por ejemplo, de latón o de cobre. Un electrólito (líquido conductor) se sitúa a profundidad uniforme en la región en que quiere determinarse la red y se aplica un potencial eléctrico a las dos bandas conductoras extremas. Usando un «explorador» constituido por una punta y un voltímetro se van situando las líneas de caída de potencial constante a partir de un extremo. Estas son las líneas equipotenciales. Si se repite el proceso haciendo los contornos del flujo de material conductor y las líneas equipotenciales extremas de material aislante se van situando las líneas de corriente.

Un papel especial conductor, llamado papel *Teledeltos*, se puede utilizar en lugar de un depósito y un electrólito. Se utiliza tinta plateada para formar una faja o línea conductora que tiene un voltaje constante. Se corta el papel al tamaño y las formas necesarias, se sitúan las líneas de voltaje constante en el papel con una línea gruesa de tinta plateada, después se marcan directamente sobre el papel los puntos intermedios de voltaje constante, usando los mismos circuitos que con un electrólito.

El método de relajación† determina numéricamente el valor de la función potencial en puntos de flujo, situados normalmente en las intersecciones de una retícula cuadrada. La ecuación de Laplace se escribe como una ecuación en diferencias finitas y se puede demostrar que el valor de la función potencial en un punto de la retícula es la media de los cuatro valores en los puntos más próximos. Cerca del contorno se requieren fórmulas especiales. Con valores conocidos en los contornos, cada punto de la retícula se calcula basándose en los valores supuestos en los puntos próximos, después estos valores se mejoran repitiendo el procedimiento hasta que las variaciones estén dentro de la exactitud deseada. Este método es particularmente conveniente cuando la solución se calcula mediante computadores digitales de alta velocidad.

### *Uso de la red de corriente*

Después que se ha obtenido la red de corriente para unos contornos dados, puede usarse para cualquier flujo irrotacional con contornos semejantes geométricamente. Entonces se puede determinar, usando la red de corriente, la velocidad en cualquier otro punto. La aplicación de la ecuación de Bernoulli, Ec. (7.5.7), nos da la presión dinámica. Si se conoce la velocidad en $A$ (Fig. 7.13), midiendo $\Delta n$ o $\Delta s$ entre líneas adyacentes, puede determinarse la constante $\Delta c$ para toda la red, pues $\Delta c \cong \Delta n\, v_s \cong \Delta s\, v_s$, y, por último, midiendo $\Delta s$ o $\Delta n$ en cualquier otro punto se puede calcular la velocidad en ese punto, ya que

$$v_s \approx \frac{\Delta c}{\Delta s} \approx \frac{\Delta c}{\Delta n}$$

## 7.8 Casos de flujo tridimensional

Debido a limitaciones de espacio solo se consideran muy pocos casos tridimensionales. Estos son fuentes (o manantiales) y sumideros, el doblete y el flujo uniforme simple o combinado.

† C.-S. Yih, Ideal-fluid Flow, pág. 4-67 en «Handbook of Fluid Dynamics», ed. por V. L. Streeter, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.



### *Fuentes y sumideros tridimensionales*

Una fuente en flujo tridimensional es un punto desde el que el flujo mana a caudal uniforme en todas direcciones. Es enteramente ficticio, ya que no hay nada en la naturaleza que se le parezca. Sin embargo, no por ello se reduce su utilidad para obtener formas de flujo. La «intensidad» de la fuente $m$ es el caudal del flujo que atraviesa cualquier superficie que rodea la fuente.

Como el flujo es hacia afuera y es uniforme en todas las direcciones, la velocidad, a distancia $r$ de la fuente, es la intensidad dividida por el área de la esfera que pasa por el punto y cuyo centro es la fuente, o sea

$$v_r = \frac{m}{4\pi r^2}$$

Como $v_r = -\partial\phi/\partial r$ y $v_\theta = 0$, se sigue que $\partial\phi/\partial\theta = 0$, y se puede hallar el potencial de velocidad.

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{4\pi r^2}$$

y

$$\phi = \frac{m}{4\pi r} \tag{7.8.1}$$

Una *fuente negativa* es un *sumidero*. Se supone que el fluido llega uniformemente al sumidero y desaparece.

### *Dobletes tridimensionales*

Un *doblete*, o *fuente doble*, es una combinación de una fuente y un sumidero de igual intensidad, que se dejan aproximar uno a otro de ma-

*Fig. 7.14 Sistemas auxiliares de coordenadas empleados para el cuerpo de Rankine.*

nera que el producto de su intensidad por la distancia entre ellos permanece constante en el límite.

Con respecto a la Fig. 7.14, se sitúa una fuente de intensidad $m$ en $(a,0)$ y un sumidero de la misma intensidad en $(-a,0)$. Como cada uno satisface la ecuación de Laplace, su suma también la satisface:

$$\phi = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{7.8.2}$$

Por el teorema de los senos (Fig. 7.14),

$$\frac{r_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{r_2}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{2a}{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{2a}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}$$

ya que el ángulo que forman $r_2$ y $r_1$ en $P$ es $\theta_1 - \theta_2$. Despejando $r_2 - r_1$,

$$r_2 - r_1 = \frac{a(\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{2a\cos\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}$$

De la Ec. (7.8.2)

$$\phi = \frac{m}{4\pi}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{2am\cos\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{4\pi r_1 r_2\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{\mu}{r_1 r_2}\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}$$

En el límite cuando $a$ tiende a cero, $\theta_2 = \theta_1 = \theta$, $r_2 = r_1 = r$, y

$$\phi = \frac{\mu}{r_2}\cos\theta \tag{7.8.3}$$

que es el potencial de velocidad para un doblete† en el origen con eje en la dirección $x$ positiva. La Ec. (7.8.3) se puede convertir en la función de corriente mediante las Ecs. (7.6.7). La función de corriente es

$$\psi = -\frac{\mu\bar{\omega}^2}{r^3} = -\frac{\mu\operatorname{sen}^2\theta}{r} \tag{7.8.4}$$

† L. M. Milne-Thompson, «Theoretical Hydrodynamics», pág. 414, Macmillan & Co., Ltd., Londres, 1938.



En la Fig. 7.15 están representadas las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de un doblete.

*Fuente en una corriente uniforme*

La velocidad radial $v_r$ debida a una fuente en el origen

$$\phi = \frac{m}{4\pi r} \tag{7.8.1}$$

es

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{4\pi r^2}$$

que, multiplicada por el área de la superficie de la esfera con centro en él, da la intensidad $m$. Como el flujo que parte de la fuente tiene simetría

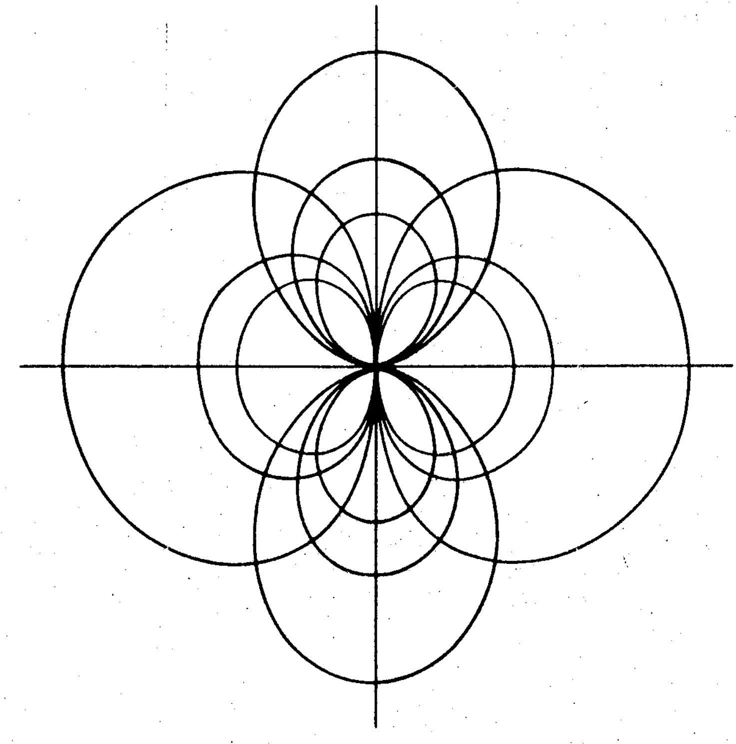


*Fig. 7.15* *Líneas de corriente y líneas equipotenciales para un doblete tridimensional.*

axial, se define la función de corriente de Stokes. En coordenadas polares esféricas, según las Ecs. (7.6.7)

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

con la Ec. (7.8.1)

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{m}{4\pi}\operatorname{sen}\theta$$

Integrando

$$\psi = \frac{m}{4\pi}\cos\theta \tag{7.8.5}$$

es la función de corriente para una fuente en el origen. En la Fig. 7.16 se muestran las líneas equipotenciales y las líneas de corriente para incrementos constantes de $\phi$ y $\psi$.

Una corriente uniforme de fluido que tenga una velocidad $U$ en la dirección $x$ negativa en todo el espacio viene dado por

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = -U \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\varpi} = 0$$

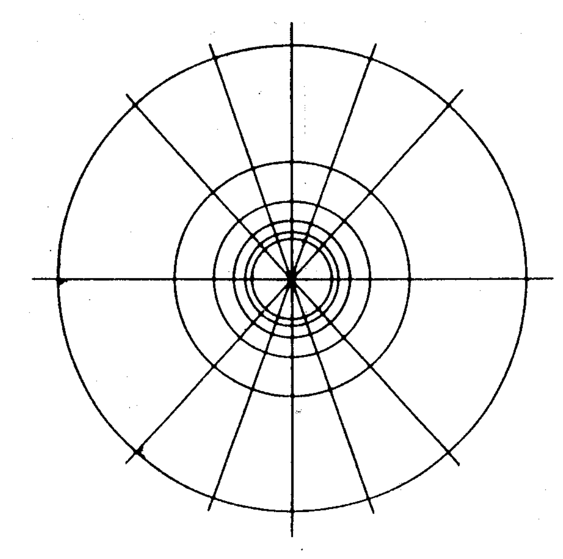


*Fig. 7.16 Líneas de corriente y líneas equipotenciales para un manantial.*



Integrando,

$$\phi = Ux = Ur\cos\theta \tag{7.8.6}$$

De la misma manera que antes se halla que la función de corriente es

$$\psi = \frac{U}{2}\varpi^2 = \frac{Ur^2}{2}\operatorname{sen}^2\theta \tag{7.8.7}$$

En la Fig. 7.17 se muestra la red de corriente del flujo.

Al combinar el flujo uniforme y el flujo de la fuente, que se pueden completar sumando los dos potenciales de velocidad y las dos funciones de corriente, da

$$\phi = \frac{m}{4\pi r} + Ur\cos\theta$$

$$\psi = \frac{m}{4\pi}\cos\theta + \frac{Ur^2}{2}\operatorname{sen}^2\theta \tag{7.8.8}$$

El flujo resultante es el mismo en todos los puntos como si se sumaran los vectores de velocidad distintos en cada punto del espacio.

Un punto de estancamiento es un punto del fluido donde la velocidad es cero. Las condiciones para el punto de estancamiento, utilizando coordenadas polares esféricas y cuando el flujo tiene simetría axial, son

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \qquad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$

Con estas expresiones y las Ecs. (7.8.8) se obtiene

$$\frac{m}{4\pi r^2} - U\cos\theta = 0 \qquad U\operatorname{sen}\theta = 0$$

que solo se cumplen en un punto del espacio, que es

$$\theta = 0 \qquad r = \sqrt{\frac{m}{4\pi U}}$$

Sustituyendo este punto en la función de corriente da $\psi = m/4\pi$, que es la superficie de corriente que pasa por el punto de estancamiento. De las Ecs. (7.8.8) se obtiene la ecuación de esta superficie

$$\cos\theta + \frac{2\pi U}{m}r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \tag{7.8.9}$$

El flujo considerado es permanente, ya que el potencial de velocidad no cambia con el tiempo. Por tanto, cualquier superficie de corriente satisface las condiciones para un contorno: La componente de la velo-

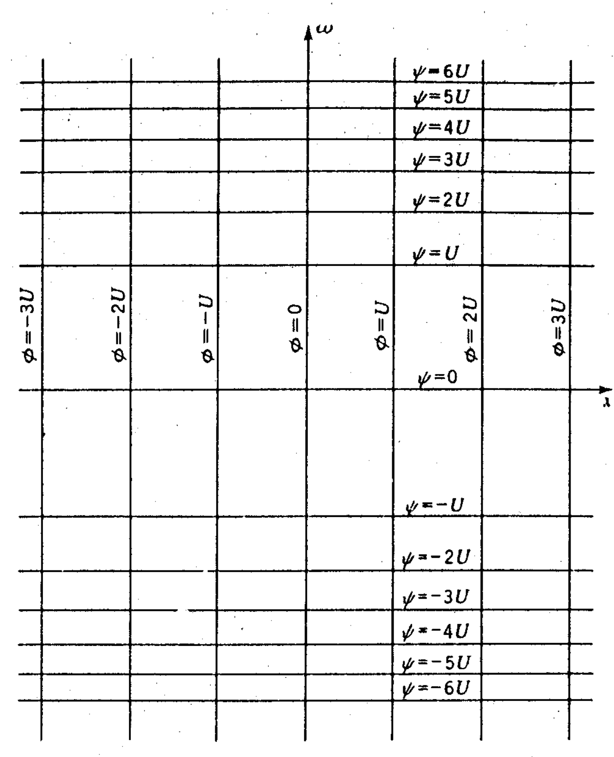



***Fig. 7.17** Líneas de corriente y líneas equipotenciales para un flujo uniforme en la dirección x negativa.*

cidad normal a la superficie de corriente en flujo permanente siempre es cero. Como normalmente las superficies de corriente que pasan por un punto de estancamiento dividen el flujo, son con frecuencia los contornos posibles más interesantes. En la Fig. 7.18 está trazada esta superficie de corriente. Sustituyendo en la Ec. (7.8.9) $\hat{\omega} = r$ sen $\theta$, la distancia desde un punto $(r,\theta)$ al eje $x$ es

$$\hat{\omega}^2 = \frac{m}{2\pi U}(1 - \cos\theta)$$

que demuestra que $\hat{\omega}$ tiene un valor máximo $\sqrt{m/\pi U}$ cuando $\theta$ tiende a $\pi$, es decir, cuando $r$ tiende a infinito. Por consiguiente, $\hat{\omega} = \sqrt{m/\pi U}$ es una superficie asintótica a la superficie de corriente divisoria. La Ec. (7.8.9) se puede expresar de la forma

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi U}}\sec\frac{\theta}{2} \tag{7.8.10}$$

a partir de la que se dibuja fácilmente. Tal figura de revolución se llama



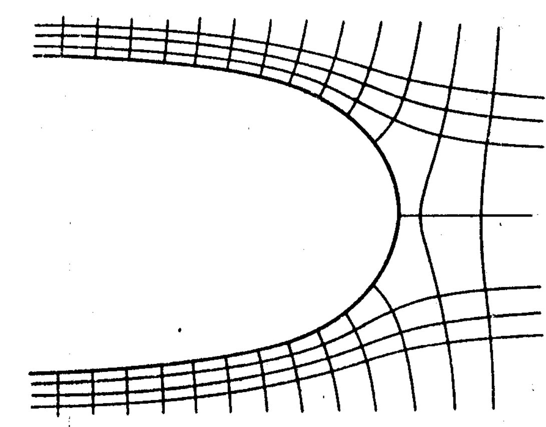


***Fig. 7.18** Líneas de corriente y líneas equipotenciales para un medio cuerpo.*

*semicuerpo*, ya que se extiende hasta el infinito negativo, rodeando al eje $x$ negativo.

La presión en un punto cualquiera, es decir, la presión dinámica de la Ec. (7.5.7), es

$$p = \frac{\rho}{2}(U^2 - q^2)$$

donde se toma igual a cero la presión dinámica en el infinito. La velocidad en un punto cualquiera es $q$. Calculando $q$ de las Ecs. (7.8.8)

$$q^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2 = U^2 + \frac{m^2}{16\pi^2 r^2} - \frac{mU\cos\theta}{2\pi r^2}$$

y

$$p = \frac{\rho}{2}U^2\left(\frac{m\cos\theta}{2\pi r^2 U} - \frac{m^2}{16\pi^2 r^4 U^2}\right) \tag{7.8.11}$$

de donde se puede hallar la presión en un punto cualquiera excepto el origen, que es un punto singular. Sustituyendo la Ec. (7.8.10) en la Ec. (7.8.11), la presión viene dada en función de $r$ para un punto cualquiera del semicuerpo; por tanto,

$$p = \frac{\rho}{2}U^2\left(\frac{3m^2}{16\pi^2 r^4 U^2} - \frac{m}{2\pi r^2 U}\right) \tag{7.8.12}$$

Lo que demuestra que la presión dinámica tiende a cero cuando $r$ aumenta aguas abajo a lo largo del cuerpo.

*Fuente y sumidero de igual intensidad en una corriente uniforme*
*Cuerpos de Rankine*

Una fuente de intensidad $m$, situada en $(a,0)$, tiene en un punto $P$ cualquiera un potencial de velocidad dado por

$$\phi_1 = \frac{m}{4\pi r_1}$$

donde $r_1$ es la distancia de $(a,0)$ a $P$, como se representa en la Fig. 7.14. Análogamente, la función potencial para un sumidero de intensidad $m$ situado en $(-a,0)$ es

$$\phi_2 = -\frac{m}{4\pi r_2}$$

Como tanto $\phi_1$ como $\phi_2$ satisfacen la ecuación de Laplace, su suma será también una solución,

$$\phi = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{7.8.13}$$

Debido a que $r_1$ y $r_2$ están medidos desde puntos distintos, esta expresión se puede manejar de forma diferente a partir de la ecuación algebraica normal.

Las funciones de corriente para la fuente y el manantial también se pueden sumar para dar la función de corriente en flujo combinado,

$$\psi = \frac{m}{4\pi}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{7.8.14}$$

Las superficies de corriente y las superficies equipotenciales toman la forma de la Fig. 7.19, y se ha trazado partiendo de las Ecs. (7.8.13) y (7.8.14) considerando constantes $\phi$ y $\psi$.

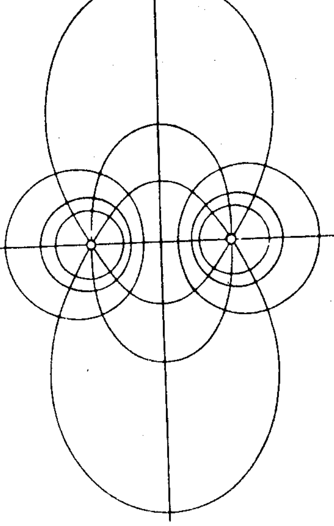
Superponiendo un flujo uniforme de velocidad $U$ en la dirección $x$ negativa, $\phi = Ux$, $\psi = \frac{1}{2}U\hat{\omega}^2$, el potencial y las funciones de corriente para la fuente y el sumidero de igual intensidad en un flujo uniforme (en la dirección de la fuente hacia el sumidero) son

$$\phi = Ux + \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= Ux + \frac{m}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + \hat{\omega}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + \hat{\omega}^2}}\right] \tag{7.8.15}$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}Ur^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{m}{4\pi}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{7.8.16}$$





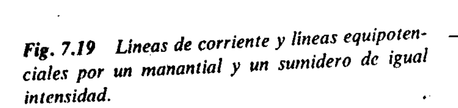


***Fig. 7.19** Líneas de corriente y líneas equipotenciales por un manantial y un sumidero de igual intensidad.*

Como cualquier superficie de corriente se puede considerar como un contorno sólido en flujo permanente, la situación de una superficie cerrada para este tipo de flujo representará el flujo de una corriente uniforme alrededor de un cuerpo. Examinando la función de corriente, para $x > a$ y $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\psi = 0$. Para $x < -a$ y $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi$, $\psi = 0$. Por tanto, $\psi = 0$ debe ser la línea de corriente divisoria, ya que el eje $x$ es el eje de simetría. La ecuación de la línea de corriente divisoria es, según la Ec. (7.8.16),

$$\hat{\omega}^2 + \frac{m}{2\pi U}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = 0 \tag{7.8.17}$$

en la que $\hat{\omega} = r \operatorname{sen}\theta$ es la distancia de un punto de la superficie de corriente divisoria al eje $x$. Como $\cos\theta_1$ y $\cos\theta_2$ nunca son mayores que la unidad, $\hat{\omega}$ no puede sobrepasar $\sqrt{m/\pi U}$, que demuestra que la superficie es cerrada y, por consiguiente, se puede sustituir por un sólido de exactamente la misma forma. Cambiando los signos de $m$ y $U$ el flujo se invierte y el cuerpo cambiaría base por base. De la Ec. (7.8.17) se ve que la ecuación no ha cambiado; por consiguiente, el cuerpo tenía simetría respecto al plano $x = 0$. Es necesario un cuerpo de revolución debido a la simetría axial de las ecuaciones.

Para situar los puntos de estancamiento $C$, $D$ (Fig. 7.20), que debe estar sobre el eje $x$, se sabe que la velocidad tiene la dirección del eje $x$ (ya que es una línea de corriente). De la Ec. (7.8.15) el potencial de velo-

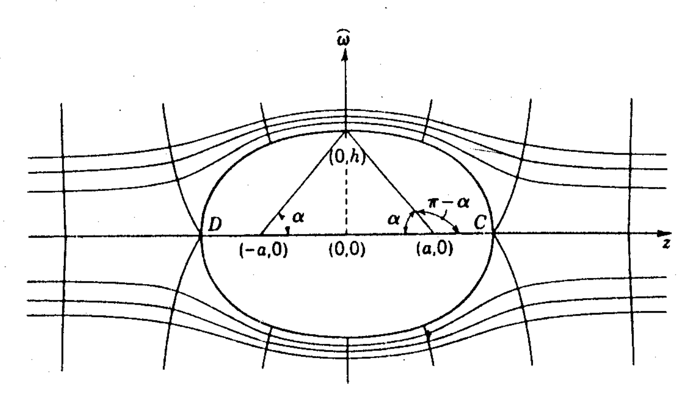



*Fig. 7.20 Cuerpo de Rankine.*

cidad $\phi_x$ de los puntos del eje $x$ viene dado por

$$\phi_x = \frac{ma}{2\pi}\frac{1}{x^2 - a^2} + Ux$$

ya que

$$r_1 = x - a \qquad r_2 = x + a$$

Derivando respecto a $x$ e igualando a cero el resultado,

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x} = U - \frac{max_0}{\pi(x_0^2 - a^2)^2} = 0 \tag{7.8.18}$$

donde $x_0$ es la coordenada $x$ del punto de estancamiento. Esto da el punto $C(x_0,0)$ (solución por tanteos). El ancho medio $h$ se determina de la manera siguiente: De la Fig. 7.20

$$\theta_1 = \pi - \alpha \qquad \theta_2 = \alpha$$

en la que

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

Sustituyendo en la Ec. (7.8.17),

$$h^2 = \frac{m}{\pi U}\frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}} \tag{7.8.19}$$

de donde se puede determinar $h$ (también mediante una solución por tanteos).



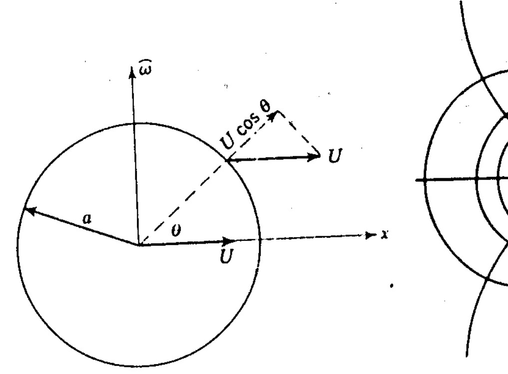



*Fig. 7.21 Esfera que se traslada en la dirección x positiva.*

*Fig. 7.22 Líneas de corriente y líneas equipotenciales para una esfera que se mueve a través de un fluido.*

Eliminando $m/U$ entre las Ecs. (7.8.18) y (7.8.19),

$$\frac{m}{U} = \frac{(x_0^2 - a^2)^2}{x_0}\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{a}h^2\sqrt{h^2 + a^2}$$

se puede obtener el valor de $a$ para un cuerpo determinado de antemano (especificados $x_0$ y $h$). Por consiguiente, $U$ puede ser cualquier valor positivo dado y se pueden determinar la presión y la distribución de la velocidad.

Al determinar la velocidad en los puntos de la región es conveniente hallar la velocidad en cada punto debida a cada componente del flujo; es decir, debida a la fuente, el sumidero y el flujo uniforme, separadamente, y sumar gráficamente las componentes o según las componentes $\hat{\omega}$ y $x$.

Los cuerpos obtenidos de las combinaciones fuente-sumidero con flujo uniforme se llaman *cuerpos de Rankine*.

### *Traslación de una esfera en un fluido infinito*

El potencial de velocidad para un sólido que se mueve a través de un fluido infinito, previamente en reposo, debe satisfacer las condiciones siguientes†:

1. La ecuación de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$ en todos los puntos excepto en los puntos singulares.
2. El fluido debe permanecer en reposo en el infinito; por consiguiente, las derivadas de $\phi$ se deben anular en el infinito.

† G. G. Stokes, «Mathematical and Physical Papers», vol. 1, págs. 38-43, Cambridge University Press, Londres, 1880.

3. Se deben satisfacer las condiciones de contorno en la superficie del sólido.

Para una esfera de radio $a$ y centro el origen que se mueve con velocidad $U$ en la dirección $x$ positiva, la velocidad de la superficie según la normal a ella misma es $U \cos \theta$, según la Fig. 7.21. La velocidad del fluido normal a la superficie es $-\partial\phi/\partial r$; por consiguiente, la condición de contorno es

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = U \cos\theta$$

El potencial de velocidad para el doblete [Ec. (7.8.3)]

$$\phi = \frac{\mu \cos\theta}{r^2}$$

satisface $\nabla^2\phi = 0$ para cualquier valor constante de $\mu$. Sustituyéndolo en la condición de contorno,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2\mu}{r^3}\cos\theta = U\cos\theta$$

que se satisfaga para $r = a$ si $\mu = Ua^3/2$. También se debe notar que las componentes de velocidad,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \text{y} \quad -\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

son cero en el infinito. Por tanto,

$$\phi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta \tag{7.8.20}$$

satisface todas las condiciones para la traslación de una esfera en un fluido infinito. Este caso es uno de flujo no permanente, resuelto para el instante en que el centro de la esfera está en el origen. Debido a que esta ecuación se ha particularizado para un instante particular, no se puede hallar la distribución de presiones a partir de él utilizando la Ec. (7.5.7). En la Fig. 7.22 se representan las líneas de corriente y las líneas equipotenciales para la esfera.

La función de corriente para este caso es

$$\psi = -\frac{Ua^3}{2r}\operatorname{sen}^2\theta \tag{7.8.21}$$



*Flujo permanente de un fluido infinito alrededor de una esfera*

El caso de flujo no permanente de la sección anterior se puede convertir en un caso de flujo permanente superponiendo al flujo una corriente uniforme de módulo $U$ en la dirección $x$ negativa. Para probar esto, sumemos $\phi = Ux = Ur\cos\theta$ a la función potencial [Ec. (7.8.20)]; resulta

$$\phi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta + Ur\cos\theta \tag{7.8.22}$$

La función de corriente correspondiente es

$$\psi = -\frac{Ua^3}{2r}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{Ur^2}{2}\operatorname{sen}^2\theta \tag{7.8.23}$$

De esta última, $\psi = 0$ cuando $\theta = 0$ y cuando $r = a$. Por tanto, la superficie de corriente $\psi = 0$ es la superficie esférica $r = a$, que se puede considerar como un contorno sólido fijo. En la Fig. 7.23 se muestran las líneas de corriente y las líneas equipotenciales. Se debería mencionar, quizá, que las ecuaciones también dan una forma de flujo para la parte interior a la superficie esférica. Sin embargo, no pasa fluido a través de dicha superficie.

La velocidad en un punto cualquiera de la superficie esférica es

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\bigg]_{r=a} = q = \tfrac{3}{2}U\operatorname{sen}\theta$$

Los puntos de estancamiento están en $\theta = 0$, $\theta = \pi$. La velocidad máxima $\frac{3}{2}U$ se produce en $\theta = \pi/2$. La distribución de presión dinámica sobre la superficie de la esfera es

$$p = \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - \tfrac{9}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{7.8.24}$$

para presión dinámica nula en el infinito.

En las Secs. 5.6 y 5.7 se estudia el flujo alrededor de una esfera en un fluido real. La Fig. 5.20 muestra la formación de la onda real debida a la separación entre la capa límite laminar y turbulenta. La resistencia en una esfera en fluidos reales viene dada por los datos del coeficiente de resistencia dados en la Fig. 5.21. En el caso del fluido ideal la condición de contorno no permite separación. Si la componente $x$ de la fuerza ejercida sobre la esfera por la presión dinámica se obtiene a partir de la Ec. (7.8.24) por integración y se hallará que es cero. No hay resistencia sobre un cuerpo en el flujo de un fluido ideal porque la energía es cons-

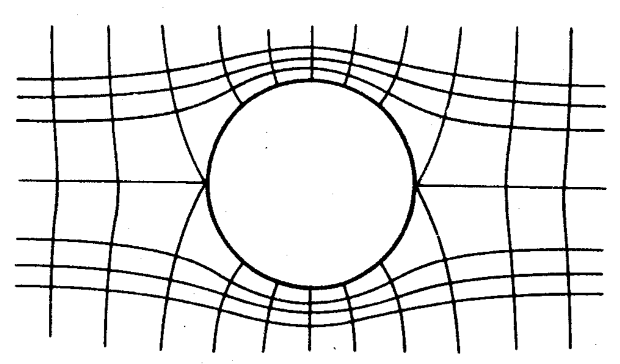


*Fig. 7.23 Líneas de corriente y líneas equipotenciales para el flujo uniforme alrededor de una esfera en reposo.*

tante en todas partes y la alta velocidad del fluido obtenida por el flujo sobre la parte frontal de sección recta máxima se convierte completamente en presión al fluir sobre la porción de aguas abajo.

## 7.9 Casos de flujo bidimensional

En primer lugar se examinan dos casos sencillos de flujo que se pueden considerar como flujo a lo largo de contornos rectos, después se estudian la fuente, el vórtice, el doblete, el flujo uniforme y el flujo alrededor de un cilindro.

### *Flujo alrededor de una esquina*

La función potencial

$$\phi = A(x^2 - y^2)$$

tiene su función de corriente

$$\psi = 2Axy = Ar^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

siendo $r$ y $\theta$ coordenadas polares. En la Fig. 7.24 está representado para variaciones incrementales iguales de $\phi$ y $\psi$. En el origen no se definen condiciones, como punto de estancamiento. Como cualquiera de las líneas de corriente se pueden considerar como contorno fijo, los ejes positivos se pueden considerar como paredes, que conducen el flujo a una esquina en 90°. Las líneas equipotenciales son hipérbolas cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados y cuyas asíntotas son $y = \pm x$. Las líneas de corriente son hipérbolas equiláteras, de ejes $y = \pm x$ y asíntotas los ejes coordenados. De la forma polar de la función de corriente



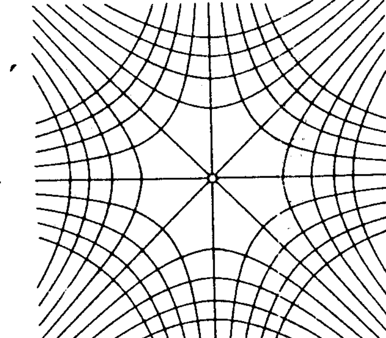


*Fig. 7.24 Red de corriente para el flujo alrededor de una esquina a 90°.*

se observa que las dos líneas $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ son las líneas de corriente $\psi = 0$.

Este caso se puede generalizar para obtener el flujo alrededor de una esquina de ángulo $x$. Examinando

$$\phi = Ar^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \qquad \psi = Ar^{\pi/\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha}$$

Se nota que la línea de corriente $\psi = 0$ viene dada mediante $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$. En la Fig. 7.25 se muestran dos redes de corriente para los casos $\alpha = 225°$ y $\alpha = 45°$.

### *Fuente*

Una línea normal al plano $xy$, desde la cual se imagina que el fluido fluye uniformemente en todas las direcciones que forman *ángulo recto*

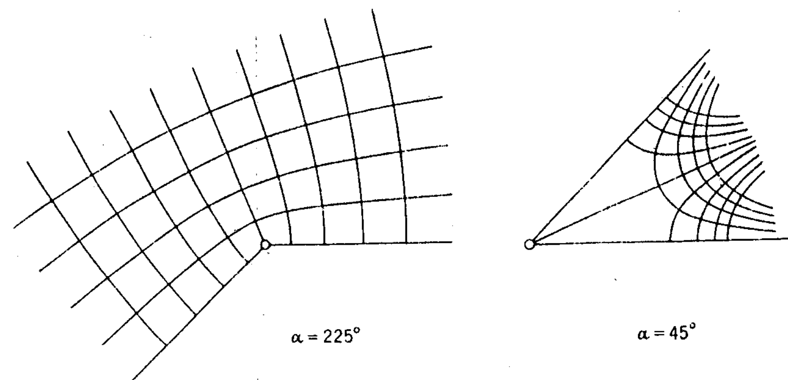



*Fig. 7.25 Red de corriente para el flujo a lo largo de dos superficies inclinadas.*

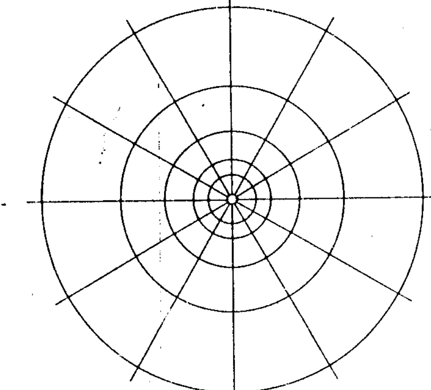


*Fig. 7.26* *Red de corriente para un manantial o un vórtice.*

con ella es una fuente. Aparece como un punto en los diagramas de flujo bidimensional habituales. El caudal por unidad de longitud de línea se llama *intensidad* de la fuente y se designa por $2\pi\mu$. Como las líneas de corriente son radiales desde la fuente, la velocidad a una distancia $r$ de la fuente se determina dividiendo la intensidad por el área del cilindro, o sea $2\pi\mu/2\pi r$. Por consiguiente, según la Ec. (7.4.4), la velocidad en cualquier dirección está dada por la derivada negativa en esa dirección del potencial de velocidad

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\mu}{r} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$

y

$$\phi = -\mu \ln r$$

es el potencial de velocidad, indicando ln el logaritmo natural y $r$ la distancia desde la fuente. Este valor de $\phi$ satisface la ecuación de Laplace para dos dimensiones.

Las líneas de corriente son líneas radiales desde la fuente, es decir,

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\mu}{r}$$

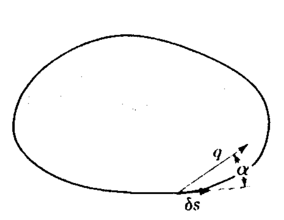
De la segunda ecuación

$$\psi = -\mu\theta$$

Las líneas de $\phi$ constante (líneas equipotenciales) y de $\psi$ constante se







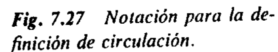



*Fig. 7.27* *Notación para la definición de circulación.*

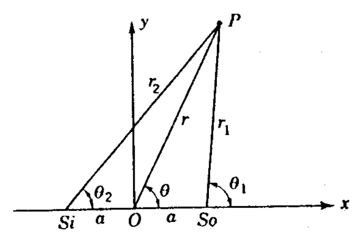



*Fig. 7.28* *Notación para la deducción del doblete bidimensional.*

representan en la Fig. 7.26. Un sumidero es una fuente negativa, es decir, una línea hacia la cual fluye un fluido.

*Vórtice*

Si se examina la red de corriente que resulta tomando la función de corriente de la fuente como potencial de velocidad,

$$\phi = -\mu\theta \qquad \psi = \mu \ln r$$

que también satisface a la ecuación de Laplace, se ve que las líneas equipotenciales son líneas radiales, y las líneas de corriente son circunferencias. La velocidad solo tiene componente tangencial, puesto que $\partial\phi/\partial r = 0$. Esta es

$$q = -\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\mu}{r}$$

ya que $r\,\delta\theta$ es el elemento de longitud en la dirección tangencial.

Refiriéndonos a la Fig. 7.27, el *flujo a lo largo de una curva cerrada* se llama *circulación*. Se define el flujo a lo largo de un elemento de curva como el producto del elemento longitudinal $\delta s$ de la curva por la componente de la velocidad tangencial a la curva, $q \cos\alpha$. Por consiguiente, la circulación $\Gamma$ alrededor de una curva cerrada $C$ es

$$\Gamma = \int_C q \cos\alpha\, ds = \int_C \mathbf{q}\cdot d\mathbf{s}$$

Se define el *vórtice* como el caso de flujo irrotacional que tiene como potencial de velocidad $\phi = -\mu\theta$, con lo que la circulación a lo largo de una curva cerrada que contiene al origen es constante e igual a la intensidad del vórtice $2\pi\mu$. Eligiendo una circunferencia de radio $r$ para de-

terminar la circulación, $\alpha = 0°$, $q = \mu/r$ y $ds = r\,d\theta$; por consiguiente,

$$\Gamma = \int_C q \cos\alpha\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{r} r\, d\theta = 2\pi\mu$$

En el punto $r = 0$, $q = \mu/r$ se hace infinito; por tanto, éste es un punto singular. En la Fig. 7.26 se presentan las líneas equipotenciales y las de corriente de un vórtice.

*Doblete*

El doblete bidimensional se define como el caso límite de una fuente y un sumidero de igual intensidad que se aproxima el uno al otro de tal forma que el producto de su intensidad por la distancia entre ellos permanece con el valor constante $\mu$, al que se llama *intensidad* del doblete. El eje del doblete es la línea recta que va desde el sumidero hacia la fuente, es decir, la línea recta a lo largo de la cual se aproximan el uno al otro.

En la Fig. 7.28, una fuente está situada en $(a,0)$ y un sumidero de igual intensidad en $(-a,0)$. El potencial de velocidad para ambos en un punto $P$ es

$$\phi = -m \ln r_1 + m \ln r_2$$

con $r_1$, $r_2$ medidos desde la fuente y el sumidero respectivamente hasta el punto $P$, siendo, por tanto, $2\pi m$ la intensidad de la fuente y la del sumidero. Para calcular el límite cuando $a$ tiende a cero, pero de tal forma que $2am = \mu$, la forma de la expresión de $\phi$ debe alterarse. Los términos $r_1$ y $r_2$ pueden expresarse en función de las coordenadas polares $r$, $\theta$ por la ley del coseno, de la manera siguiente:

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta = r^2\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right]$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta = r^2\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r}\cos\theta\right]$$

Haciendo intervenir estas expresiones en el valor de $\phi$ se obtiene

$$\phi = -\frac{m}{2}(\ln r_1^2 - \ln r_2^2) = -\frac{m}{2}\left\{\ln r^2 + \ln\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right]\right.$$

$$\left. - \ln r^2 - \ln\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r}\cos\theta\right]\right\}$$



Usando el desarrollo en serie

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\phi = -\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^2\right.$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^3 - \cdots - \left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^3 + \cdots\right\}$$

Después de simplificar

$$\phi = 2am\left[\frac{\cos\theta}{r} + \left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\cos\theta}{r} - \left(\frac{a}{r}\right)^4\frac{\cos\theta}{r} - \frac{4}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\cos^3\theta}{r} + \cdots\right]$$

Siendo $2am = \mu$ y tomando el límite para $a$ tendiendo a cero,

$$\phi = \frac{\mu\cos\theta}{r}$$

que es el potencial de velocidad para un doblete bidimensional situado en el origen con su eje en la dirección $+x$.

Utilizando las relaciones

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

para el doblete

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{\mu\cos\theta}{r} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2}\operatorname{sen}\theta$$

Integrando resulta

$$\psi = -\frac{\mu\operatorname{sen}\theta}{r}$$

que es la función de corriente del doblete. Las ecuaciones en coordenadas cartesianas son

$$\phi = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \qquad \psi = -\frac{\mu y}{x^2 + y^2}$$

Las anteriores pueden escribirse

$$\left(x - \frac{\mu}{2\phi}\right)^2 + y^2 = \frac{\mu^2}{4\phi^2} \qquad x^2 + \left(y + \frac{\mu}{2\psi}\right)^2 = \frac{\mu^2}{4\psi^2}$$

Las líneas de $\phi$ constante son circunferencias que pasan por el origen con centros en el eje de las $x$, y las líneas de corriente son circunferencias que también pasan por el origen con centros en el eje de las $y$, como están representadas en la Fig. 7.29. El origen es un punto singular donde la velocidad tiende a infinito.

### *Flujo uniforme*

La red de corriente de un flujo uniforme en la dirección de $-x$, $u = -U$, está expresada por

$$\phi = Ux \qquad \psi = Uy$$

En coordenadas polares,

$$\phi = Ur\cos\theta \qquad \psi = Ur\operatorname{sen}\theta$$

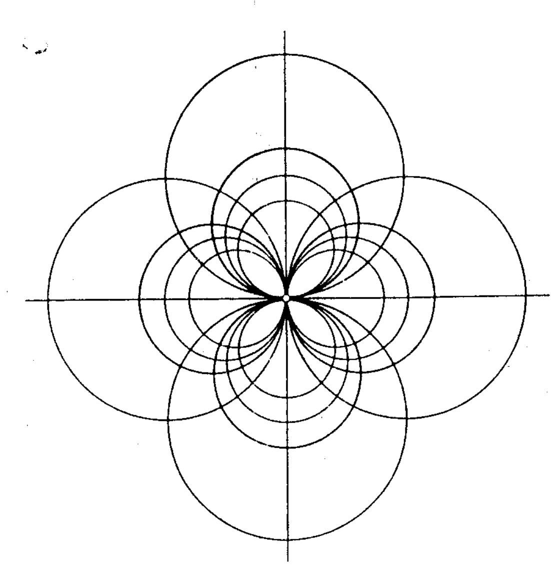


*Fig. 7.29 Líneas equipotenciales y líneas de corriente para el doblete bidimensional.*



### *Flujo alrededor de un cilindro circular*

La suma de la red de corriente del flujo debido a un doblete con la de un flujo uniforme da por resultado la red correspondiente a un flujo alrededor de un cilindro circular, así

$$\phi = Ur\cos\theta + \frac{\mu\cos\theta}{r} \qquad \psi = Ur\operatorname{sen}\theta - \frac{\mu\operatorname{sen}\theta}{r}$$

Como una línea de corriente en flujo permanente es un contorno posible, la línea de corriente $\psi = 0$ está dada por

$$0 = \left(Ur - \frac{\mu}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

que se satisface por $\theta = 0, \pi$, o para los valores de $r$ que satisfacen a la ecuación

$$Ur - \frac{\mu}{r} = 0$$

este valor es $r = a$, que es un cilindro circular, entonces

$$\mu = Ua^2$$

y la línea de corriente $\psi = 0$ es el eje $x$ y la circunferencia $r = a$. Las funciones potencial y de corriente de la red del flujo uniforme alrededor de un cilindro circular de radio $a$ son, sustituyendo $\mu$ en función de $a$,

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \qquad \psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

para el flujo uniforme en la dirección $-x$. Las líneas equipotenciales y las líneas de corriente para este caso están representadas en la Fig. 7.30.

La velocidad en cualquier punto puede obtenerse a partir de la función de corriente o del potencial de velocidad. Sobre la superficie del cilindro la velocidad es necesariamente tangencial y se expresa por $\partial\psi/\partial r$ para $r = a$; así,

$$q\Big|_{r=a} = U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta\Big|_{r=a} = 2U\operatorname{sen}\theta$$

La velocidad es cero (punto de estancamiento) para $\theta = 0, \pi$, y tiene el valor máximo $2U$ para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$. Para una presión dinámica nula en el infinito, la Ec. (7.5.7) para $p_0 = 0$; $q_0 = U$ da

$$p = \frac{\rho}{2}U^2\left[1 - \left(\frac{q}{U}\right)^2\right]$$

que sirve para cualquier punto del plano excepto el origen. Para los puntos del cilindro

$$p = \frac{\rho}{2} U^2(1 - 4\,\text{sen}^2\,\theta)$$

La máxima presión que se presenta en el punto de estancamiento es $\rho U^2/2$; y la presión mínima para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, es $-3\rho U^2/2$. Los puntos de presión dinámica nula son aquellos en los que sen $\theta = \pm\frac{1}{2}$, o sea $\theta = \pm\pi/6$, $\pm 5\pi/6$. Un tubo de Pitot estático y cilíndrico se hace practicando tres orificios en un cilindro a 0° y ±30°, pues la diferencia de presiones entre 0° y ±30° es la presión dinámica $\rho U^2/2$.

La resistencia sobre el cilindro se demuestra que es cero integrando las componentes de las fuerzas debidas a la presión en la dirección de $x$ sobre el cilindro entero; así

$$\text{Resistencia} = \int_0^{2\pi} pa \cos\theta\, d\theta = \frac{\rho a U^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 4\,\text{sen}^2\,\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$$

Análogamente, la sustentación sobre el cilindro es nula.

*Flujo alrededor de un cilindro circular con circulación*

La suma de la red de un flujo uniforme y de las redes de los flujos de un vórtice y de un doblete dan como resultado el flujo alrededor de un cilindro circular con circulación,

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\text{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

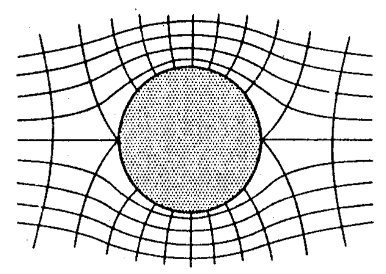


*Fig. 7.30* Líneas equipotenciales y líneas de corriente para el flujo alrededor de un cilindro circular.

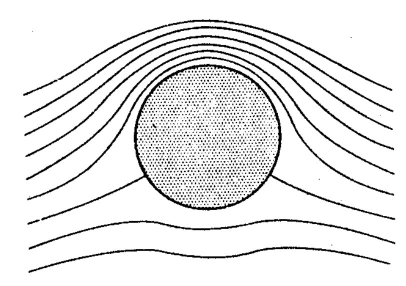


*Fig. 7.31* Líneas de corriente para el flujo alrededor de un cilindro circular con circulación.



La línea de corriente $\psi = (\Gamma/2\pi)\ln a$ es el cilindro circular $r = a$, y, a gran distancia del origen, la velocidad sigue siendo $u = -U$, lo que demuestra que aun con la adición del vórtice el flujo es alrededor de un cilindro. Algunas líneas de corriente se representan en la Fig. 7.31.

La velocidad en la superficie del cilindro, necesariamente tangente al cilindro, es

$$q = \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = 2U\,\text{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Los puntos de estancamiento se presentan donde $q = 0$, es decir,

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi U a}$$

Cuando la circulación es $4\pi Ua$, los dos puntos de estancamiento coinciden en $r = a$, $\theta = -\pi/2$. Para mayores circulaciones, el punto de estancamiento se separa del cilindro.

La presión en la superficie del cilindro es

$$p = \frac{\rho U^2}{2}\left[1 - \left(2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U}\right)^2\right]$$

La resistencia es también nula. La sustentación, sin embargo, vale

$$\text{Sustentación} = -\int_0^{2\pi} pa\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\rho a U^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 - \left(2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U}\right)^2\right]\text{sen}\,\theta\, d\theta = \rho U \Gamma$$

que demuestra que la sustentación es directamente proporcional a la densidad del fluido, a la velocidad en el infinito $U$ y a la circulación $\Gamma$. Esta sustentación, cuya línea de acción forma un ángulo recto con la velocidad $U$, se conoce con el nombre de *efecto Magnus*. El rotor de Flettner, usado en los barcos, se proyectó para utilizar este efecto, estando constituido por cilindros circulares con eje vertical montados sobre el barco y a los que se les hace girar por medio de motores para que se produzca una circulación alrededor de ellos. El aire que se mueve alrededor de los rotores produce el empuje en ángulo recto con la dirección del viento. La gran densidad de líneas de corriente en la parte superior del cilindro de la Fig. 7.31 indica que la velocidad es allí más alta y que en correspondencia la presión debe ser baja.

El flujo teórico alrededor de un cilindro circular con circulación se

puede transformar† en flujo alrededor de un ala de avión con la misma circulación y la misma sustentación.

En el ala del avión se origina una sustentación por la producción de una circulación alrededor de ella debida a su forma. Puede demostrarse† que el empuje ascensional es $\rho U\Gamma$ para cualquier cilindro cuando el flujo es bidimensional. El ángulo de inclinación del ala en relación con la velocidad de aproximación (ángulo de ataque) afecta grandemente a la circulación. Para grandes ángulos de ataque, el flujo no sigue al perfil del ala y la teoría pierde validez.

Se debe mencionar que todos los casos de flujo bidimensional de un fluido ideal se pueden manejar convenientemente con ayuda de la teoría de funciones de variable compleja y un sistema de *transformación conforme*, que transforme una red de corriente de una configuración a otra mediante una función de transformación de variable compleja adecuada.

*Ejemplo 7.3* En el origen de coordenadas hay una fuente de intensidad 0,5(m³/seg)/m y un vórtice de intensidad 1,5 m²/seg. Determinar la forma del potencial de velocidad y de la función de corriente. ¿Cuáles son las componentes de la velocidad en el punto $x = 2$, $y = 3$?

El potencial de velocidad para la fuente es

$$\phi = -\frac{0,5}{2\pi}\ln r$$

y la función de corriente correspondiente es

$$\psi = -\frac{0,5}{2\pi}$$

El potencial de velocidad para el vórtice es

$$\phi = -\frac{1,5}{2\pi}$$

y la función de corriente correspondiente es

$$\psi = \frac{1,5}{2\pi}\ln r$$

Sumando las respectivas funciones,

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}(\ln r + 3\theta)$$

y

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}(\theta - 3\ln r)$$

† V. L. Streeter, «Fluid Dynamics», págs. 137-155, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1948.



Las componentes de la velocidad tangencial y radial son

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{3}{4\pi r}$$

En (2,3), $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,61$, $v_r = 0,022$, $v_\theta = 0,066$.

## Problemas

**7.1** Calcular el gradiente de las funciones escalares bidimensionales siguientes:

(*a*) $\phi = -2\ln(x^2 + y^2)$ (*b*) $\phi = Ux + Vy$ (*c*) $\phi = 2xy$

**7.2** Calcular la divergencia de los gradientes de $\phi$ hallados en el Problema 7.1.

**7.3** Calcular el rotacional de los gradientes de $\phi$ hallados en el Problema 7.1.

**7.4** Para $\mathbf{q} = \mathbf{i}(x + y) + \mathbf{j}(y + z) + \mathbf{k}(x^2 + y^2 + z^2)$ hallar las componentes de la rotación en (2,2,2).

**7.5** Deducir la ecuación de continuidad para flujo bidimensional en coordenadas polares igualando a cero el flujo neto por unidad de tiempo en un elemento polar pequeño (Fig. 7.32).Es

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0$$

**7.6** La componente $x$ de la velocidad es $u = x^2 + z^2 + 5$, y la componente $y$ es $v = y^2 + z^2$. Hallar la componente $z$ de la velocidad más sencilla que satisfaga la continuidad.

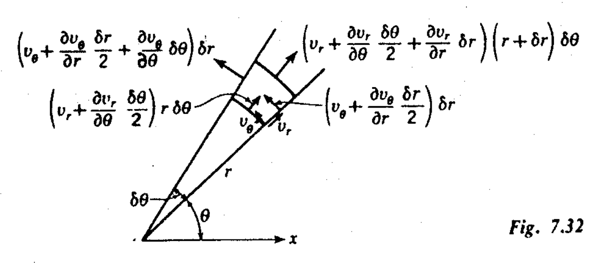



*Fig. 7.32*

**7.7** Un potencial de velocidad en flujo bidimensional es $\phi = y + x^2 - y^2$. Hallar la función de corriente para este flujo.

**7.8** La función de corriente bidimensional para un flujo es $\psi = 9 + 6x - 4y + 7xy$. Hallar el potencial de velocidad.

**7.9** Deducir las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que relacionan $\phi$ y $\psi$ para flujo bidimensional en coordenadas polares planas.

**7.10** Deducir a partir de la ecuación de continuidad en coordenadas polares del Prob. 7.5 la ecuación de Laplace en el mismo sistema de coordenadas.

**7.11** ¿Satisface la función $\phi = 1/r$ la ecuación de Laplace en dos dimensiones? ¿La satisface en flujo tridimensional?

*7.12* Utilizando las ecuaciones desarrolladas en el Prob. 7.9 hallar la función de corriente bidimensional para $\phi = \ln r$.

*7.13* Hallar la función de corriente de Stokes para $\phi = 1/r$.

*7.14* Para la función de corriente de Stokes $\psi = 9r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ hallar $\phi$ en coordenadas cartesianas.

*7.15* En el Prob. 7.14, ¿cuál es el caudal entre las superficies de corriente que pasan por los puntos $r = 1$, $\theta = 0$ y $r = 1$, $\theta = \pi/4$?

*7.16* Escribir las condiciones de contorno para flujo permanente alrededor de una esfera, de radio $a$, en su superficie y en el infinito.

*7.17* Un cilindro circular de radio $a$ tiene su centro en el origen y se traslada con velocidad $V$ en la dirección $y$. Escribir la condición de contorno en función de $\phi$ que debe satisfacerse en su superficie y en el infinito.

*7.18* Una fuente de intensidad 30 $m^3$/seg está localizada en el origen, y otra de intensidad 20 $m^3$/seg está en el punto (1,0,0). Encontrar las componentes de la velocidad $u$, $v$, $w$ en los puntos $(-1,0,0)$ y (1,1,1).

*7.19* Si la presión dinámica es cero en el infinito en el Prob. 7.18, para $\rho =$ 100 UTM/$m^3$, calcular la presión dinámica en $(-1,0,0)$ y (1,1,1).

*7.20* Una fuente de intensidad $m$, situada en el origen, se combina con un flujo uniforme de 15 m/seg, dando origen a un flujo tridimensional que tiene un punto de estancamiento en (1,0,0). Obtener para el flujo resultante el potencial de velocidad y la función de corriente.

*7.21* Utilizando simetría obtener el potencial de velocidad para un sumidero tridimensional de intensidad 750 l/seg, situado a 1 m de una barrera plana.

*7.22* Se quieren determinar las ecuaciones del flujo producido por un flujo uniforme de 12 m/seg alrededor de un cuerpo de Rankine de 4 m de longitud y 2 m de espesor en dirección transversal.

*7.23* Un manantial de intensidad 300 l/seg en (1,0,0) y un sumidero de la misma intensidad en $(-1,0,0)$ se combinan con un flujo uniforme de 7,5 m/seg en la dirección $-x$. Determinar el tamaño del cuerpo de Rankine formado por este flujo.

*7.24* Una esfera de 1 m de radio, con centro en el origen, está sumergida en un flujo de 6 m/seg, dirigido en la dirección $-x$. En el punto (4/3,0,0) la presión dinámica es 50 kg/$m^2$ y $\rho = 102$ UTM/$m^3$. Determinar la ecuación de la distribución de presiones en la superficie de la esfera.

*7.25* Demostrar, integrando a lo largo de la superficie de la esfera del Prob. 7.24, que la resistencia sobre la esfera es cero.

*7.26* Demostrar que si dos funciones de corriente $\psi_1$ y $\psi_2$ satisfacen ambas a la ecuación de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$ para $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

*7.27* Demostrar que si $u_1$, $v_1$ y $u_2$, $v_2$ son las componentes de la velocidad de dos potenciales de velocidad $\phi_1$ y $\phi_2$ que satisfacen la ecuación de Laplace, entonces para $\phi = \phi_1 + \phi_2$ las componentes de la velocidad son $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$.

*7.28* En (1,0) hay una fuente bidimensional y otra de la misma intensidad en $(-1,0)$. Construir el vector velocidad en (0,0), (0,1), $(0,-1)$, $(0,-2)$ y (1,1). (*Sugerencia*: Utilizando los resultados del Prob. 7.27, trazar las componentes de la velocidad sumando las componentes individuales de las velocidades inducidas en el punto en cuestión por cada fuente, sin considerar la otra, debido a su intensidad y situación.)

*7.29* Determinar el potencial de velocidad para una fuente situada en (1,0). Escribir la ecuación del potencial de velocidad para el sistema de fuentes descrito en el Prob. 7.28.



*7.30* Dibujar un sistema de líneas de corriente para cada fuente del Prob. 7.28 y a partir de este diagrama construir las líneas de corriente para el flujo combinado. (*Sugerencia*: Dibujar separadas un ángulo de $\pi/6$ las líneas de corriente de cada fuente. Combinar después los puntos de intersección de las líneas para las que $\psi_1 + \psi_2$ sea constante.)

*7.31* ¿Forma la línea $x = 0$ una línea del campo de flujo descrito en el Prob. 7.28 para la que no hay componente de velocidad normal a él? ¿Es una línea de corriente? ¿Puede ser la traza de una lámina plana sólida que estuviera sumergida en el flujo? ¿Representa el potencial de velocidad determinado en el Prob. 7.29 el flujo en la región $x > 0$ para una fuente situada a distancia unidad de una pared plana? Justificar las respuestas.

*7.32* Determinar la ecuación de la velocidad sobre la línea $x = 0$ para el flujo descrito en el Prob. 7.28. Hallar una ecuación para la presión sobre la superficie cuya traza sea $x = 0$. ¿Cuál es la fuerza sobre una cara de este plano debida a la fuente situada a distancia unidad de él? El fluido es agua.

*7.33* En flujo bidimensional, ¿cuál es la naturaleza del flujo dado por $\phi = 7x + 2 \ln r$?

*7.34* Utilizando un método análogo al sugerido en el Prob. 7.30 dibujar las líneas potenciales para el flujo dado en el Prob. 7.33.

*7.35* Utilizando la sugerencia del Prob. 7.30 dibujar la red de corriente para un flujo que consta de una fuente y un vórtice situados en el origen. Utilizar el mismo valor de $\mu$ para la fuente y el vórtice.

*7.36* Una fuente que descarga 1800 l/seg m está situada en $(-1,0)$, y un sumidero de intensidad doble está situado en (2,0); encontrar la velocidad en los puntos (0,1) y (1,1).

*7.37* Elegir la intensidad del doblete necesario para representar un flujo uniforme de 15 m/seg alrededor de un cilindro de radio 1,5 m.

*7.38* Desarrollar las ecuaciones del flujo alrededor del «cilindro de Rankine» formado por una fuente, un sumidero igual y un flujo uniforme. Si la distancia entre la fuente y el sumidero es $2a$, su intensidad es $2\pi\mu$ y $U$ es la velocidad uniforme, desarrollar una ecuación para la longitud del cuerpo.

*7.39* Un cilindro circular de diámetro 2,4 m gira a 500 r.p.m. Cuando está en una corriente de aire, de $\rho = 0{,}105$ UTM/$m^3$ que se mueve a 120 m/seg, ¿cuál es la fuerza de sustentación por metro del cilindro suponiendo un rendimiento de 0,9 al obtener la circulación a partir de la rotación?

*7.40* Un flujo no permanente puede transformarse en flujo permanente

(*a*) independientemente de la naturaleza del problema;
(*b*) cuando los dos cuerpos se mueven uno hacia el otro en un fluido infinito;
(*c*) cuando un cuerpo asimétrico gira en un fluido infinito;
(*d*) cuando un solo cuerpo se traslada en un fluido infinito;
(*e*) bajo ninguna circunstancia.

*7.41* Elegir el valor de $\phi$ que satisface a la ecuación de continuidad.

(*a*) $x^2 + y^2$ (*b*) sen $x$ (*c*) $\ln(x + y)$ (*d*) $x + y$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.42* Las dimensiones físicas de las ecuaciones de Euler del movimiento son

(*a*) fuerza por unidad de masa;

(*b*) velocidad;
(*c*) energía por unidad de peso;
(*d*) fuerza por unidad de peso;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.43* Las ecuaciones de Euler del movimiento pueden integrarse cuando se supone que

(*a*) se satisface la ecuación de continuidad;
(*b*) el fluido es incompresible;
(*c*) existe un potencial de velocidad y la densidad es constante;
(*d*) el flujo es rotacional e incompresible;
(*e*) el fluido carece de viscosidad.

*7.44* Las ecuaciones del movimiento de Euler establecen matemáticamente que en cada punto

(*a*) el caudal en masa que entra iguala al caudal en masa que sale;
(*b*) la fuerza por unidad de masa iguala a la aceleración;
(*c*) la energía no cambia con el tiempo;
(*d*) el tercer principio de Newton del movimiento se cumple;
(*e*) la cantidad de movimiento del fluido es constante.

*7.45* En el flujo irrotacional de un fluido ideal

(*a*) existe un potencial de velocidad;
(*b*) todas las partículas deben moverse siguiendo líneas rectas;
(*c*) el movimiento debe ser uniforme;
(*d*) el flujo es siempre permanente;
(*e*) la velocidad debe ser nula en el contorno.

*7.46* Una función $\phi$ que satisface la ecuación de Laplace

(*a*) debe ser lineal en $x$ e $y$;
(*b*) es un caso posible de flujo rotacional;
(*c*) no es necesario que satisfaga a la ecuación de continuidad;
(*d*) es un caso posible de flujo de un fluido;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.47* Si $\phi_1$ y $\phi_2$ son cada una soluciones de la ecuación de Laplace, ¿cuál de las siguientes es también solución?

(*a*) $\phi_1 - 2\phi_2$ (*b*) $\phi_1\phi_2$ (*c*) $\phi_1/\phi_2$ (*d*) $\phi_1{}^2$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.48* Elegir la relación que debe satisfacerse si el flujo es irrotacional.

(*a*) $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = 0$ (*b*) $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$
(*c*) $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0$ (*d*) $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.49* La ecuación de Bernoulli en flujo permanente de un fluido ideal establece que

(*a*) la velocidad es constante a lo largo de una línea de corriente;
(*b*) la energía es constante a lo largo de una línea de corriente, pero puede variar al cambiar la línea de corriente;



(*c*) cuando la velocidad aumenta, la presión aumenta;
(*d*) la energía es constante a través del fluido;
(*e*) el caudal que entra, menos el que sale, en una pequeña región debe ser cero.

*7.50* La función de corriente de Stokes se aplica a

(*a*) todos los casos de flujo tridimensional de fluido ideal;
(*b*) solo fluido ideal (no viscoso);
(*c*) solo fluido irrotacional;
(*d*) casos de simetría axial;
(*e*) ninguno de estos casos.

*7.51* La función de corriente de Stokes vale $\psi = 1$ en el origen y $\psi = 2$ en (1,1,1). El caudal a través de la superficie entre estos dos puntos es

(*a*) 1 (*b*) $\pi$ (*c*) $2\pi$ (*d*) 4 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.52* Elegir la relación que debe cumplirse en flujo irrotacional, bidimensional:

(*a*) $\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y$ (*b*) $\partial\phi/\partial x = -\partial\psi/\partial y$ (*c*) $\partial\phi/\partial y = \partial\psi/\partial x$
(*d*) $\partial\phi/\partial x = \partial\phi/\partial y$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.53* La función de corriente bidimensional

(*a*) es constante a lo largo de una superficie equipotencial;
(*b*) es constante a lo largo de una línea de corriente;
(*c*) está definida únicamente para el flujo irrotacional;
(*d*) relaciona la velocidad con la presión;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.54* En flujo bidimensional $\psi = 4$ m²/seg en (0,2) y $\psi = 2$ m²/seg en (0,1). El caudal entre los dos puntos es

(*a*) de izquierda a derecha (*b*) $4\pi$(m³/seg)/m (*c*) 2(m³/seg)/m
(*d*) $1/\pi$(m³/seg)/m (*e*) ninguna de las respuestas anteriores

*7.55* La condición de contorno para flujo permanente de un fluido ideal es que

(*a*) la velocidad sea cero en el contorno;
(*b*) la componente de la velocidad normal a los contornos sea cero;
(*c*) la componente de la velocidad tangente a los contornos sea cero;
(*d*) los contornos tienen que estar en reposo;
(*e*) la ecuación de continuidad tiene que satisfacerse.

*7.56* Una superficie equipotencial

(*a*) es tal que la velocidad no tiene componente tangencial a ella;
(*b*) está formada por líneas de corriente;
(*c*) es una superficie de corriente;
(*d*) es una superficie de igual presión dinámica;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*7.57* Una fuente en flujo bidimensional

(*a*) es un punto desde el cual se imagina que el fluido fluye hacia afuera uniformemente en todas las direcciones;

(*b*) es una línea desde la cual se imagina que el fluido fluye uniformemente en todas las direcciones que forman ángulo recto con ella;
(*c*) tiene una intensidad definida por el caudal que sale por unidad de longitud;
(*d*) tiene líneas de corriente que son circunferencias concéntricas;
(*e*) tiene un potencial de velocidad independiente del radio.

7.59 El vórtice bidimensional

(*a*) tiene una intensidad dada por la circulación alrededor de una curva cerrada que incluya en su interior al origen;
(*b*) tiene líneas de corrientes radiales;
(*c*) tiene una circulación nula alrededor de él;
(*d*) tiene una distribución de velocidades que varía directamente con la distancia radial desde el origen;
(*e*) origina una distribución de velocidades rotacionales a través del fluido.

## *Parte segunda*

# *Aplicaciones de la mecánica de los fluidos*

En la Parte primera se han desarrollado e ilustrado con muchos ejemplos y aplicaciones simples los conceptos y ecuaciones fundamentales. Se han expuesto la resistencia al movimiento de los fluidos, el análisis dimensional, el flujo compresible y el flujo fluido ideal. En la Parte segunda se estudian varios de los importantes campos de aplicación que ofrece la mecánica de los fluidos: turbo maquinaria, medición de diversas magnitudes en el flujo fluido, conducción de fluidos por conductos cerrados y por canales abiertos, y control automático por fluidos.

# 8

# *Medidas y control en el flujo fluido*

Las medidas del flujo fluido comprenden la determinación de la presión, velocidad, caudal, ondas de choque, gradientes de densidad, turbulencia y viscosidad. Hay muchos métodos para efectuar dichas medidas, por ejemplo, directos, indirectos, gravimétricos, volumétricos, electrónicos, electromagnéticos y ópticos. Los métodos directos resuelven este problema determinando el volumen o el peso del fluido que pasa a través de una sección en un cierto tiempo. Las medidas indirectas determinan la altura, la diferencia de presiones o de velocidades en varios puntos de una sección y con estos datos calculan el caudal. Los métodos más exactos son los gravimétricos y volumétricos, en los que el peso o el volumen que pasa en un intervalo de tiempo se mide con balanzas o recipientes calibrados para un intervalo de tiempo que se mide con un cronómetro.

En este capítulo se estudian en primer lugar las medidas de presión y de velocidad, y a continuación la medida óptica del flujo, los medidores de desplazamiento positivo, los medidores de velocidad, la medida del flujo en un río, los aparatos electromagnéticos de medida del flujo, la medida de la turbulencia y la viscosidad para terminar con los amplificadores de fluido y los controles.

## 8.1 Medida de la presión

El valor de la presión puede determinarse midiendo con cualquier dispositivo la velocidad de la corriente fluida o el caudal y calculando después la presión con la ecuación de Bernoulli. La presión estática en un fluido en movimiento es la presión en éste cuando no está perturbado. La Fig. 8.1 muestra un método para la medida de la presión estática, utilizando el llamado *orificio piezométrico* o *piezómetro* abierto. Cuando el flujo es uniforme, como se indica, la presión varía en dirección normal a las líneas de corriente hidrostáticamente; por consiguiente, midiendo la presión en la pared puede determinarse el valor de la presión en cualquier

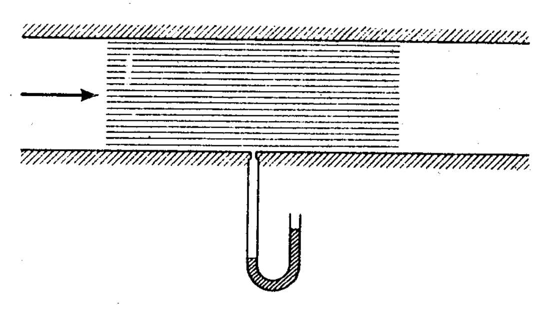


*Fig. 8.1 Orificio piezométrico para medida de la presión estática.*

otro punto de la sección. El piezómetro abierto debe ser pequeño, con una longitud de entrada de dos veces el diámetro por lo menos, y debe ser normal a la superficie, sin rugosidades en sus bordes que producirían pequeños remolinos que falsean la medida. Es aconsejable un pequeño achaflanado en la abertura. Cualquier ligera rebaba o aspereza en la abertura pueden causar errores en la medida; por eso es conveniente conectar varios de estos piezómetros juntos en un *anillo piezométrico*. Cuando la superficie de la conducción es áspera en las proximidades de la abertura, la lectura es falsa. Cuando estas pequeñas irregularidades existen, es conveniente suavizar la superficie alrededor de la abertura del piezómetro.

Cuando las superficies de la conducción son rugosas, debe usarse el *tubo estático* (Fig. 8.2). Consiste en un tubo cuyo extremo cerrado va dirigido hacia aguas arriba y que tiene unos agujeros en su superficie aguas abajo de la proa. Se supone que el fluido se mueve a lo largo de las aberturas como si no estuviese perturbado por la presencia del tubo.

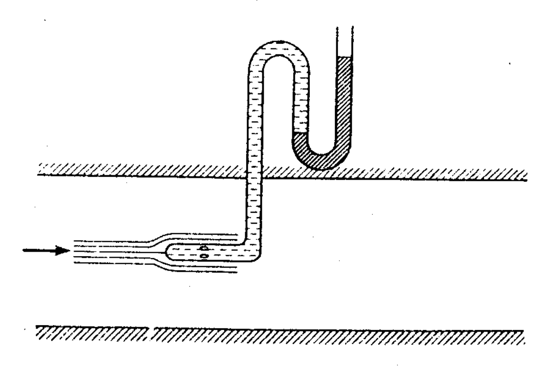


*Fig. 8.2 Tubo estático.*



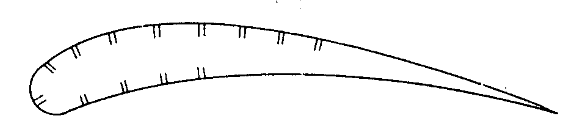


*Fig. 8.3 Orificios de presión estática en un cuerpo sumergido en un fluido.*

Sin embargo, existen alteraciones en el flujo debido a la proa y a la varilla del aparato normal al flujo. El tubo estático debe ser calibrado, ya que se pueden obtener lecturas muy altas o muy bajas. Cuando no da la verdadera presión estática, la diferencia $\Delta h$ normalmente varía con el cuadrado de la velocidad del flujo a lo largo del tubo, es decir,

$$\Delta h = C\frac{v^2}{2g}$$

en el cual $C$ se determina remolcando el tubo en aguas quietas donde la presión y la velocidad son conocidas o bien introduciendo el tubo en una tubería lisa que lleve un anillo piezométrico.

Dichos tubos son relativamente insensibles al número de Reynolds y a números de Mach inferiores a la unidad. Su alineación con el flujo no es crítica, de manera que se debe esperar un error de un pequeño tanto por ciento para un ángulo de oblicuidad de 15°.

La distribución de la presión estática alrededor de la superficie de un cuerpo puede determinarse haciendo lecturas en una serie de piezómetros abiertos, colocados a lo largo de la superficie como indica la Fig. 8.3. En el Cap. 7 se estudió el flujo alrededor de un cilindro circular, utilizando la teoría del flujo irrotacional. Se podía determinar la presión en cada punto del cilindro, y si se conocían las presiones, se podía determinar con la misma exactitud la velocidad de la corriente libre y su dirección respecto a determinado eje coordenado. Esta distribución de la presión determinada corresponde notablemente con la que se observa en la cara frontal de un cilindro en un fluido real para un amplio margen de números de Reynolds. Existe la misma correspondencia entre las medidas teóricas para el flujo alrededor de una esfera y las medidas reales que se observan en la esfera delante del punto de separación (ver Fig. 5.21). Se ha desarrollado una prueba interesante que utiliza este hecho para estudiar el flujo en una región donde se producen grandes cambios de velocidad en módulo y dirección y donde interesa obtener una medida local. Haciendo tres agujeros en el ecuador de una esfera pequeña y otros dos en el meridiano que pasa por el agujero central de los tres anteriores uno situado encima y el otro debajo de él, y midiendo las distintas diferencias de presión que hay en cada una de estas tomas, se pueden determinar las componentes horizontal y vertical de la velocidad. Como la teoría

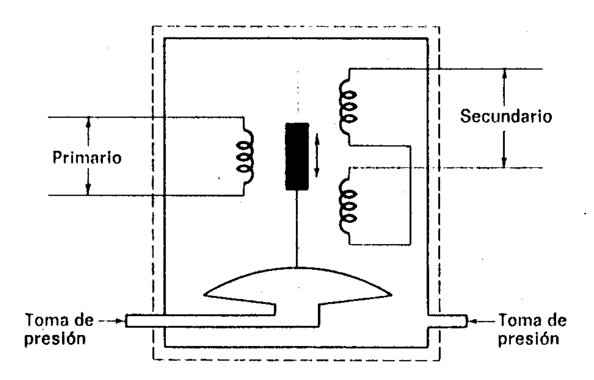



*Fig. 8.4 Diagrama esquemático de un transductor de presión que utiliza un transformador diferencial. (Sanborn Co.)*

y los resultados experimentales no coinciden exactamente, es necesario hacer una curva de calibración del instrumento.

Con frecuencia se mide la presión en los manómetros o micromanómetros formados por un tubo en U, que se describieron en el Cap. 2. Con un micromanómetro se puede detectar una variación en la altura del fluido manométrico de 0,03 mm. Si el peso específico del fluido es la unidad, este valor corresponde a una variación de presión de 0,000003 kg/cm$^2$. Se pueden obtener sensibilidades ligeramente mayores empleando perfeccionamientos especiales del micromanómetro como el instrumento de Chattock†.

Se puede obtener la misma sensibilidad con los transductores eléctricos, que determinan las variaciones de presión midiendo el desplazamiento de un diafragma o un fuelle. En la Fig. 8.4 se representa un diagrama esquemático de una disposición de este tipo. Cuando el diafragma acusa una diferencia de presión entre el gas que hay dentro de la cámara de presión y el que está fuera, el núcleo del transformador diferencial se desplaza entre las bobinas. La salida eléctrica que da el transformador depende de la posición del núcleo que, como hemos dicho, viene determinada por la diferencia de presión a ambos lados del diafragma. Por tanto, el instrumento hace corresponder toda variación de presión por una variación eléctrica. Se pueden obtener transductores de este tipo que cubran un amplio margen de presiones mediante distintas características elásticas del diafragma.

También se puede detectar la deformación de muchos tipos de elementos elásticos con *bandas extensimétricas* (strain gages). En esencia se trata de un trozo de alambre fino que se une a la pieza elástica que se va

† Para una descripción más profunda de este aparato ver S. Goldstein, «Modern Developments in Fluid Mechanics», págs. 274-276, Oxford University Press, Londres, 1938.



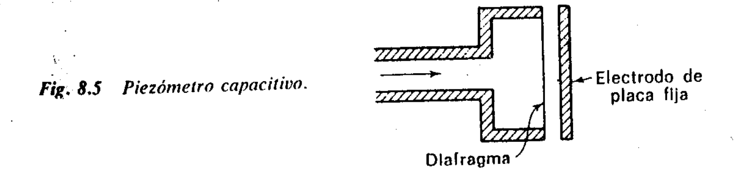



*Fig. 8.5 Piezómetro capacitivo.*

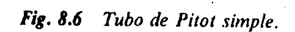
a deformar. Cuando la pieza cambia su forma, se estira; por tanto, el alambre fino se alarga y se altera su resistencia eléctrica. El cambio en la resistencia se puede medir con un circuito con un puente de Wheatstone análogo al de la Fig. 8.11. Después todo lo que se necesita es calibrar el aparato para hacer corresponder los cambios de resistencia con los cambios de presión que producen la deformación del elemento elástico.

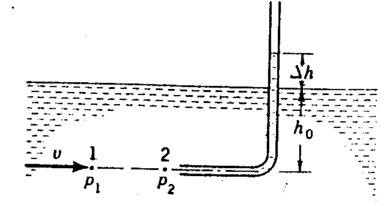
También se puede determinar la presión utilizando las propiedades *piezoeléctricas* de algunos cristales, como el cuarzo o sal de Rochelle. La presión produce una deformación en los cristales que liberan una pequeña carga eléctrica que se puede medir con aparatos electrónicos. Otro método (Fig. 8.5) es el instrumento de *capacidad*, en el que la presión deforma un diafragma que varía la capacidad entre la placa fija y el diafragma.

## 8.2 Medida de la velocidad

Como el conocimiento del valor de la velocidad en un cierto número de puntos de una sección transversal permite el cálculo del caudal, la medida de la velocidad es paso importante para la determinación del flujo. Se puede hallar la velocidad midiendo el tiempo que tarda una partícula identificable en recorrer una distancia conocida. Este procedimiento se emplea siempre que sea conveniente o necesario. Se ha desarrollado esta técnica para estudiar el flujo en regiones que son tan pequeñas que el flujo normal se modificaría grandemente e incluso desaparecería si se introdujera un instrumento para medir la velocidad. Si se puede conseguir una región transparente, mediante una luz de gran intensidad y un microscopio potente se pueden fotografiar diminutas impurezas del fluido con una cámara tomavistas de gran velocidad. A partir de estas películas se puede determinar la velocidad de las partículas, y, por tanto, la del fluido, en una región pequeña.

Sin embargo, en general se emplea un aparato que no mide directamente la velocidad, sino que da una cantidad medible que se puede relacionar con la velocidad. El *tubo de Pitot* es uno de los aparatos más exactos para medir la velocidad. En la Fig. 8.6, un tubo de cristal, o una aguja hipodérmica, doblado en ángulo recto se emplea para la medida de la velocidad $v$ en un canal abierto. La abertura del tubo está dirigida aguas arriba, de modo que el fluido penetre dentro de la abertura y suba por el


*Fig. 8.6* Tubo de Pitot simple.




tubo hasta que la presión aumente lo suficiente dentro del mismo y equilibre el impacto producido por la velocidad. Enfrente mismo de la abertura el fluido está en reposo. La línea de corriente que pasa por 1, llega al punto 2, llamado *punto de estancamiento*, donde el fluido está en reposo, y allí se divide y pasa a lo largo del exterior del tubo. La presión en 2 viene dada por la altura de la columna de líquido en el tubo. La aplicación de la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2 nos conduce a

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = h_0 + \Delta h$$

como ambos puntos están a la misma altura, y como $p_1/\gamma = h_0$, la ecuación se reduce a

$$\frac{v^2}{2g} = \Delta h \qquad (8.2.1)$$

o sea

$$v = \sqrt{2g\,\Delta h} \qquad (8.2.2)$$

Prácticamente es muy difícil medir la altura $\Delta h$ desde una superficie libre.

El tubo de Pitot mide la presión de estancamiento, a la que también se llama la presión *total*. Esta presión total se compone de dos partes, la presión estática $h_0$ y la presión dinámica $\Delta h$, expresada en altura de columna del fluido (Fig. 8.6). La presión dinámica se relaciona con la altura de velocidad mediante la Ec. (8.2.1).

Combinando la medida de la presión estática con la medida de la presión total, es decir, midiendo cada una con su aparato correspondiente y conectando los extremos a los de un manómetro diferencial, puede obtenerse la presión dinámica. La Fig. 8.7 muestra esta disposición. La ecuación de Bernoulli aplicada desde 1 a 2 da

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} \qquad (8.2.3)$$



La ecuación de las presiones a través del manómetro, en metros de agua es

$$\frac{p_1}{\gamma} S + kS + R'S_0 - (k + R')S = \frac{p_2}{\gamma} S$$

Simplificando

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = R'\left(\frac{S_0}{S} - 1\right) \qquad (8.2.4)$$

Y sustituyendo $(p_2 - p_1)/\gamma$ en la Ec. (8.2.3) y despejando $v$ obtenemos:

$$v = \sqrt{2gR'\left(\frac{S_0}{S} - 1\right)} \qquad (8.2.5)$$

El tubo de Pitot también es insensible a la alineación del flujo, y se produce un error de solo un pequeño tanto por ciento si el tubo tiene un ángulo de oblicuidad de menos de 15°. Sin embargo, si el ángulo de oblicuidad es aproximadamente de 45°, no solo sucede que la relación entre la presión y la velocidad de flujo no es sencilla, sino que variaciones pequeñas en el ángulo de oblicuidad producen grandes variaciones en la presión. Este hecho se utiliza para construir un medidor de oblicuidad. Se colocan dos tubos de Pitot pequeños en un soporte común de manera que el plano de los tubos sea paralelo al flujo y sus ejes estén alineados ±45° con la dirección del flujo. En estas condiciones, la diferencia de presión entre los dos tubos de Pitot debe ser cero si está bien realizada la experiencia. Si, ahora, se gira la sonda de manera que el plano de los tubos siga siendo paralelo al flujo, uno de los tubos de Pitot formará

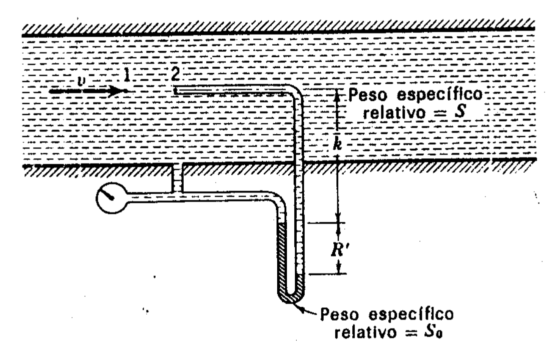



*Fig. 8.7* Utilización del tubo de Pitot y del orificio piezométrico para la medida de la velocidad.

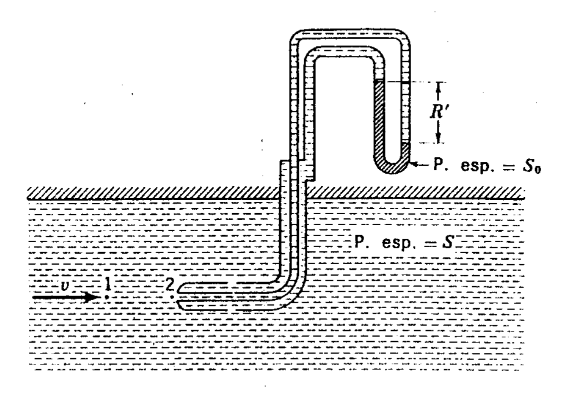



*Fig. 8.8* Tubo de Pitot estático.

con la dirección del flujo un ángulo mayor que 45° y el otro un ángulo menor. Esto dará lugar a una diferencia de presión grande entre los dos tubos de Pitot. Ajustando cuidadosamente el medidor de oblicuidad hasta que se obtenga una lectura nula, se puede determinar la dirección del flujo. Dichas sondas se pueden hacer muy pequeñas para investigaciones sobre la capa límite.

El tubo estático y el tubo de Pitot pueden estar montados en un único instrumento llamado *tubo de Pitot estático* (Fig. 8.8). Analizando este sistema de manera análoga a la hecha con la Fig. 8.7, se llega a las mismas relaciones. La Ec. (8.2.5) da la velocidad; pero debido a la inexactitud de la medida de la presión estática se aplica un coeficiente $C$ de corrección,

$$v = C\sqrt{2gR'\left(\frac{S_0}{S} - 1\right)} \qquad (8.2.6)$$

Se ha proyectado un tubo de Pitot estático, el *tubo Prandtl*, de tal forma que las perturbaciones del flujo producidas por la proa y la varilla de sujeción sean tales que $C$ sea igual a 1 en la ecuación. En otra clase de tubos estáticos de Pitot ha de determinarse la constante $C$ mediante un calibrado previo.

Se pueden hacer tubos de Pitot estáticos de modo que el diámetro exterior sea aproximadamente 3 mm. Sin embargo, los orificios para las tomas de presión son de tamaño tan pequeño que dan lugar a dificultades por obstrucción y también por atrapar aire cuando se emplean con líquidos, problemas que no se presentan cuando se utilizan para medir velocidades de gases.

Una vez que se ha utilizado una sonda que es lo suficientemente pequeña para que la medida de una velocidad local, se puede reconocer un conducto para determinar la cantidad del flujo. Se multiplican las lecturas de velocidad por un área para la que la medida sea representativa, y la suma de estos resultados da el caudal total.



También se utilizan las sondas de velocidad para examinar una superficie de control que rodea un cuerpo sumergido en un fluido a fin de determinar el caudal neto de cantidad de movimiento. Se construyen comprobadores de estela para determinar la resistencia en los perfiles de ala, y la sonda esférica mencionada en la Sec. 8.1 se realizó para examinar la región detrás de un casco de barco para hallar la resistencia viscosa.

## *Termopares calentados*

Se puede construir un termopar uniendo dos alambres de materiales distintos para formar un circuito continuo. Si cada una de las uniones está a una temperatura distinta, se originará en el circuito una corriente eléctrica como resultado de los efectos termoeléctricos que se producen. La intensidad de esta corriente está directamente relacionada con la diferencia de temperaturas entre las dos uniones, y si se puede medir, se puede disponer de un medio relativamente adecuado para determinar diferencias de temperatura. Sin embargo, mediante perfeccionamientos posteriores del diseño se puede construir una sonda de medida de velocidad utilizando el principio patentado de Haystings (ver Fig. 8.9). Un circuito en puente de corriente alterna y bajo voltaje tiene como elementos sensibles dos termopares de metales nobles. Los termopares $A$ y $B$ se calientan mediante la corriente alterna. Una variación en el flujo produce una variación en la temperatura de los termopares, lo que da lugar a una variación en la corriente continua que procede de los termopares.

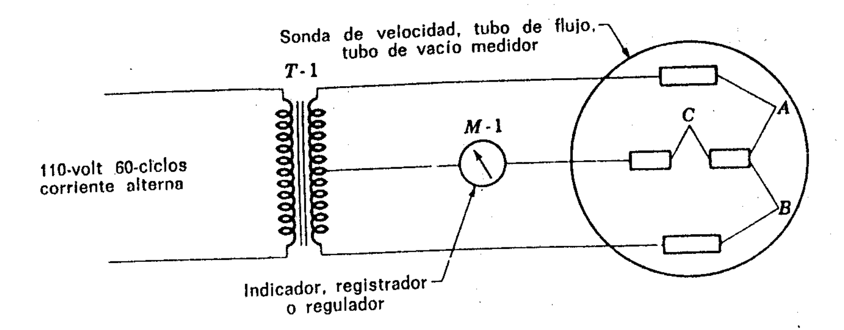



*Fig. 8.9* Diagrama esquemático de una sonda de velocidad de termopar calentado. (Patentes U. S. 2.540.822, 2.652.723, 2.745.283 y patentes en tramitación, Haystings-Raydist Inc.)

En el circuito de medición de corriente continua se coloca un tercer termopar $C$. Este último no se calienta y es del mismo tamaño que los del circuito de corriente alterna. Una variación en la temperatura ambiente produce voltajes en todos los termopares; pero los efectos transitorios en los elementos calentados son iguales y de signo contrario que en el no calentado, de modo que el termopar $C$ compensa los efectos de un cambio en la temperatura ambiente. Si se instala una sonda en una tubería, un conducto o una línea de transporte en un punto de velocidad media, la indicación resultante multiplicada por el área de la sección recta será igual al caudal total. Por tanto, estos instrumentos se pueden emplear también como medidores de caudal. Son válidas tanto las sondas direccionales como las omnidireccionales, siendo estas últimas capaces de detectar velocidades del aire tan bajas como 1,50 m/min.

La investigación está yendo ahora a utilizar termistores calentados, instrumentos sólidos que experimentan una variación grande en la resistencia para variaciones pequeñas de la temperatura, para medir velocidades de flujo de líquidos.

*Medida de la velocidad y la temperatura en flujo compresible*

El tubo de Pitot estático se puede utilizar para determinar la velocidad en flujo compresible. En la Fig. 8.8 la reducción de velocidad de la corriente libre en 1 a cero en 2 se produce muy rápidamente sin transferencia de calor significativo, y el rozamiento desempeña un papel muy pequeño, por lo que se puede suponer que la compresión es isoentrópica. Aplicando la Ec. (6.3.7) a los puntos 1 y 2 de la Fig. 8.8 con $V_2 = 0$,

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \frac{kR}{k-1}(T_2 - T_1) = c_p T_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \qquad (8.2.7)$$

La sustitución de $c_p$ es a partir de la Ec. (6.1.8). Con la Ec. (6.1.17)

$$\frac{V_1^2}{2} = c_p T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] = c_p T_2\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k}\right] \qquad (8.2.8)$$

Se puede obtener la presión estática $p_1$ a partir de los orificios laterales del tubo de Pitot y la presión de estancamiento a partir del orificio de choque llevada a un manómetro simple, o se puede hallar $p_2 - p_1$ del manómetro diferencial. Si el tubo no está diseñado para medir la presión estática verdadera, se debe calibrar y calcular dicha presión.

La medida de la temperatura del flujo no perturbado de un gas compresible se debe hacer indirectamente, midiendo la velocidad del flujo y la temperatura de estancamiento. Despejando $T_1$ de la Ec. (8.2.7),



$$T_1 = T_2 - \frac{V_1^2}{2c_p} \qquad (8.2.9)$$

$V_1$ se obtiene de las medidas del tubo de Pitot estático. $T_2$, temperatura verdadera de estancamiento, es difícil de obtener debido al intercambio de calor con el elemento sensible a la temperatura. Se han desarrollado aparatos† que constan de un termopar, con blindaje para que se mida la temperatura de estancamiento verdadera. Se pueden aplicar además factores de corrección a las lecturas de temperatura, y los aparatos se deben calibrar.

*El anemómetro de hilo caliente*

Las velocidades de gases se miden con éxito mediante este aparato. Un hilo de platino de corta longitud es calentado por una corriente eléctrica. La resistencia eléctrica del hilo es función de su temperatura. El flujo de un gas alrededor de un hilo caliente lo enfría y de este modo varía su resistencia eléctrica. Dejando constante la tensión o la intensidad de la corriente en el hilo mediante un circuito conveniente, la variación en intensidad o tensión, respectivamente, son función de la velocidad del flujo gaseoso que rodea al hilo caliente. Este hilo debe ser calibrado previamente colocándolo en una corriente gaseosa cuya velocidad se conozca. El anemómetro de hilo caliente responde rápidamente a los cambios de velocidad del gas y es el medio más práctico para medir las rápidas fluctuaciones causadas por la turbulencia en un punto.

En las Figs. 8.10 y 8.11 se representan los circuitos para los dos sistemas. En ambos se utiliza un puente de Wheatstone, con el hilo caliente formando una resistencia y siendo las demás resistencias $R_1$, $R_2$, $R_3$. En el circuito de resistencia constante, se mantiene constante la temperatura del hilo y, por tanto, la resistencia permanece constante. En primer lugar se ajusta el galvanómetro de manera que su lectura sea cero. Después, para una variación del flujo en el hilo, se ajusta la resistencia variable $B$ para que la lectura del galvanómetro vuelva a ser cero, y habrá variado la lectura del voltímetro. Por calibración en una corriente de velocidad conocida, la lectura del voltímetro está relacionada con la velocidad del fluido.

En el circuito de voltaje constante (Fig. 8.11) se ajusta en primer lugar la resistencia variable $B$ de manera que el galvanómetro marque cero cuando se exponga el hilo caliente al fluido en reposo. A continuación

† A. Franz, Pressure and Temperature Measurements in Supercharger Investigations, *NACA Tech. Mem.* 953, 1940.

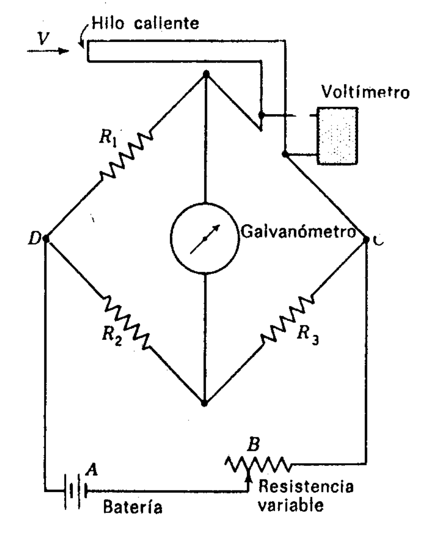



*Fig. 8.10 Anemómetro de hilo caliente de resistencia constante.*

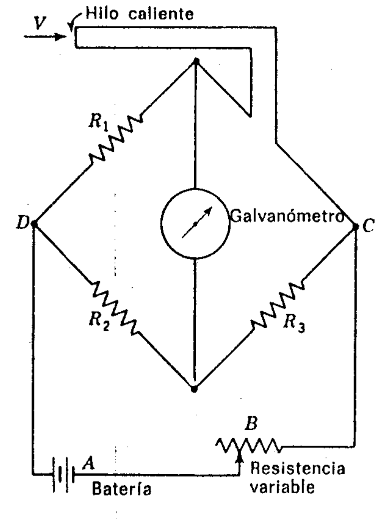



*Fig. 8.11 Anemómetro de hilo caliente de voltaje constante.*

el flujo sobre el hilo con lo que se enfría y varía su resistencia, produciendo un cambio en la lectura del galvanómetro. Mediante calibración se relaciona la velocidad con la lectura del galvanómetro.

Extender el uso del anemómetro de hilo caliente a líquidos, particularmente agua, ha sido siempre una posibilidad atrayente. Además, el interés reciente en los metales líquidos ha abierto un nuevo campo de aplicación de los instrumentos de hilo caliente, también se han realizado trabajos para desarrollar los anemómetros de película caliente. Estos constan de una película delgada conductora de la electricidad que se deposita sobre un aislante para tener una inercia térmica baja y las características de resistencia mecánica necesarias para trabajar en un líquido.

Los resultados obtenidos han tenido que vencer las dificultades que se presentan en los líquidos y no en los sólidos. Muchos líquidos, incluso el agua a no ser que sea extremadamente pura, tienen una conductividad eléctrica suficiente para interferir la operación de la sonda. También existe una dificultad con las partículas arrastradas, que se reúnen en las sondas, alteran su calibración y son la causa de la erosión de la película y de la rotura del hilo. Cuando se emplean hilos calientes en el aire, esta dificultad existe hasta cierto punto, debido a la presencia de polvo. Sin embargo, en las aplicaciones para líquidos existe el problema adicional de mantener el elemento sensible libre de los gases que se desprenden de la solución y se reúnen en el detector, con lo que le aíslan del flujo.

A pesar de estos obstáculos se han logrado progresos para una aplicación con éxito. La reciente introducción de un revestimiento extremadamente delgado de cuarzo, que aísla eléctricamente el hilo o la película sin reducir de una manera significativa la respuesta de la sonda, es muy prometedora. Una importante característica de este revestimiento es que reduce la tendencia de los elementos contaminadores a reunirse en el detector.



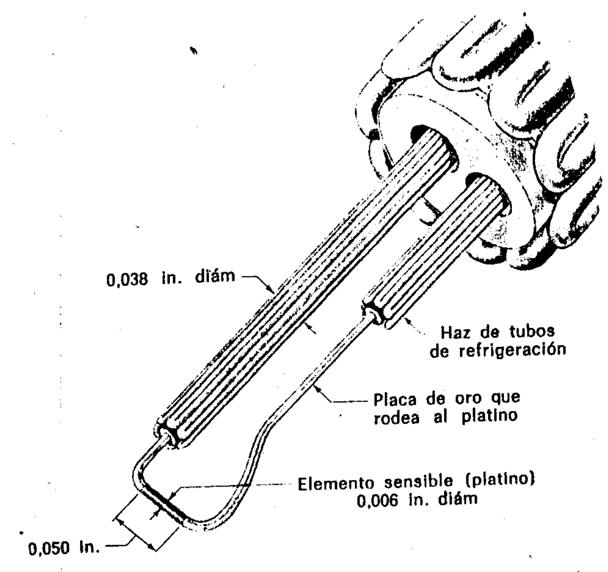



*Fig. 8.12 Los aparatos sensitivos de película refrigerada consisten en un tubo de vidrio cubierto por una película delgada de platino. Un plaqueado de oro aísla un elemento sensible corto. El refrigerante circula a través de este tubo de vidrio. (Thermo-Systems, Inc.)*

La sonda representada en la Fig. 8.12 amplía también el margen de utilidad de la técnica de la película caliente. En efecto, se trata de una película enfriada para aplicaciones de temperaturas elevadas. Consta de un tubo de vidrio de 0,006 in. de diámetro con una película de platino y de oro, que transportan a un receptor de calor el calor tomado por el detector en un fluido caliente. El receptor se enfría mediante agua o gas a baja temperatura a través de una red de pasos internos en la sonda. La temperatura del detector, película de platino de aproximadamente $\frac{1}{16}$ in. de longitud, dependerá de la velocidad del flujo, que se puede medir observando las variaciones en la resistencia de la película. Las sondas pueden trabajar bajo condiciones muy severas, tales como en cámaras de combustión, plasmas y toberas de salida de cohetes. Donde se deben hacer medidas en zonas de combustión y fluidos eléctricamente conductores, se pueden aplicar las películas de cuarzo mencionadas antes para eliminar cualquier efecto deletéreo.

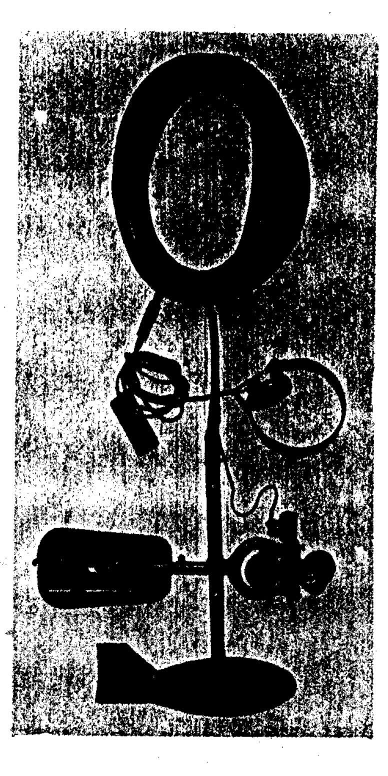


*Fig. 8.13* *Medidor de corriente Price. (W. y L. E. Gurley.)*

El *medidor de velocidad de la corriente* (Fig. 8.13) es utilizado para medir la velocidad de líquidos en canales abiertos. Los álabes están trazados de modo que la resistencia que oponen varíe con la orientación, provocando un movimiento giratorio relativamente lento. Con un circuito eléctrico y unos auriculares, una señal acústica es detectada a un número determinado de revoluciones. El número de señales en un determinado periodo de tiempo es función de la velocidad. Los medidores se calibran remolcándolos en un líquido a velocidades conocidas. Para medir velocidades altas se usa un medidor de velocidad provisto de una hélice como elemento rotor; de esta manera se ofrece menos resistencia al flujo.

Las velocidades del aire se miden con anemómetros de tipo de cangilón o de aspas (de hélice) (Fig. 8.14) los cuales actúan sobre contadores que indican el número de revoluciones.

Diseñando los álabes de manera que tengan inercia muy baja, empleando cojinetes de precisión y tacómetros ópticos que efectivamente no consuman potencia para conducirlos, se pueden construir anemómetros que registren velocidades de aire muy bajas. Pueden ser lo suficientemente sensibles para medir las corrientes de aire de convección que produce el cuerpo humano por su emisión de calor a la atmósfera.



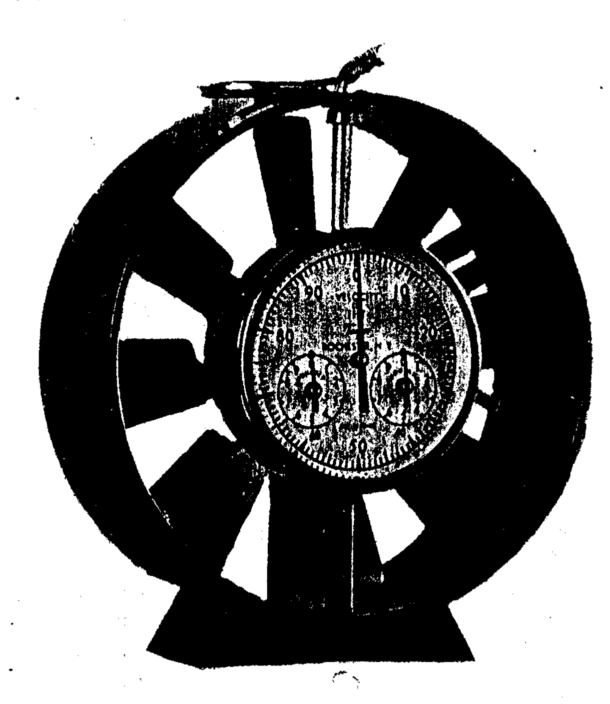


*Fig. 8.14* *Anemómetro de aire. (Taylor Instrument, Co.)*

## 8.3 Medidas de fuerza

Las medidas de fuerzas son necesarias en el estudio de fluidos para determinar propiedades físicas tales como la tensión superficial y fuerzas hidrodinámicas tales como la sustentación y la resistencia. Se emplean elementos elásticos, y su deformación se convierte en fuerza por medio de una calibración adecuada. Previamente se han estudiado los distintos medios utilizados para detectar estas deformaciones. Mediante un diseño idóneo del transductor electrónico de fuerza, se pueden obtener cargas de $\pm 1$ g para la escala completa, y el límite superior solo depende del tamaño del elemento elástico que se pueda utilizar.

## 8.4 Medidas ópticas de flujo

En esta sección se describen y representan tres aparatos ópticos de medida de flujo. La principal ventaja de las técnicas ópticas es que el flujo no se modifica en absoluto por la medida. Cada método está basado

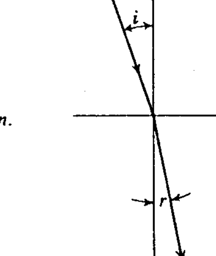



*Fig. 8.15* Angulo de incidencia y de refracción.

en el principio de que al cambiar la densidad de un medio cambia el ángulo de refracción de la luz; es decir, cuanto más denso es el medio, mayor es el ángulo de refracción. El índice de refracción $n$ de una sustancia se define como la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en ese medio; por tanto, $n$ es siempre mayor que la unidad. El índice de refracción varía con la longitud de onda de la luz y tiende a aumentar linealmente con la densidad. La relación entre el ángulo de incidencia $i$, el ángulo de refracción $r$ y los índices de refracción $n_a$, $n_b$ (Fig. 8.15) viene dada por la *ley de Snell*:

$$n_a \text{ sen } i = n_b \text{ sen } r$$

Cuando la luz pasa de un medio menos denso a otro más denso, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia. Si el índice de refracción es muy próximo a la unidad, como en el caso de la mayor parte de los gases, se puede utilizar la ecuación empírica de *Gladstone-Dale*:

$$\frac{n-1}{\rho} = \frac{n_a - 1}{\rho_a} = \frac{n_b - 1}{\rho_b}$$

*El método schlieren o estrioscópico*

En la Fig. 8.16 se representa el sistema *schlieren*, donde se emplea en un caso de flujo a través de una sección de ensayo bidimensional. La luz que procede de una fuente luminosa se colima mediante la primera lente y pasa a través de la sección de ensayo a una segunda lente, que da la imagen en un foco y después la proyecta en una pantalla o placa fotográfica. En el punto focal se coloca una arista aguda que elimina parte de la luz. No habiendo flujo en la sección de ensayo, la pantalla queda uniformemente iluminada. Si se modifica ligeramente la densidad dentro de la sección de ensayo haciendo pasar flujo alrededor de un modelo, los rayos de luz se refractarán en cantidades variables. Donde se refracta de modo



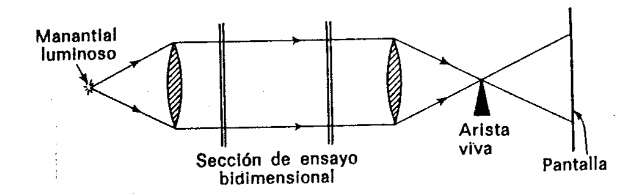



*Fig. 8.16* Sistema schlieren.

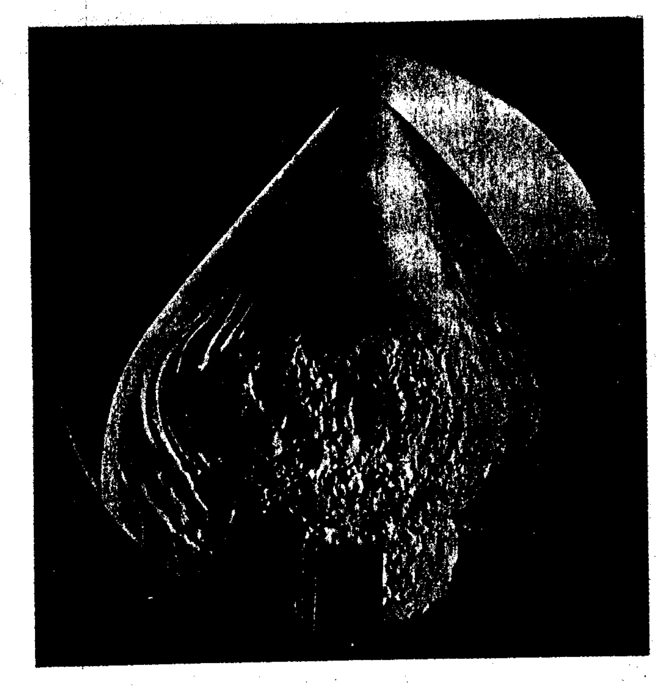


*Fig. 8.17* Fotografía schlieren de una onda de choque formada por ignición de un gas explosivo que sale de un tubo. (De la tesis doctoral de W. P. Sommers, sacada de Aeronautical and Astronautical Engineering Laboratories, The University of Michigan, 1961.)

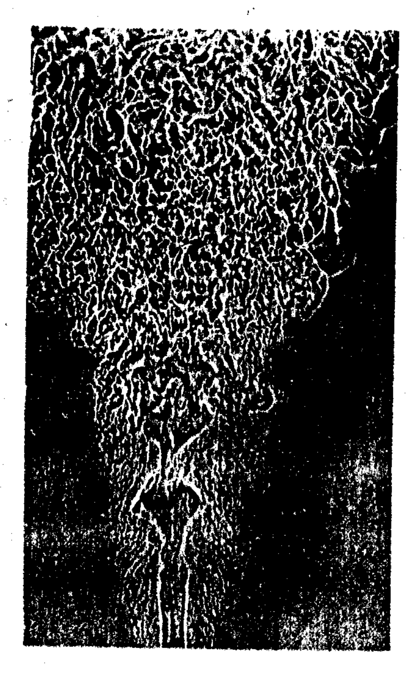


*Fig. 8.18 Esquiagrama de la combustión propano-aire. La llama se estabiliza alrededor de un quemador esférico de llama de 1,5 mm de diámetro situado en la parte inferior. Velocidad del chorro, 22 m/s. (Willow Run Research Center, The University of Michigan.)*

que los rayos son interceptados por la arista aguda, se proyecta menos luz en la pantalla, y donde se refracta en la dirección opuesta se proyecta más luz en la pantalla. Se ha de tener en cuenta que este sistema registra cambios en la densidad. La Fig. 8.17 muestra una fotografía estrioscópica de una onda de choque producida por la propagación de una onda explosiva debida a la detonación de un gas.

## *El método shadowgraph o fotografía de sombras*

Se puede utilizar el mismo montaje que en el sistema schlieren, pero sin la arista aguda. Para una variación uniforme en la densidad todos los rayos de luz se refractan la misma cantidad y la iluminación de una pantalla permanece uniforme y de la misma intensidad. Sin embargo, las variaciones en el gradiente de densidad producirán refracción desigual de las ondas luminosas que proyectarán una forma en la pantalla. En la Fig. 8.18 se muestra una vista shadowgraph de una llama. Generalmente los métodos schlieren y shadowgraph son cualitativos, por tanto, ayudan a visualizar el flujo. A continuación y dentro de esta sección se presenta el *interferómetro* para medidas cuantitativas de la densidad.



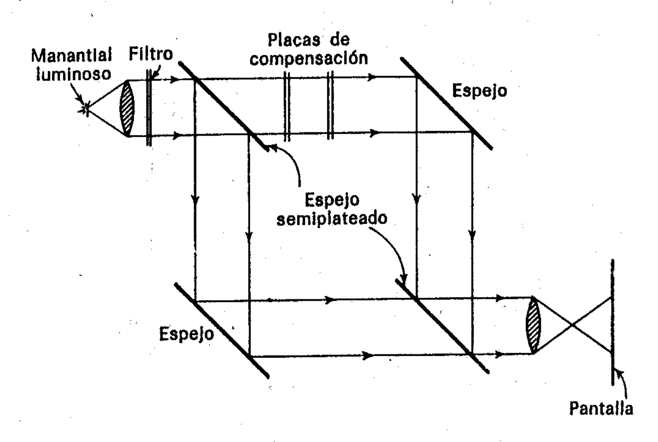



*Fig. 8.19 Sistema de interferómetro Mach-Zehnder.*

## *El método del interferómetro*

El interferómetro utiliza un desfase en el movimiento ondulatorio de la luz para obtener una forma de la que se puedan obtener las variaciones de densidad. En el interferómetro de Mach-Zehnder (Fig. 8.19), la luz de una fuente puntual simple se divide en dos circuitos, uno que contiene la sección de ensayo, y después se vuelve a reunir para proyectarse por último en una pantalla o cámara fotográfica. El primer espejo lleva plateada la mitad de su superficie; por tanto, transmite la mitad de la luz y refleja la otra mitad, formando los dos circuitos. Un circuito pasa por la sección de ensayo, y el otro circuito a través de placas de compensación. Estos dos circuitos se recombinan, como se indica en la figura, mediante el segundo espejo con media superficie plateada y después se proyecta en la pantalla.

Cuando no hay flujo a través de la sección de ensayo y el fluido tiene allí la misma densidad que el fluido que la rodea, la pantalla es iluminada uniformemente, si los dos circuitos tienen la misma longitud y la misma velocidad de la luz. Ahora bien, si varía uniformemente la densidad dentro de la sección de ensayo, varía la velocidad de transmisión de la luz y los dos rayos están desfasados. Si coincide una cresta de la onda luminosa de uno de los circuitos con un punto inferior de la onda del otro circuito, la pantalla estará uniformemente oscura; por consiguiente, la cantidad de luz en la pantalla depende del desfase. Teniendo flujo alrededor de un modelo en la sección de ensayo, las zonas de densidad uniforme aparecerán como bandas en la pantalla, como se ve en la Fig. 8.20.

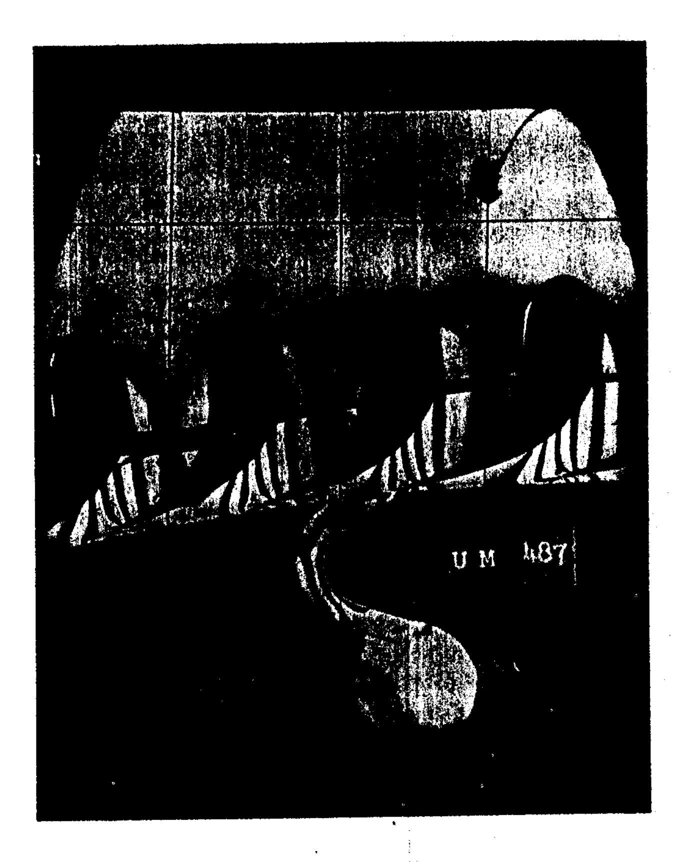



*Fig. 8.20 Fotografía de interferómetro del flujo a través de las toberas y un rodete de un modelo de turbina. El cambio de densidad a través de cada banda (negra o blanca) es del 0,5 por 100. (Fotografía tomada en Aeronautical and Astronautical Laboratories of The University of Michigan por la General Electric Co.)*

### 8.5 Medidores de desplazamiento positivo

Un medidor de desplazamiento positivo es un aparato que consta de émbolos o tabiques que son desplazados por la corriente fluida y de un mecanismo contador que registra el número de desplazamientos en una unidad conveniente como litros o metros cúbicos.

Un medidor común es el *disco* (Fig. 8.21) usado en la mayoría de los sistemas domésticos de distribución de agua. El disco se mueve en un conducto de modo que cuando pasa un determinado volumen de fluido el disco gira un ángulo determinado. Un vástago normal al disco hace



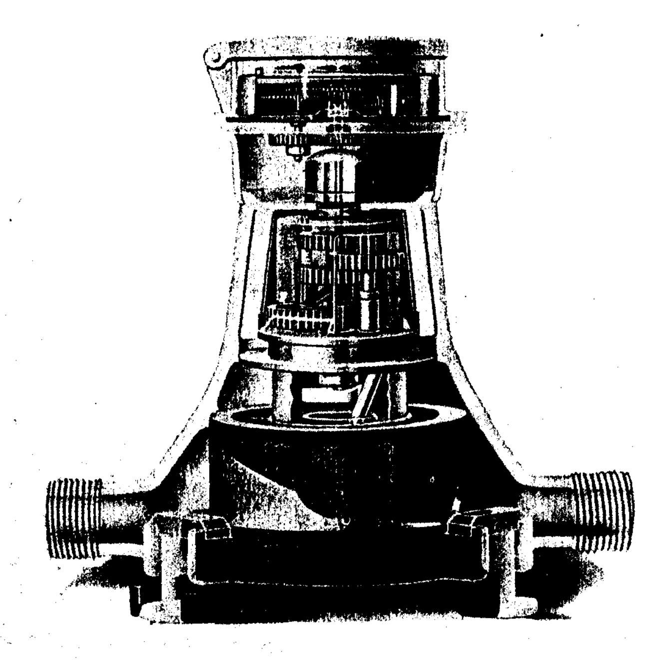


*Fig. 8.21 Medidor de disco. (Neptune Meter Co.)*

funcionar unos engranajes, los cuales al girar hacen de contador. Cuando están en buenas condiciones, estos medidores dan una exactitud dél 1 por 100. Después de mucho uso, el error puede ser muy grande para flujos pequeños, tales como los que se producen cuando pierde un grifo.

El volumen del gas de uso doméstico a bajas presiones se mide corrientemente por un medidor volumétrico que tiene un tabique móvil. Este tabique se desplaza cuando el gas entra por un extremo del recinto en el que está colocado; después, por un cambio de válvulas, se vuelve a desplazar en sentido opuesto. Estos desplazamientos actúan sobre un mecanismo contador.

Para las medidas del volumen de aceite o de gas a altas presiones en tuberías se usa frecuentemente un medidor rotatorio en el cual unos cangilones o álabes se mueven en una abertura anular y desplazan un volumen fijo en cada giro. Embolos radiales o axiales pueden ser dispuestos de modo que el volumen de un fluido, en un flujo continuo a través de ellos, esté determinado por las rotaciones de un eje.

Los medidores de desplazamiento absoluto no llevan, en general, equipo contador de tiempo que mida el caudal. El caudal, en régimen permanente, puede ser determinado con un cronómetro que mida el tiempo que tarda en pasar un volumen dado de fluido.

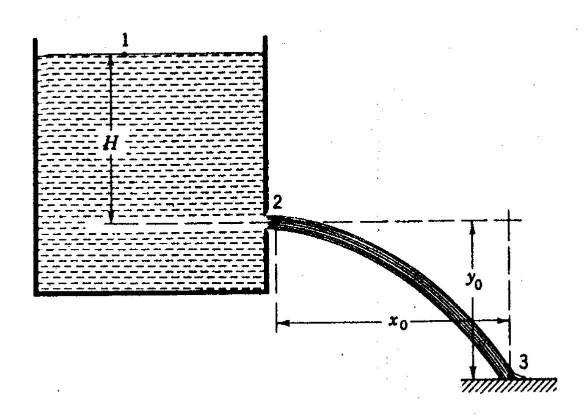



*Fig. 8.22 Orificio en un depósito.*

## 8.6 Medidores de caudal

*Un medidor de caudal* es un aparato que determina, generalmente por una simple medida, la cantidad (en peso o volumen) que por unidad de tiempo pasa a través de una sección transversal dada. Entre estos medidores de caudal están el *orificio de aforo, la tobera, el venturímetro, el rotámetro* y *el vertedero de aforo*, los cuales se estudian en este número.

*Orificios de aforo en un recipiente*

El orificio de aforo se utiliza para medir el caudal que sale de un recipiente o que pasa a través de una tubería. El orificio, en el caso de un recipiente, puede hacerse en la pared o en el fondo. Es una abertura, generalmente redonda, a través de la cual fluye el líquido, como se ve en la Fig. 8.22, y que puede ser de arista viva o redondeada como se muestra en la Fig. 3.12. El área del orificio es el área de la abertura. Con el orificio en arista viva el chorro fluido se contrae en una distancia corta de aproximadamente diámetro y medio aguas abajo del orificio. El fluido que se aproxima al orificio a lo largo de la pared no puede torcer en ángulo recto al llegar al orificio, por eso conserva la velocidad una componente radial que disminuye el área del chorro. La sección transversal en la que la contracción es mayor se llama *sección contraída*. Las líneas de corriente en esta sección son paralelas y la presión es la atmosférica.

La altura $H$ por encima del orificio se mide desde el centro del orificio hasta la superficie libre. Se supone que la altura permanece constante. Aplicando la ecuación de Bernoulli desde el punto 1, en la superficie libre, hasta el centro de la *sección contraída*, punto 2, y tomando como



origen de presiones y alturas la atmosférica y el punto 2, respectivamente, tendremos, despreciando las pérdidas:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Y sustituyendo valores:

$$0 + 0 + H = \frac{V_2^2}{2g} + 0 + 0$$

o sea:

$$V_2 = \sqrt{2gH} \qquad (8.6.1)$$

Pero esto es solo la velocidad *teórica*, ya que las pérdidas entre los dos puntos se han despreciado. La relación entre la velocidad *real* $V_a$ y la teórica $V_t$ se denomina *coeficiente de velocidad* $C_v$, que es

$$C_v = \frac{V_a}{V_t} \qquad (8.6.2)$$

y de aquí:

$$V_{2a} = C_v\sqrt{2gH} \qquad (8.6.3)$$

El caudal real por el orificio, $Q_a$, será el producto de la velocidad real en la *sección contraída* por el área del chorro. La razón entre el área del chorro $A_2$ en la *sección contraída* y el área del orificio $A_0$ se expresa por otro coeficiente llamado *coeficiente de contracción*, $C_c$,

$$C_c = \frac{A_2}{A_0} \qquad (8.6.4)$$

El área del chorro en la *sección contraída* es $C_cA_0$. El caudal es, pues:

$$Q_a = C_vC_cA_0\sqrt{2gH} \qquad (8.6.5)$$

Se acostumbra a reunir los dos coeficientes en uno solo llamado *coeficiente de caudal o desagüe*:

$$C_d = C_vC_c \qquad (8.6.6)$$

Y entonces:

$$Q_a = C_dA_0\sqrt{2gH} \qquad (8.6.7)$$

Como no hay modo de calcular la energía que se pierde entre los puntos 1 y 2, el coeficiente $C_v$ debe ser determinado experimentalmente. Varía entre 0,95 y 0,99 para los orificios en arista viva o redondeados. Para la mayoría de los orificios, la contracción no puede calcularse y entonces deberán usarse los resultados obtenidos en experimentos. Existen varios métodos para determinar uno o más de estos coeficientes. Midiendo el área $A_0$, la altura $H$ y el caudal $Q_a$ (por métodos gravimétricos o volumétricos) el coeficiente $C_d$ se obtiene de la Ec. (8.6.7). Determinados $C_v$ y $C_c$ mediante la Ec. (8.6.6) se determina el que se desconozca. A continuación se explican varios métodos:

1. Método de la trayectoria. Midiendo la posición de un punto de la trayectoria de un chorro aguas abajo de la *sección contraída* (Fig. 8.22) puede determinarse la velocidad real $V_a$ si se desprecia la resistencia del aire. La componente según el eje $X$ de la velocidad no cambia; por ello $V_a t = x_0$, en la que $t$ es el tiempo invertido por una partícula fluida en ir desde la *sección contraída* (punto 2) hasta el punto 3. El tiempo que tarda una partícula en recorrer la distancia bajo la acción de la gravedad sin velocidad inicial viene dada por $y_0 = gt^2/2$. Eliminando $t$ en las dos relaciones anteriores llegamos a

$$V_a = \frac{x_0}{\sqrt{2y_0/g}}$$

Una vez determinada $V_{2t}$, mediante la Ec. (8.6.1) la relación $V_a/V_t = C_v$ se puede conocer.

2. Medida directa de $V_a$. Con un tubo de Pitot introducido en la *sección contraída* se determina la velocidad real $V_a$.

3. Medida directa del diámetro del chorro. Midiendo con calibres puede encontrarse un valor aproximado para el diámetro del chorro en la *sección contraída*. Este procedimiento es menos exacto que los anteriores.

4. Empleo de la ecuación de la cantidad de movimiento. Cuando el recipiente es de tal tamaño que puede ser suspendido de afiladas cuchillas, como se indica en la Fig. 8.23, es posible determinar la fuerza $F$ que crea

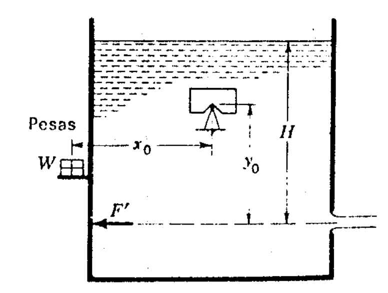



*Fig. 8.23 Método de la cantidad de movimiento para la determinación de $C_v$ y $C_c$.*



la cantidad de movimiento en el chorro. Cuando la abertura del orificio está cerrada el recipiente se nivela añadiendo o quitando pesas. Cuando el orificio está abierto, una fuerza crea la cantidad de movimiento en el chorro y una igual y opuesta $F'$ actúa sobre el depósito. Añadiendo pesas suficientes, $W$, el recipiente es nivelado de nuevo. De la figura deducimos $F' = Wx_0/y_0$. La ecuación de la cantidad de movimiento es

$$\Sigma F_x = \frac{Q\gamma}{g}(V_{x\,sal} - V_{x\,en})$$

Y de ambas deducimos

$$\frac{Wx_0}{y_0} = \frac{Q_a\gamma V_a}{g}$$

ya que $V_{en}$ es nula y $V_a$ es la velocidad final. Cuando se mide el caudal real la única incógnita en la ecuación es $V_a$.

### *Pérdida de energía en el flujo a través de un orificio*

La pérdida de energía en el flujo a través de un orificio se puede determinar aplicando la ecuación de Bernoulli introduciendo un término que dé la pérdida entre los puntos 1 y 2 (Fig. 8.22):

$$\frac{V_{1a}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_{2a}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \text{pérdidas}$$

Y sustituyendo valores para este caso:

$$\text{Pérdidas} = H - \frac{V_{2a}^2}{2g} = H(1 - C_v^2) = \frac{V_{2a}^2}{2g}\left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right) \qquad (8.6.8)$$

empleando la Ec. (8.6.3) para obtener la pérdida en función de $H$ y $C_v$, o de $V_{2a}$ y $C_v$.

***Ejemplo 8.1*** Por un orificio de 75 mm sale un caudal de 900 kg de agua bajo una altura de 5 m en 32,6 seg. La trayectoria fue determinada midiendo $x_0 = 4{,}8$ m para una caída de 1,22 m. Determinar $C_v$, $C_c$ y $C_d$, pérdida de altura total por unidad de peso y las pérdidas en CV.

La velocidad teórica $V_{2t}$ es

$$V_{2t} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 5} = 9{,}9 \text{ m/seg}$$

La velocidad real se determina mediante la trayectoria. El tiempo para recorrer los 1,22 m es

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}22}{9{,}8}} = 0{,}498 \text{ seg}$$

y, por tanto, la velocidad es

$$x_0 = V_{2a}t \qquad V_{2a} = \frac{4{,}8}{0{,}498} = 9{,}63 \text{ m/seg}$$

Así, pues,

$$C_v = \frac{V_{2a}}{V_{2t}} = \frac{9{,}63}{9{,}9} = 0{,}973$$

El caudal real $Q_a$ vale

$$Q_a = \frac{900}{10 \times 32{,}6} = 0{,}0276 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Y mediante la Ec. (8.6.7)

$$C_d = \frac{Q_a}{A_0\sqrt{2gH}} = \frac{0{,}0276}{75^2 \times 10^{-6}\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 5}} = 0{,}631$$

Y de aquí, por la Ec. (8.6.6)

$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = \frac{0{,}631}{0{,}973} = 0{,}650$$

La pérdida de altura total viene dada por la Ec. (8.6.8)

$$\text{Pérdida} = H(1 - C_v^2) = 5(1 - 0{,}973^2) = 0{,}26 \text{ m}$$

La potencia en CV perdida será

$$\frac{0{,}26 \times 900}{75 \times 32{,}6} = 0{,}095 \text{ CV}$$

La boquilla de Borda (Fig. 8.24) consiste en un pequeño tubo de paredes delgadas, de longitud igual a un diámetro, que se introduce en el recipiente y que permite aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento para llegar a una relación entre $C_v$ y $C_d$. La velocidad a lo largo de las paredes del recipiente es casi nula en todos sus puntos; por eso la distribución de la presión es hidrostática. Si se consideran las componentes de las fuerzas ejercidas sobre el líquido por el depósito paralelas al eje del tubo, se ve que cuando se abre el orificio la fuerza $\gamma HA_0$ queda des-



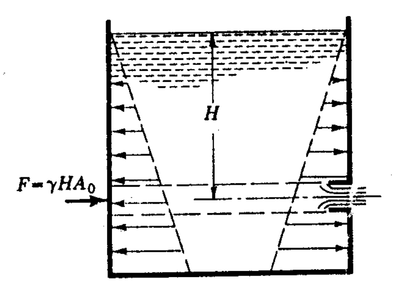




*Fig. 8.24 Boquilla de Borda.*

equilibrada. Siendo $V_{2a}$ la velocidad final y cero la velocidad inicial y $Q_a$ el caudal real, se verifica:

$$\gamma HA_0 = Q_a \frac{\gamma}{g} V_{2a}$$

Y como

$$Q_a = C_d A_0 \sqrt{2gH} \qquad V_{2a} = C_v \sqrt{2gH}$$

sustituyendo estos valores en la primera expresión y simplificando,

$$1 = 2C_dC_v = 2C_v^2C_c$$

Hasta aquí, en los casos de desagüe por orificios, hemos supuesto que el nivel del líquido permanece constante. Un caso de flujo variable de interés práctico es aquel en que el nivel baja y se pide el tiempo que tarda en bajar una cierta longitud. Teóricamente, la ecuación de Bernoulli se aplica solamente para flujo permanente, pero la superficie del depósito desciende tan lentamente, que el error que se comete aplicando la ecuación de Bernoulli es despreciable. El volumen que sale por el orificio en el tiempo $\delta t$ será $Q\,\delta t$, que será igual a la reducción de volumen del líquido en el depósito en el mismo tiempo (Fig. 8.25), $A_R(-\delta y)$, en la que $A_R$ es el área de la superficie del líquido a la altura $y$ del orificio. Igualando las dos expresiones resulta:

$$Q\,\delta t = -A_R\,\delta y$$

Despejando $\delta t$ e integrando entre los límites $y = y_1$, $t = 0$ e $y = y_2$, $t = t$,

$$t = \int_0^t dt = -\int_{y_1}^{y_2} \frac{A_R\,dy}{Q}$$

El caudal que sale por el orificio es $Q = C_d A_0 \sqrt{2gy}$. Sustituyendo $Q$ por su valor,

$$t = -\frac{1}{C_d A_0 \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} A_R y^{-1/2}\, dy$$

Cuando se conoce $A_R$ en función de $y$, la integral puede calcularse. En el caso de que el depósito tenga constante la sección,

$$t = -\frac{A_R}{C_d A_0 \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} y^{-1/2}\, dy = \frac{2A_R}{C_d A_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})$$

***Ejemplo 8.2*** Un depósito tiene una sección horizontal de 2 m² a la altura del orificio; este área varía linealmente con la altura de modo que 3 m por encima del orificio su valor es de 1 m². Para un orificio de 100 mm de diámetro y $C_d = 0{,}65$, calcular el tiempo en segundos para que la superficie descienda desde 2 a 1 m por encima del orificio.

$A_R = 2 - 1/3y$ m²

y

$$t = \frac{-1}{0{,}65 \dfrac{\pi \cdot 0{,}1}{4} \sqrt{19{,}6}} \int_2^1 \left(2 - \frac{1}{3}y\right) y^{-1/2}\, dy = 55{,}6 \text{ seg}$$

### Venturímetro

El venturímetro se usa para medir el caudal que pasa por una tubería. Se hace generalmente fundido (Fig. 8.26) y consta primeramente de una parte cilíndrica del mismo diámetro que la tubería, a la cual se acopla; esta parte tiene un anillo de bronce con una serie de orificios piezométricos para la medida de la presión estática; sigue después una parte cónica convergente que termina en una garganta cilíndrica con anillo de bronce que contiene otra serie de orificios piezométricos; a continuación sigue una parte cónica divergente, que termina en una porción cilíndrica del mismo diámetro que la tubería. A los dos anillos de orificios piezométricos van conectadas las dos ramas de un manómetro diferencial. El tamaño de un venturímetro viene especificado por los diámetros de la tubería y de la garganta; por ejemplo, 150 mm por 100 mm, significa que el venturímetro puede acoplarse a una tubería de 150 mm de diámetro y que su garganta tiene un diámetro de 100 mm. Para obtener resultados exactos, el venturímetro debe estar precedido de una parte recta de tubería de una longitud de por lo menos 10 diámetros. En la garganta del aparato la velocidad es mayor que en la tubería y la presión es menor. Si suponemos el flujo incompresible, ya se ha demostrado que el caudal es una función de la lectura del manómetro.



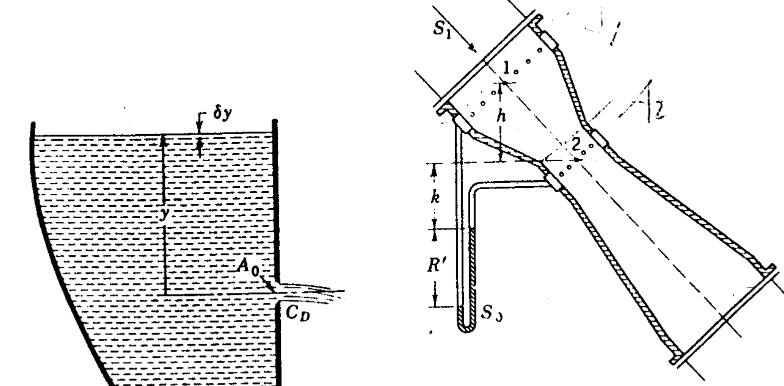



*Fig. 8.25 Notación para la caída de la altura de carga.*

*Fig. 8.26 Venturímetro.*

Las presiones en la sección aguas arriba y en la garganta son *presiones reales*, y las velocidades de la ecuación de Bernoulli sin un término de pérdida son *velocidades teóricas*. Cuando se consideran las pérdidas en la ecuación de la energía, las velocidades son *velocidades reales*. Si se emplea la ecuación de Bernoulli (despreciando las pérdidas) se obtiene la velocidad teórica en la garganta. Multiplicando esta velocidad por el coeficiente de velocidad $C_v$ se obtiene la velocidad real. Esta velocidad multiplicada por el área de la garganta determina el caudal real. De la Fig. 8.26,

$$\frac{V_{1t}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h = \frac{V_{2t}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \qquad (8.6.9)$$

en la que se ha tomado como origen de alturas el punto 2. $V_1$ y $V_2$ son respectivamente las velocidades medias en las secciones 1 y 2; se supone que $\alpha_1, \alpha_2$ valen la unidad. De la ecuación de continuidad $V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2$,

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 \qquad (8.6.10)$$

la cual sirve para las velocidades teóricas y para las reales. La Ec. (8.6.9) puede resolverse respecto a $V_{2t}$, y se obtiene:

$$\frac{V_{2t}^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + h$$

y de aquí:

$$V_{2t} = \sqrt{\frac{2g[h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.11}$$

Introduciendo el coeficiente de velocidad, $V_{2a} = C_v V_{2t}$,

$$V_{2a} = C_v \sqrt{\frac{2g[h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.12}$$

Y multiplicando por $A_2$ obtenemos el caudal real $Q$:

$$Q = C_v A_2 \sqrt{\frac{2g[h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.13}$$

La diferencia manométrica $R'$ puede ahora relacionarse con la diferencia de presiones escribiendo la ecuación correspondiente para el manómetro. En metros de agua (siendo $S_1$ el peso específico relativo del fluido y $S_0$ el del líquido del manómetro) tenemos:

$$\frac{p_1}{\gamma} S_1 + (h + k + R')S_1 - R'S_0 - kS_1 = \frac{p_2}{\gamma} S_1$$

Y después de simplificar,

$$h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = R'\left(\frac{S_0}{S_1} - 1\right) \tag{8.6.14}$$

Y sustituyendo este valor en la Ec. (8.6.13):

$$Q = C_v A_2 \sqrt{\frac{2gR'[(S_0/S_1) - 1]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.15}$$

que es la fórmula del venturímetro. El coeficiente de contracción es la unidad; por consiguiente, $C_v = C_d$. Debe notarse que $h$ ha desaparecido de la ecuación. El caudal depende de la diferencia manométrica $R'$ con independencia de la orientación del venturímetro; ya esté vertical, horizontal o inclinado, la ecuación anterior es válida.

$C_v$ se determina por el calibrado, midiendo el caudal y la diferencia manométrica y despejando $C_v$, que se lleva a un gráfico en función del número de Reynolds. En la Fig. 8.27 se dan los resultados experimentales obtenidos con venturímetros de diámetro de garganta mitad del de la tubería. Si es posible, conviene elegir el venturímetro de manera que su coeficiente $C_v$ se mantenga constante en la gama de números de Reynolds para el cual se usa.



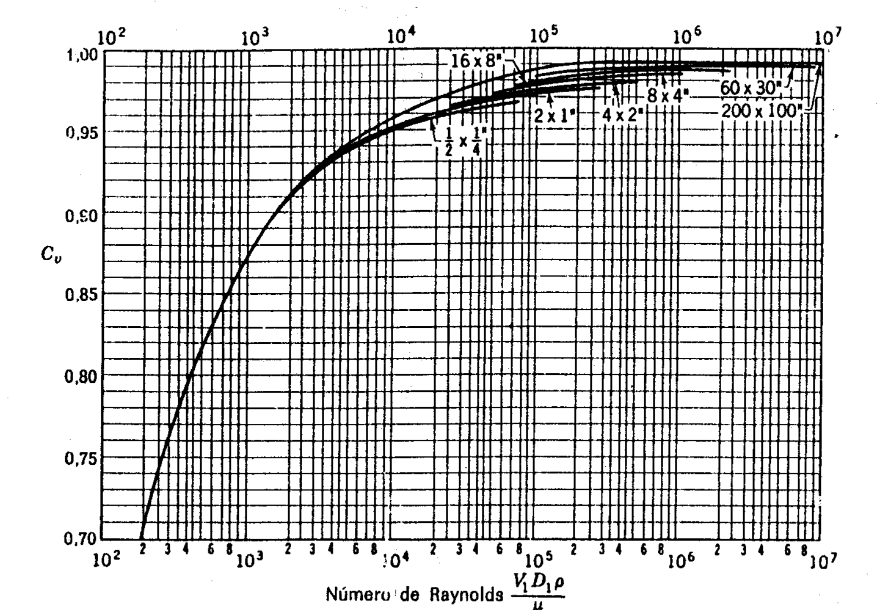



**Fig. 8.27** *Coeficiente $C_v$ para venturímetro. («Fluid Meters: Their Theory and Applications», 4.ª ed., American Society of Mechanical Engineers, 1937.)*

El coeficiente puede ser ligeramente superior a la unidad en los venturímetros que tengan muy bien pulida la superficie interior. Esto no significa que no haya pérdidas de energía, sino que resulta porque se desprecian los factores de corrección de la energía cinética, $\alpha_1$, $\alpha_2$, en la ecuación de Bernoulli. Generalmente $\alpha_1$ es mayor que $\alpha_2$, puesto que la reducción de la sección hace que la distribución de la velocidad sea uniforme en la sección 2.

El venturímetro tiene una pérdida total pequeña, debida a la gradual expansión cónica, que ayuda a transformar la energía cinética en la garganta en energía de presión. La pérdida es aproximadamente del 10 al 15 por 100 de la diferencia de alturas totales entre las secciones 1 y 2.

### *Venturímetros para flujo compresible*

El caudal teórico en masa a través de un venturímetro en flujo compresible viene dado por la Ec. (6.3.24) para flujo isoentrópico a través de un conducto convergente-divergente cuando la velocidad en la garganta es menor que la del sonido. Cuando se multiplica por $C_v$, coeficiente de velocidad, da el caudal real en masa $\dot{m}$. La Ec. (8.6.13), para

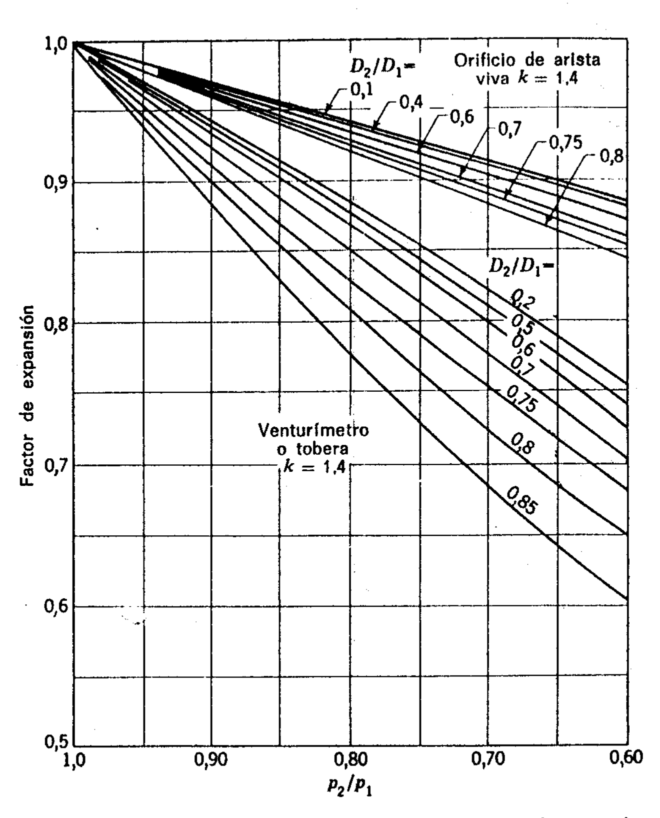



*Fig. 8.28* *Factores de expansión.*

fluido incompresible, se puede escribir en función del caudal en masa,

$$\dot{m} = C_v \rho_1 A_2 \sqrt{\frac{2\,\Delta p/\rho_1}{1 - (D_2/D_1)^4}} = C_v A_2 \sqrt{\frac{2\rho_1\,\Delta p}{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.16}$$

(se ha eliminado $h$ por ser despreciable en el flujo de un gas). Esta ecuación se puede modificar incluyendo un *factor de expansión* $Y$, de manera que se pueda aplicar al flujo compresible:

$$\dot{m} = C_v Y A_2 \sqrt{\frac{2\rho_1\,\Delta p}{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.17}$$

$Y$ se puede hallar resolviendo las Ecs. (8.6.17) y (6.3.24) con el coeficiente $C_v$ y se demuestra que es función de $k$, $p_2/p_1$ y $A_2/A_1$. En la Fig. 8.28 se dan valores de $Y$ para $k = 1{,}40$; por tanto, mediante la Ec. (8.6.17) y la Fig. 8.28 se puede calcular el flujo compresible para un venturímetro.



## *Tobera*

La Verein Deutscher Ingenieure (VDI) ha diseñado una tobera que se representa en la Fig. 8.29, con la cual se consigue que la contracción del chorro no sea más que la debida a la forma de la tobera, por lo que el coeficiente de contracción es la unidad. Las Ecs. (8.6.13) y (8.6.15) sirven también para la tobera. Para una tubería horizontal ($h = 0$) y la Ec. (8.6.13) se puede escribir:

$$Q = C A_2 \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}} \tag{8.6.18}$$

en la que

$$C = \frac{C_v}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \tag{8.6.19}$$

e $\Delta p = p_1 - p_2$. El valor del coeficiente $C$ que se da en la Fig. 8.29 es para usarlo en la Ec. (8.6.18). Cuando se quiera usar el valor de $C$ dado por el gráfico de la Fig. 8.29, es importante que las dimensiones de la

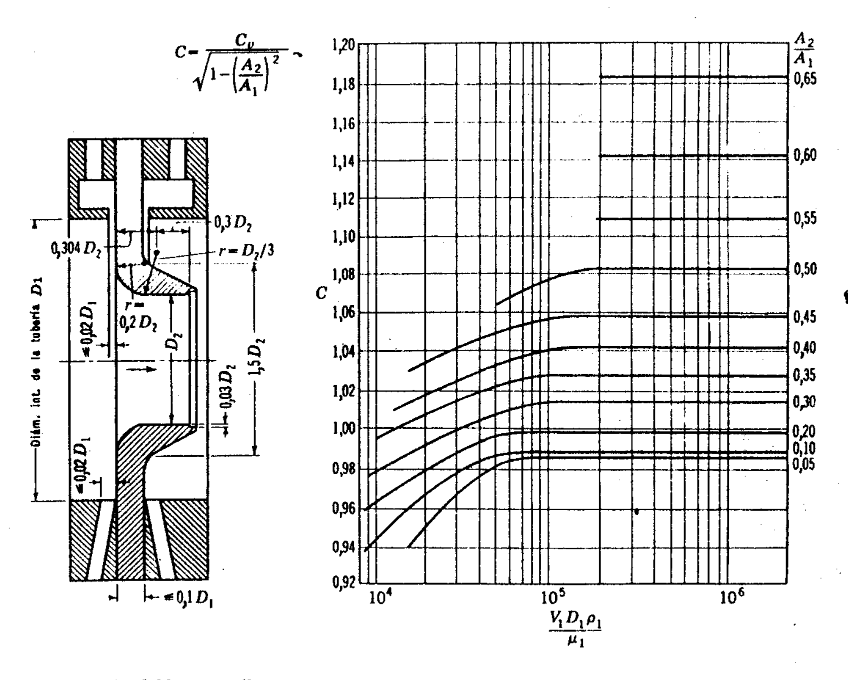



*Fig. 8.29* *Boquilla VDI y coeficientes de caudal. (NACA Tech. Mem. 952, Ref. 11.)*

tobera coincidan muy exactamente con las de la VDI, en particular en la colocación de los agujeros piezométricos para medir las caídas de presión. Es también conveniente que la tubería sea recta en una longitud de por lo menos 10 diámetros aguas arriba de la tobera.

La tobera es más económica que el venturímetro, pero tiene el inconveniente de que provoca una pérdida mayor debido a que el chorro fluido se separa de las paredes, no estando guiado aguas abajo.

El flujo compresible a través de una tobera se halla a partir de la Ec. (8.6.17) y la Fig. 8.28, si $k = 1{,}40$. Para otros valores de la relación de calores específicos $k$, se puede utilizar la Ec. (6.3.24) y modificarla después con el coeficiente de velocidad.

***Ejemplo 8.3*** Determinar el caudal a través de una conducción de agua de 150 mm de diámetro que tiene una tobera de 100 mm de diámetro. El manómetro diferencial de agua-mercurio ha dado una diferencia de lecturas de 250 mm. La temperatura del agua es de 20° C.

De los datos anteriores se deduce $S_0 = 13{,}6$, $S_1 = 1{,}0$, $R' = 0{,}25$ m, $A_2 = (\pi/4) \times 0{,}1^2 = 0{,}00785$ m², $\rho = 0{,}01/98 = 1{,}02 \times 10^{-4}$ UTM. Sustituyendo la Ec. (8.6.19) en la Ec. (8.6.15)

$$Q = CA_2 \sqrt{2gR'\left(\frac{S_0}{S_1} - 1\right)}$$

De la Fig. 8.29, para $A_2/A_1 = (100/150)^2 = 0{,}444$ y tomando el valor de $C$ correspondiente a la parte horizontal de la curva, $C = 1{,}056$, se puede calcular el caudal y el número de Reynolds.

$$Q = 1{,}056 \times 0{,}00785 \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}25\left(\frac{13{,}6}{1} - 1\right)} = 0{,}065 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Entonces

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0{,}065}{\frac{\pi}{4}0{,}15^2} = 3{,}68 \text{ m/seg}$$

y

$$\mathbf{R} = \frac{V_1 D_1 \rho}{\mu} = \frac{3{,}68 \times 0{,}15 \times 10^3}{9{,}8 \times 1{,}02 \times 10^{-5}} = 552.000$$

Si con este valor entramos en el gráfico encontramos que el valor elegido para $C$ era correcto; por consiguiente, el caudal es de 65 l/seg.

### *Orificio en una tubería*

Para utilizar un orificio que mida el caudal que pasa por una tubería, se coloca en ésta un diafragma en el que se ha practicado un orificio,



como muestra la Fig. 8.30. Cuando el borde del orificio es en arista viva se produce una contracción del chorro aguas abajo del orificio. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la sección 1 y la sección contraída del chorro, sección 2, se obtiene:

$$\frac{V_{1t}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_{2t}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

La ecuación de continuidad relaciona $V_{1t}$ y $V_{2t}$ con el coeficiente de contracción $C_c = A_2/A_0$,

$$V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 C_c \frac{\pi D_0^2}{4} \tag{8.6.20}$$

Eliminando $V_{1t}$,

$$\frac{V_{2t}^2}{2g}\left[1 - C_c^2\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^4\right] = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

y despejando $V_{2t}$,

$$V_{2t} = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)/\gamma}{1 - C_c^2(D_0/D_1)^4}}$$

Multiplicando por $C_v$ se obtiene la velocidad real de la sección contraída:

$$V_{2a} = C_v \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - C_c^2(D_0/D_1)^4}}$$

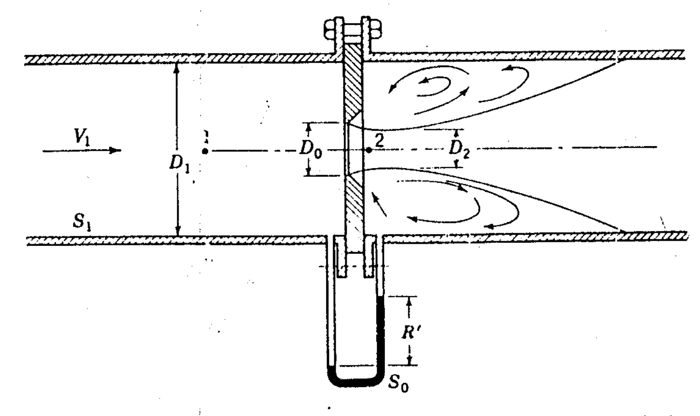



***Fig. 8.30*** *Orificio en una tubería.*

y, finalmente, multiplicando por el área del chorro, $C_c A_0$, se obtiene el caudal real $Q$:

$$Q = C_d A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - C_c^2 (D_0/D_1)^4}} \tag{8.6.21}$$

en la cual $C_d = C_v C_c$. En función de la lectura manométrica $R'$, la Ec. (8.6.21) es

$$Q = C_d A_0 \sqrt{\frac{2gR'[(S_0/S_1) - 1]}{1 - C_c^2 (D_0/D_1)^4}} \tag{8.6.22}$$

A causa de la dificultad que presenta el determinar los dos coeficientes por separado, se recurre generalmente a una fórmula simplificada semejante a la Ec. (8.6.18):

$$Q = C A_0 \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}} \tag{8.6.23}$$

o su equivalente:

$$Q = C A_0 \sqrt{2gR'\left(\frac{S_0}{S_1} - 1\right)} \tag{8.6.24}$$

Los valores de $C$ se dan en la Fig. 8.31 para el orificio standard de la VDI.

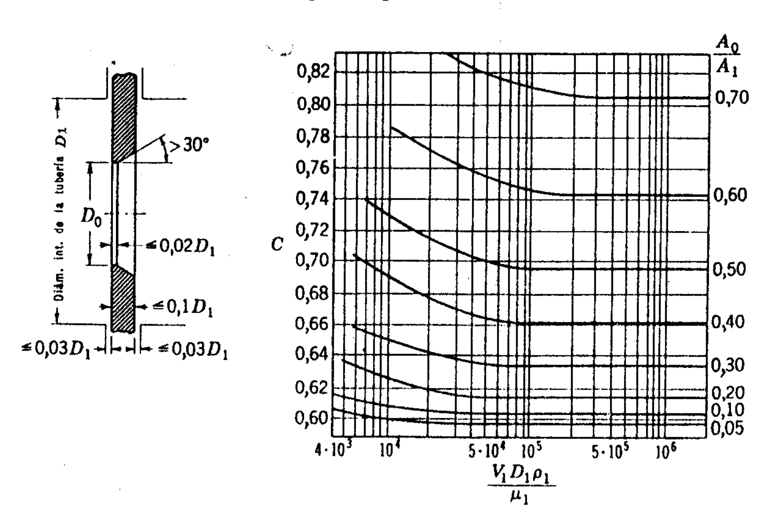



*Fig. 8.31 Orificio VDI y coeficientes de caudal. (NACA Tech. Mem. 952, Ref. 11.)*



En la Fig. 8.28 se dan valores experimentales del factor de expansión para $k = 1{,}4$. La Ec. (8.6.23) para el caudal real en masa en el flujo compresible se convierte en

$$\dot{m} = C Y A_0 \sqrt{2\rho_1\,\Delta p} \tag{8.6.25}$$

La situación de las tomas de presión se especifica generalmente a fin de que se pueda instalar un orificio en un conducto y se pueda utilizar con exactitud suficiente sin realizar una calibración en el propio lugar.

### *Medidor de codo*

Es uno de los artificios más sencillos para la medida del caudal. En el interior y exterior del codo se abren orificios piezométricos que se conectan a un manómetro diferencial. A causa de la fuerza centrífuga que se desarrolla en la parte curvada, la diferencia de presiones está relacio-

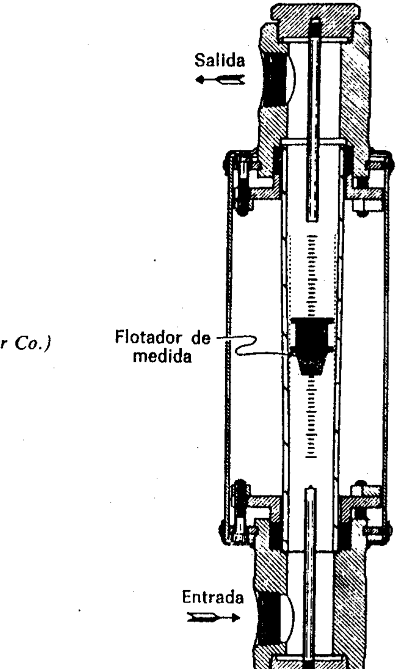



*Fig. 8.32 Rotámetro. (Fischer & Porter Co.)*

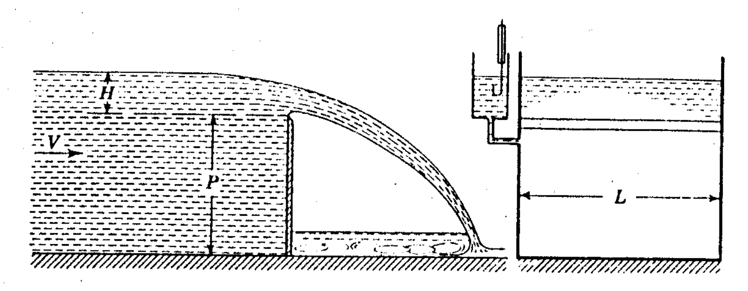



*Fig. 8.33 Vertedero rectangular de pared delgada.*

nada con el caudal. Este aparato ha de ser precedido por un trozo de corriente rectilínea y en calma, y para obtener medidas de suficiente exactitud debe calibrarse de antemano†. Como la mayoría de las tuberías presentan algún codo, éste puede usarse para medir el caudal, consiguiéndose, si se ha hecho un calibrado previo, resultados tan aceptables como con el venturímetro o la tobera.

### *Rotámetro*

El rotámetro (Fig. 8.32) es un medidor de sección variable que consiste en un tubo alargado y transparente que lleva en su interior un índice flotador más pesado que el líquido, que se desplaza hacia arriba empujado por el fluido que penetra por el tubo. El tubo se gradúa para poder leer el caudal directamente y lleva unas hendiduras que hacen girar al flotador de manera que éste mantenga una posición centrada en el tubo. Cuanto mayor es el caudal, más alta es la posición que toma el flotador.

### *Medidores de flujo de turbinas*

En el anemómetro de la Fig. 8.14 se utiliza el hecho de que una variación de la cantidad de movimiento en un flujo a través de un conjunto de álabes curvos da lugar a que se ejerza una fuerza o par sobre los álabes. Si la carcasa exterior de dicho anemómetro forma parte del conducto en el que se mueve el aire, la lectura del medidor se puede dar como un caudal, ya que entonces se especifica el área. Los medidores de flujo de las turbinas son en esencia unidades análogas a la recién descrita. Se hacen impermeables y se colocan en una tubería para medir los caudales de fluidos variados bajo condiciones muy distintas de temperatura y

† W. M. Lansford, The Use of an Elbow in a Pipe Line for Determining the Rate of Flow in a Pipe, *Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Bull.* 289, diciembre 1936.



corrosión. El núcleo del rodete puede contener una magneto, que, al girar el rotor, produce un campo magnético variable. El campo se detecta en una bobina eléctrica que va montada en la armadura externa de la unidad. La frecuencia de los impulsos magnéticos indican el caudal en un equipo adecuado de lectura que se une mediante una sencilla conexión eléctrica.

### *Vertedero de aforo*

El caudal de un canal abierto puede medirse con un vertedero, el cual es una obstrucción en el canal que obliga al líquido a estancarse detrás y a verter por encima de él. Midiendo la altura de la superficie del agua aguas arriba se puede determinar el caudal del canal. Los vertederos se construyen de chapa de acero o de otro material, de tal manera que si el chorro o *lámina* solo toca en una arista de la cresta se la llama vertedero de *pared delgada*, y en cambio si toca en una cierta porción de la cresta se denomina vertedero de *pared gruesa*.

El vertedero rectangular de pared delgada tiene una cresta horizontal (Fig. 8.33). La lámina se contrae en las partes superior e inferior como muestra la figura. Por cálculo se puede llegar a una fórmula que dé el caudal si se desprecia la contracción, es decir, si se supone que la lámina es tal como se ha representado en la Fig. 8.34. La lámina tiene entonces las líneas de corriente paralelas y en toda ella reina la presión atmosférica.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2,

$$H + 0 + 0 = \frac{v^2}{2g} + H - y + 0$$

siendo la altura de velocidad en la sección 1 despreciable. Despejando $v$,

$$v = \sqrt{2gy}$$

El caudal teórico $Q_t$ es

$$Q_t = \int v\,dA = \int_0^H vL\,dy = \sqrt{2g}\,L\int_0^H y^{1/2}\,dy = \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,LH^{3/2}$$

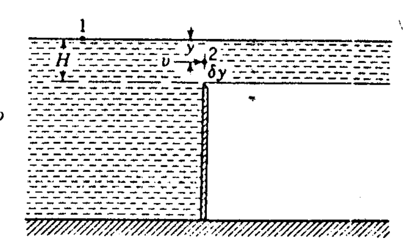



*Fig. 8.34 Lámina de vertiente en un vertedero sin contracciones.*

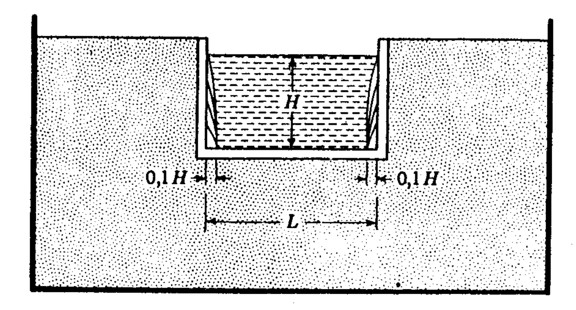



*Fig. 8.35 Vertedero con contracciones en los extremos.*

siendo $L$ la anchura del vertedero. La experiencia demuestra que el exponente de $H$ es correcto, pero que el coeficiente es demasiado grande. La contracción y las pérdidas hacen que el caudal real sea un 60 por 100 del teórico, es decir,

$$Q = 1{,}84LH^{3/2} \tag{8.6.26}$$

estando $Q$ en m³/seg, $L$ y $H$ en metros.

Cuando el vertedero no abarca toda la anchura del canal existen también unas *contracciones laterales*, como se ve en la Fig. 8.35. Por consiguiente, es necesario introducir una corrección empírica que se hace restando $0{,}1H$ a $L$ por cada contracción lateral que exista. El vertedero de la Fig. 8.33 se dice que tiene *suprimidas* sus contracciones laterales.

La altura $H$ se mide aguas arriba del vertedero a una distancia suficiente para que no influya la contracción. Se mide la altura de la superficie del agua en un pozo conectado a un orificio piezométrico por un

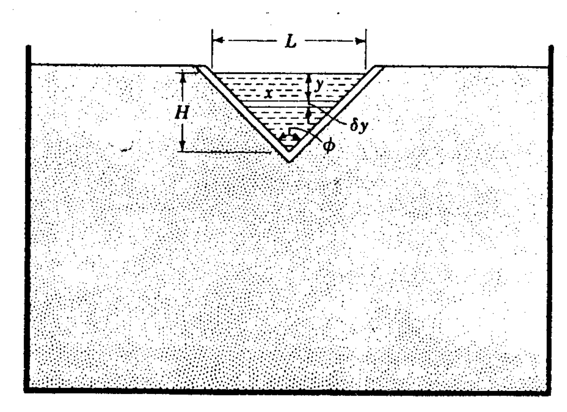



*Fig. 8.36 Vertedero en V.*



procedimiento igual al que se utiliza con el micromanómetro de gancho (ver Sec. 11), y a partir de esta altura se determina $H$.

Cuando la altura de la cresta del vertedero $P$ (Fig. 8.33) es pequeña, la altura de velocidad en 1 no puede despreciarse y se necesita añadir una corrección a la altura $H$

$$Q = CL\left(H + \alpha\frac{V^2}{2g}\right)^{3/2} \tag{8.6.27}$$

Siendo $V$ la velocidad y $\alpha$ un coeficiente mayor que la unidad, que generalmente se toma igual a 1,4 y que corrige la distribución no uniforme de la velocidad. La Ec. (8.6.27) debe resolverse por aproximaciones sucesivas, puesto que $Q$ y $V$ son incógnitas. Como primera aproximación puede despreciarse el término $\alpha V^2/2g$, para calcular un valor aproximado de $Q$; después, con este valor de $Q$, se calcula el valor de $V$,

$$V = \frac{Q}{L(P + H)}$$

Para caudales pequeños es conveniente utilizar para aforos el vertedero en forma de V. Despreciando la contracción de la lámina, el caudal teórico (Fig. 8.36) puede calcularse como sigue:

La velocidad a la profundidad $y$ es $v = \sqrt{2gy}$, y el caudal teórico

$$Q_t = \int v\,dA = \int_0^H vx\,dy$$

Por triángulos semejantes, $x$ puede relacionarse con $y$,

$$\frac{x}{H - y} = \frac{L}{H}$$

Sustituyendo $v$ y $x$ en función de $y$,

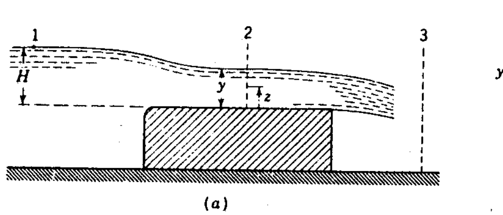
$$Q_t = \sqrt{2g}\,\frac{L}{H}\int_0^H y^{1/2}(H - y)\,dy = \frac{4}{15}\sqrt{2g}\,\frac{L}{H}H^{5/2}$$

Expresando $L/H$ en función del ángulo $\phi$ de la V

$$\frac{L}{2H} = \operatorname{tg}\frac{\phi}{2}$$

Por consiguiente,

$$Q_t = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\,\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}H^{5/2}$$



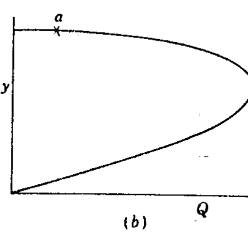




*Fig. 8.37 Vertedero de pared gruesa.*

El exponente de $H$ es aproximadamente correcto, pero el coeficiente debe reducirse en un 40 por 100. Una fórmula aproximada cuando el ángulo es de 90° es

$$Q = 1{,}38H^{2{,}50} \tag{8.6.28}$$

en la cual $Q$ está en metros cúbicos por segundo y $H$ en metros. La experiencia ha demostrado que el coeficiente aumenta cuando se hace rugoso el lado de aguas arriba del vertedero, que hace que la capa límite se haga más ancha. La cantidad mayor de líquido con movimiento lento cerca de la pared gira más fácilmente, y de este modo disminuye la contracción de la lámina.

El vertedero en pared gruesa (Fig. 8.37*a*) soporta la lámina de tal forma que la variación de presión es hidrostática en la sección 2. La ecuación de Bernoulli aplicada entre los puntos 1 y 2 puede utilizarse para hallar la velocidad $v_2$ a la altura $z$, despreciando la velocidad en el punto 1,

$$H + 0 + 0 = \frac{v_2^2}{2g} + z + (y - z)$$

Despejando $v_2$,

$$v_2 = \sqrt{2g(H - y)}$$

en la que $z$ ha desaparecido, con lo que la velocidad $v_2$ es constante en toda la sección 2. Para un vertedero de anchura $L$ normal al plano de la figura, el caudal teórico es

$$Q = v_2 L y = L y \sqrt{2g(H - y)} \tag{8.6.29}$$

Un gráfico tomando $Q$ como abscisa y la profundidad $y$ como ordenada, y dejando $H$ constante, se muestra en la Fig. 8.37*b*. La profundidad que da el caudal máximo se obtiene con el siguiente razonamiento:





Si colocamos una compuerta u otra obstrucción en la sección 3 de la Fig. 8.37*a*, el flujo se obtendrá haciéndose $y = H$. Si se permite ahora pasar por la sección 3 un pequeño caudal (dejando $H$ constante), la profundidad $y$ se hará un poco menor que $H$, y el caudal es, por ejemplo, el correspondiente al punto $a$ sobre la curva profundidad-caudal. Levantando progresivamente la compuerta de la sección 3, la relación caudal-profundidad sigue la rama superior de la curva hasta que se alcanza el valor máximo del caudal. A partir de este punto, aunque se eleve más la compuerta no se causa efecto alguno sobre el caudal, ya que la velocidad del fluido en la sección 2 es $\sqrt{gy}$, que es precisamente la velocidad con que se mueve una onda elemental en un líquido en reposo de profundidad $y$. De aquí que si la elevación de la superficie del líquido aguas abajo desciende más, no se afecta en nada al valor de $y$, y el caudal continúa con su máximo valor. Esta profundidad $y$, llamada *profundidad crítica*, ha sido tratada en la Sec. 11.4. La velocidad de una onda elemental se obtendrá en la Sec. 12.10.

Derivando $Q$ con respecto a $y$ e igualando la derivada a cero, para $H$ constante, se tiene

$$\frac{dQ}{dy} = 0 = L\sqrt{2g(H - y)} + Ly\,\frac{1}{2}\,\frac{(-2g)}{\sqrt{2g(H - y)}}$$

y despejando $y$

$$y = \tfrac{2}{3}H$$

Sustituyendo el valor de $H$, esto es, $3y/2$, en la ecuación de la velocidad $v_2$,

$$v_2 = \sqrt{gy}$$

Sustituyendo el valor de $y$ en la Ec. (8.6.29)

$$Q_t = 1{,}70LH^{3/2} \tag{8.6.30}$$

La experiencia demuestra que para bordes bien redondeados aguas arriba el caudal vale

$$Q = 1{,}67LH^{3/2} \tag{8.6.31}$$

el cual está dentro del 2 por 100 del valor teórico. Por tanto, podemos concluir que el flujo se ajusta por sí mismo hasta que el caudal es máximo.

La viscosidad y la tensión superficial tienen una influencia muy pequeña en el valor del coeficiente de caudal de los vertederos. Sin embargo, los vertederos deben calibrarse con el líquido cuyo caudal va a medirse después.

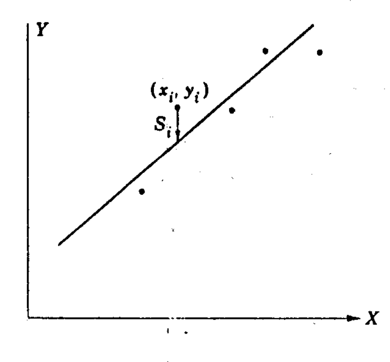



*Fig. 8.38 Diagrama doblemente logarítmico de Q en función de H para un vertedero en V.*

***Ejemplo 8.4*** Ensayos efectuados en un vertedero en V de 60° dan los valores siguientes de la altura $H$ y el caudal $Q$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H$, m | 0,1035 | 0,1068 | 0,1368 | 0,1610 | 0,1704 | 0,1856 | 0,1905 | 0,196 | 2,00 |
| $Q$, m³/seg | 0,0032 | 0,0033 | 0,0062 | 0,0090 | 0,0105 | 0,0120 | 0,0130 | 0,0138 | 0,0156 |

Mediante la teoría de los mínimos cuadrados, determinar las constantes en $Q = CH^m$ para este vertedero.

Tomando logaritmos en cada miembro:

$$\ln Q = \ln C + m \ln H$$

o sea

$$Y = B + mX$$

se hace notar que se necesitan los mejores valores de $B$ y $m$ para trazar una línea recta que pase por los datos, cuando se representan en un papel doblemente logarítmico.

Según la teoría de los mínimos cuadrados, la mejor recta que pasa por los puntos dados es la que hace mínima la suma de los cuadrados de los desplazamientos verticales de cada punto respecto a ella; es decir, de la Fig. 8.38,

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} s_i^2 = \Sigma[y_i - (B + mx_i)]^2$$

Para hacer mínimo $F$, se hallan $\partial F/\partial B$ y $\partial F/\partial m$ y se igualan a cero, dando dos ecuaciones con dos incógnitas $B$ y $m$:

$$\frac{\partial F}{\partial B} = 0 = 2\Sigma\,[y_i - (B + mx_i)]\,(-1)$$

de donde

$$\Sigma y_i - nB - m\Sigma x_i = 0 \qquad (1)$$





y

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0 = 2\Sigma\,[y_i - (B + mx_i)]\,(-x_i)$$

o sea

$$\Sigma\, x_i y_i - B\Sigma\, x_i - m\Sigma\, x_i^2 = 0 \qquad (2)$$

Despejando $m$ de las Ecs. (1) y (2),

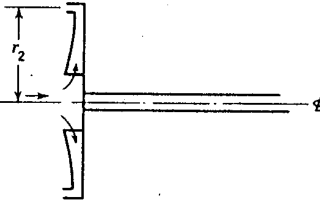
$$m = \frac{\Sigma x_i y_i/\Sigma x_i - \Sigma y_i/n}{\Sigma x_i^2/\Sigma x_i - \Sigma x_i/n}$$

$$B = \frac{\Sigma y_i - m\Sigma x_i}{n}$$

Se deben calcular los logaritmos de $Q_i$ y $H_i$, y las sumas se efectúan con una calculadora de mesa. Sin embargo, se puede resolver muy fácilmente este problema con una calculadora digital con el programa siguiente (ver el Apéndice E de información del cálculo MAD).

```
$COMPILE MAD, EXECUTE
          INTEGER I,N
          DIMENSION (Q,H)(20)
          READ DATA
          PRINT RESULTS N,Q(1) ... Q(N),H(1) ... H(N)
          EXECUTE ZERO.(X,Y,XX,XY)
          THROUGH AA1, FOR I = 1,1,I.G.N
          LH = ELOG.(H(I))
          LQ = ELOG.(Q(I))
          X = X + LH
          Y = Y + LQ
          XX = XX + LH*LH
AA1       XY = XY + LH*LQ
          M = (XY/X - Y/N)/(XX/X - X/N)
          B = (Y - M*X)/N
          C = EXP.(B)
          PRINT RESULTS M,C,B
          END OF PROGRAM
$DATA
N = 10,Q(1) = .107, .110, .205, .303, .35,  4,   .435, .46,  .49,  .52
       H(1) = .345, .356, .456, .537, .568, .594, .619, .635, .654, .665
```

En el programa, EXECUTE ZERO. establece que todas las cantidades dentro de los paréntesis siguientes son cero. ELOG. es el logaritmo natural y EXP. potencias de base $e$. Para los datos de este problema, $m$ = 2,43 y $C$ = 1,395.



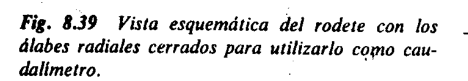


*Fig. 8.39 Vista esquemática del rodete con los álabes radiales cerrados para utilizarlo como caudalímetro.*

### Medidor de masa

La mayor parte de los medidores de caudal determinan el caudal volumétrico, lo que requiere una determinación separada de la densidad antes de hallar el caudal en masa. Mediante el principio del momento de la cantidad de movimiento se puede relacionar la medida del par en un rodete con el caudal en masa. Consideremos el rodete de la Fig. 8.39, en el que el fluido se mueve dentro del rodete sin rotación previa, es decir, con $V_{u1} = 0$. El rodete tiene muchos álabes, que son radiales en la sección de salida, de modo que $V_{u2} = r_2\omega$, siendo $\omega$ la velocidad de rotación. Entonces, de la Ec. (3.13.5)

$$T = \dot{m}V_{u2}r_2 = \dot{m}\omega r_2^2 \qquad (8.6.32)$$

donde $T$ es el par aplicado y $\dot{m}$ la masa por unidad de tiempo que sale. Determinando el par, la velocidad y el radio se puede calcular el caudal en masa. El par se debe corregir en las pérdidas debidas a los cojinetes y el rozamiento del disco. En la literatura técnica† se estudian los detalles de los medidores de masa.

## 8.7 Aparatos electromagnéticos de flujo

Si se crea un campo magnético a través de un tubo no conductor y por él fluye un fluido conductor, se produce un voltaje inducido a través del flujo que se puede medir si se colocan electrodos en las paredes del tubo‡. El voltaje es función lineal del caudal volumétrico que pasa por el tubo. Se puede utilizar un campo, de corriente alterna o de corriente continua, con la señal correspondiente, generada en los electrodos. Un inconveniente del método es la pequeña señal recibida y la gran cantidad

† V. A. Olando y F. B. Jennings, Momentum Principle Measures Mass Rate of Flow, *Trans. ASME*, vol. 76, pág. 961, agosto 1954. V. T. Li y S. Y. Lee, A Fast Responsive True Mass-rate Flowmeter, *Trans. ASME*, vol. 75, pág. 835, julio 1953.

‡ H. G. Elrod, Jr., y R. R. Fouse, An Investigation of Electromagnetic Flowmeters, *Trans. ASME*, vol. 74. pág. 589, mayo 1952.



de amplificación necesaria. Este aparato se ha utilizado para medir el flujo en los vasos sanguíneos.

## 8.8 Medida del caudal de un río

Para hacer los planes económicos del aprovechamiento de las aguas de un río o para protegerse de sus inundaciones se necesita recoger diariamente datos del caudal durante largos periodos de tiempo. La medida diaria del caudal, por la determinación de la distribución de velocidades en una sección del río, es costosa. Para evitar esto y, sin embargo, poder obtener datos diariamente, se establecen *secciones de control*, donde el curso del río es estable, es decir, con pequeños cambios en el fondo o lados del lecho de la corriente. La sección de control está frecuentemente situada en un cambio de rasante en el fondo del río, donde comienza a ser más pronunciada aguas abajo.

Una varilla medidora determina en la sección de control el nivel de la superficie del agua por simple lectura; en algunas instalaciones, unos flotadores de control registran continuamente la elevación del nivel. Puede construirse la curva *caudal-altura* tomando medidas con un medidor de velocidad de corriente de tiempo en tiempo cuando se verifican cambios en el caudal del río y llevar después estos valores a unos ejes coordenados.

En una sección de control estable, la curva caudal-altura cambia muy poco y las medidas con el medidor de velocidad de corriente son poco frecuentes. En secciones de control inestables, la curva cambia continuamente y la medida del caudal debe hacerse cada pocos días para conseguir una curva de cierta exactitud.

Leyendo diariamente la altura se sabe el caudal diario del río.

## 8.9 Medida de la turbulencia

La turbulencia es una característica del flujo fluido. Afecta al calibrado de los instrumentos de medida y tiene un efecto muy importante sobre la transmisión del calor, evaporación, difusión y otros muchos fenómenos ligados al movimiento de los fluidos.

La turbulencia está determinada por dos cantidades, el tamaño y la intensidad de las fluctuaciones. En flujos permanentes, las componentes de la velocidad temporal media en un punto son constantes. Si estos valores medios son $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ y las componentes de la velocidad en un instante son $u$, $v$, $w$, las fluctuaciones vienen dadas por $u'$, $v'$, $w'$, en

$$u = \bar{u} + u'$$
$$v = \bar{v} + v'$$
$$w = \bar{w} + w'$$

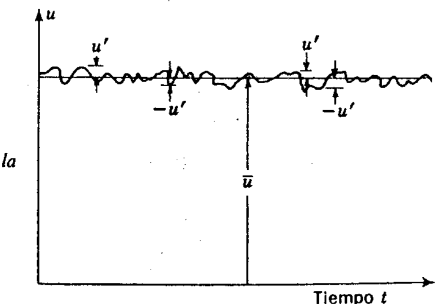



*Fig. 8.40 Fluctuaciones turbulentas en la dirección del flujo.*

Tomando los valores medios cuadráticos de las fluctuaciones (Fig. 8.40) se tiene una medida de la intensidad de la turbulencia. Estos son $\sqrt{\overline{(u')^2}}$, $\sqrt{\overline{(v')^2}}$, $\sqrt{\overline{(w')^2}}$.

El tamaño de la fluctuación es una medida media del tamaño del torbellino, o vórtice, en el flujo. Cuando se colocan dos instrumentos de medida de la velocidad (dos anemómetros de hilo caliente) adyacentes en un flujo fluido, las fluctuaciones de la velocidad son correlativas, es decir, tienden a cambiar al unísono. Separando estos instrumentos, disminuye esta correlación. La distancia entre los instrumentos para la cual la correlación es nula nos da una medida del tamaño de la fluctuación. Otro método para la determinación de la turbulencia se ha estudiado en la Sección 5.5.

### 8.10 *Medida de la viscosidad*

Este capítulo, dedicado a las medidas en fluidos, se concluye con un estudio de los métodos de determinación de la viscosidad. La viscosidad puede medirse por los siguientes procedimientos: (1) usando la ley de Newton de la viscosidad; (2) usando la ecuación de Hagen-Poiseuille; (3) por métodos que requieren el calibrado con fluidos de viscosidad conocida.

Midiendo el gradiente de velocidad $du/dy$ y la tensión de cortadura $\tau$, en la ley de Newton de la viscosidad [Ec. (1.1.1)],

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (8.10.1)$$

se puede calcular la viscosidad absoluta o dinámica. Este es el método fundamental, pues determina todas las restantes cantidades en la ecuación de definición de la viscosidad. Por medio de un cilindro que gira a una velocidad conocida con respecto a otro cilindro interior concéntrico y estacionario, se determina $du/dy$. Midiendo el par sobre el cilindro in-



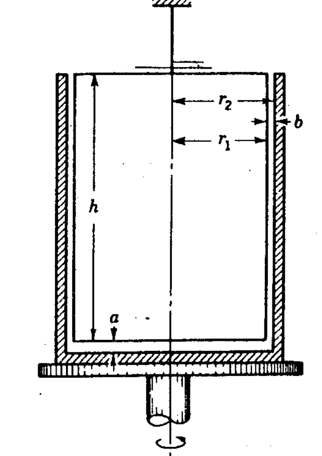



*Fig. 8.41 Viscosímetro de cilindros concéntricos.*

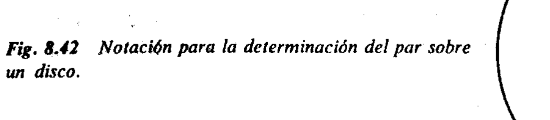
terno, puede deducirse la tensión de cortadura. La relación de la tensión de cortadura al gradiente de velocidad expresa la viscosidad.

Una vista esquemática del viscosímetro de cilindros concéntricos se muestra en la Fig. 8.41. Cuando la velocidad de rotación es $N$ r.p.m. y el radio es $r_2$ m, la velocidad del fluido en la superficie del cilindro exterior es $2\pi r_2 N/60$. Si el huelgo radial es $b$ m

$$\frac{du}{dy} = \frac{2\pi r_2 N}{60b}$$

El par $T_c$ sobre el cilindro interior se mide por la torsión del hilo del cual está suspendido. Acoplando un disco al hilo, su rotación puede determinarse por una aguja indicadora fija. Si se desprecia el par debido al fluido debajo del fondo del cilindro interior, la tensión de cortadura es

$$\tau = \frac{T_c}{2\pi r_1^2 h}$$



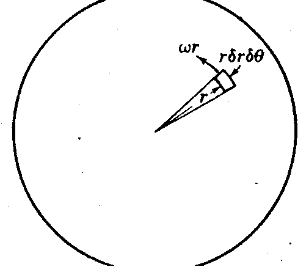



*Fig. 8.42 Notación para la determinación del par sobre un disco.*

*Fig. 8.43 Determinación de la viscosidad por flujo a través de un tubo capilar.*

Sustituyendo en la Ec. (8.10.1) y despejando la viscosidad,

$$\mu = \frac{15 T_c b}{\pi^2 r_1^2 r_2 h N} \tag{8.10.2}$$

Cuando el huelgo $a$ es tan pequeño que el par debido al fondo no se puede despreciar, puede entonces calcularse en función de la viscosidad. Refiriéndose a la Fig. 8.42,

$$\delta T = r\tau\, \delta A = r\mu \frac{\omega r}{a} r\, \delta r\, \delta\theta$$

en la cual el cambio de velocidad es $\omega r$ en la distancia $a$ m. Integrando sobre el área del disco y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi N/60$,

$$T_d = \frac{\mu}{a}\frac{\pi}{30} N \int_0^{r_1}\int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\theta = \frac{\mu\pi^2}{a60} N r_1^4 \tag{8.10.3}$$

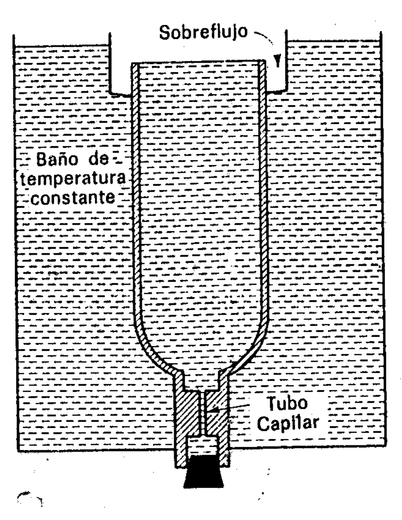
El par debido al disco y al cilindro debe ser igual al par $T$ de torsión del hilo, así,

$$T = \frac{\mu\pi^2 N r_1^4}{a60} + \frac{\mu\pi^2 r_1^2 r_2 h N}{15b} = \frac{\mu\pi^2 N r_1^2}{15}\left(\frac{r_1^2}{4a} + \frac{r_2 h}{b}\right) \tag{8.10.4}$$

en la cual todas las cantidades son conocidas excepto $\mu$. El flujo entre las superficies debe ser laminar para que las Ecs. (8.10.2) a (8.10.4) sean válidas.

A menudo se modifica la geometría del cilindro interior de manera que se elimine el par que actúa sobre la superficie inferior. Si la superficie del fondo del cilindro interior es cóncava, se debe quedar una bolsa de aire ocluido entre la superficie del fondo del cilindro interno y el fluido en la copa exterior que gira. Una copa bien diseñada y un procedimiento de llenado cuidadoso, asegurará la condición por la que el par medido constará del producido en el anillo entre los dos cilindros y una pequeña cantidad que resulta de la acción del aire sobre la superficie del fondo. Naturalmente el viscosímetro va provisto de un baño de temperatura controlada y un motor de velocidad variable que se puede regular cuidadosamente. Se necesitan estos perfeccionamientos de diseño a fin de obtener los diagramas reológicos (ver Fig. 1.2) del fluido en ensayo.


*Fig. 8.44 Vista esquemática del viscosímetro Saybolt.*




La medida de todas las magnitudes de la ecuación de Hagen-Poiseuille, excepto $\mu$, por una experiencia convenientemente dispuesta, es otro método fundamental para la determinación de la viscosidad. El dispositivo de la Fig. 8.43 puede ser usado. Se necesita una cierta distancia contada desde la entrada para que el fluido adquiera su distribución de velocidades características; por eso, la altura o presión debe medirse por algún medio en un punto del tubo a cierta distancia del depósito. El volumen $\mathcal{V}$ del fluido que sale durante un tiempo $t$ cuando el nivel del depósito se mantiene constante puede medirse, lo que nos permite conocer $Q$, y determinando $\gamma$, puede calcularse $\Delta p$. Entonces con $L$ y $D$ conocidos de la Ec. (5.2.10$a$)

$$\mu = \frac{\Delta p \pi D^4}{128 Q L}$$

Como es difícil de medir la presión en el tubo y determinar su diámetro y estar seguro de que es uniforme, se usa el viscosímetro de *Saybolt*, que es una adaptación del tubo capilar a fines industriales (Fig. 8.44). Se utiliza un corto tubo capilar, midiendo el tiempo que tardan en fluir 60 cm³ de fluido a través del tubo bajo una cierta altura. El tiempo en segundos es la lectura Saybolt. Este dispositivo mide la viscosidad cine-

mática según se deduce de la Ec. (5.2.10*a*). Como $\Delta p = \rho gh$, $Q = \text{vol}/t$, si se separan los términos que son independientes del fluido, resulta

$$\frac{\mu}{\rho t} = \frac{gh\pi D^4}{128(\text{vol})L} = C_1$$

Aunque la altura $h$ varía durante la prueba varía en el mismo intervalo para todos los líquidos; y los términos de la derecha pueden considerarse como constantes de un instrumento particular. Como $\mu/\rho = \nu$, la viscosidad cinemática es

$$\nu = C_1 t$$

lo que demuestra que la viscosidad cinética varía en razón directa del tiempo. El tubo capilar es tan corto que la distribución normal de velocidades no llega a establecerse. El flujo tiende a entrar uniformemente, y después, debido a la resistencia viscosa de las paredes, es frenado en las capas en contacto con éstas, mientras que en el centro la velocidad resulta mayor. La ecuación anterior necesita, por tanto, una corrección que es de la forma $C/t$; por consiguiente,

$$\nu = C_1 t + \frac{C_2}{t}$$

La relación que aproximadamente liga a la viscosidad con los segundos Saybolt es

$$\nu = 0{,}0022t - \frac{1{,}80}{t}$$

en la cual $\nu$ está en stokes y $t$ en segundos.

Para medir la viscosidad existen otros métodos industriales que generalmente tienen que ser calibrados en cada caso especial para convertir sus medidas en unidades absolutas. Uno de ellos consiste en varios tubos que contienen líquidos «patrones» de viscosidades conocidas con una bola de acero en cada uno de los tubos. El tiempo que tarda la bola en caer recorriendo toda la longitud del tubo depende de la viscosidad del líquido. Realizando esta sencilla prueba en un tubo similar, la viscosidad del líquido puede determinarse aproximadamente comparándola con la de los líquidos de otros tubos.

El flujo de un fluido en un tubo capilar es la base de los viscosímetros del tipo Oswald-Cannon-Fenske o Ubbelohde. En esencia, el viscosímetro es un tubo en U, una de cuyas ramas es un tubo capilar con un depósito en la parte superior. El tubo se mantiene vertical, y se coloca en el depósito una cantidad conocida de fluido que se permite bajar por gravedad a través del capilar. Se registra el tiempo que tarda en bajar la superficie libre en el depósito entre dos marcas hechas previamente. Una constante de calibración para cada instrumento tiene en cuenta la variación del taladro del capilar a partir del normal, la uniformidad del taladro, las condiciones de entrada y la ligera falta de constancia debida al descenso de altura durante el ensayo de 1 a 2 minutos. Se pueden obtener varios tamaños de taladros para cubrir un margen amplio de viscosidades. Los procedimientos exactos para efectuar los ensayos se describen en las «Normas» de la American Society for Testing and Materials.



## 8.11 *Amplificadores de fluido*

Las fotografías de la Fig. 8.45 muestran la operación de un tipo de amplificador de fluido o, en este caso, un conmutador de fluido. Muchas de las formas de este aparato tienen una geometría análoga a la de la figura. Fundamentalmente, todo lo que se necesita para un amplificador de fluido de este tipo es una pieza plana de metal o de plástico en la que se han mecanizado o labrado químicamente pasos de pequeña abertura en los que puede moverse el fluido (por ejemplo, aire, agua). La disposición de los pasos y de las cámaras difiere para cada tipo de amplificador, pero en principio todos tienen una corriente principal, o de potencia, que cambia su dirección o alguna otra característica del movimiento debido a la acción de un chorro de control. Por ejemplo, un flujo laminar marginalmente estable se puede hacer turbulento mediante un chorro de control.

El chorro de control de la Fig. 8.45 no solo cambia la dirección del chorro de potencia, ya que actúa como un conmutador, sino que además actúa como un amplificador. La cantidad de movimiento lineal del chorro de potencia es mayor que la del chorro de control, y su relación se puede tomar como medida de la amplificación que se produce en la operación de conmutación. La amplificación total de los aparatos de fluido del tipo estudiado se puede aumentar conectándolos juntos de manera que los orificios del chorro de potencia del primer aparato (canales superior e inferior de la Fig. 8.45) estén conectados con los del chorro de control del segundo aparato y así sucesivamente.

Naturalmente, la alta amplificación que resulta de tener varias etapas es muy útil, pero igualmente importante es el hecho de que una vez que el chorro de potencia se ha «conmutado», permanecerá así hasta que haya desaparecido el chorro de control. El fenómeno que determina este comportamiento se denomina efecto Coanda, en honor de uno de los primeros investigadores que observaron y utilizaron dicho fenómeno. El y otros investigadores se ocuparon activamente de estudiar la dinámica del fluido en los canales que tienen una forma análoga a la de la Fig. 8.45. Esta investigación se realizó en la década de 1930, pero tuvo poca difusión debido al estado en que se encontraban otras tecnologías. Si se desea

El divisor se puede retirar aún más para dar una cámara de interacción sustancial entre él y la entrada del chorro de potencia. Esta cámara se puede utilizar para dar una memoria al amplificador de fluido. Esta geometría no afecta ni a la preferencia del chorro de potencia por un canal ni a su desviación al, y retención en, el otro canal como resultado de un impulso corto del chorro de control. Pero cuando el fluido se mueve en un canal, se induce un vórtice en la cámara de interacción en el lado opuesto a aquel en que se mueve el chorro de potencia (esquina superior izquierda de la Fig. 8.45*a*). Este vórtice tratará de continuar aunque haya variaciones en el flujo que le creó. Si se bloquea mecánicamente la salida del canal en el que fluye el chorro de potencia, éste se verá forzado naturalmente a moverse en el otro canal. Entonces el vórtice inducido queda comprimido entre el chorro de potencia desviado y la pared de la cámara de interacción. Cuando se quita el bloqueo mecánico del canal en el que se movía en primer lugar el chorro de potencia, el vórtice atrapado se expansiona y fuerza al chorro de potencia a su curso original, que está abierto de nuevo.

Los ingenieros han estado buscando otros medios completamente naturales de conseguir la amplificación y la conmutación de fluidos. Se puede hacer un aparato de este tipo sacando un chorro de fluido de un tubo de diámetro pequeño dirigido al interior de un tubo algo mayor concéntrico con el pequeño. El chorro de potencia entra en el tubo mayor después de fluir a través del huelgo pequeño. Si hay tubos de control laterales, puede ser activado para dar un flujo lateral, formando ángulo recto con el chorro de potencia, que dará lugar a que el chorro de potencia pase de un estado laminar a otro turbulento con la disminución consiguiente de la cantidad de fluido que entra en el tubo mayor. De nuevo se puede lograr un efecto grande a partir de una causa pequeña. En el estudio original de Prandtl sobre la teoría de la capa límite en 1904, mostraba fotografías de cómo se podía controlar la situación de la separación de la capa límite (ver en el Cap. 5 la separación de la capa límite en placas y esferas). Estos métodos de controlar la capa límite se emplean hoy en los amplificadores de fluido para lograr efectos específicos para aplicaciones particulares.

El amplificador de fluido no puede igualar los resultados de una unidad electrónica en temperaturas próximas a la del ambiente, pero a temperaturas muy altas y muy bajas la ventajosa estabilidad a la temperatura del amplificador de fluido compensa su inconveniente de menor velocidad de operación. Por tanto, se pueden construir controladores de fluido seguros y circuitos de cálculo para operar a temperaturas extremas.

El amplificador de fluido se utiliza fácilmente para computar aparatos ya que cada uno de los dos canales de la Fig. 8.45 se puede considerar como «sí» o «no», «más» o «menos», 0 ó 1. Por situación idónea de los canales respecto a los chorros de control se pueden hacer circuitos «sí» y «no», de manera que son posibles aparatos lógicos y sumadores. Dichas

unidades digitales, que dan una respuesta distinta, se pueden ampliar con unidades analógicas, que dan una respuesta que varía continuamente según el grado en que se emplee el chorro de control.

En el amplificador de fluido estudiado antes, que tiene dos tubos concéntricos unidos mediante un chorro de fluido, se puede hacer que la respuesta dependa de una manera continua de los chorros de control. Porque si solo se activa ligeramente el chorro de control, el chorro de potencia solo se hace ligeramente turbulento, y la mayor parte de él fluye del tubo menor al mayor. Pero si se aplica fuertemente el chorro de control, entonces solo entra un poco del chorro de potencia en el tubo mayor.

El aparato recién mencionado, igual que el canal divergente y otros muchos, son los duplicados de fluido de los aparatos eléctricos, que son sensibles direccionalmente. Es evidente que cuando se envía un chorro desde un tubo pequeño a otro mayor, habrá un tanto por ciento mayor de flujo entrante en el segundo tubo que cuando el chorro va del tubo mayor al menor. De una manera análoga el flujo en un canal divergente es completamente distinto del de un canal convergente.

Estas características variadas del flujo fluido en canales diseñados especialmente excita la imaginación de muchos ingenieros. Han encontrado aplicaciones en los sistemas de los cohetes, donde hay una vibración muy fuerte y condiciones del medio ambiente muy rigurosas, así como en trabajos biomédicos recientes. Se ha desarrollado un corazón artificial, y un respirador automático que ayuda a los pacientes a respirar.

## 8.12 Principios de control de la presión y de flujo

Las secciones precedentes de este capítulo se han referido a la medida de las propiedades y características del fluido. Hoy en día no basta con medir estas características en los sistemas de fluidos, también es necesario controlarlos. Esta sección estudia los principios del control de la presión y del flujo utilizando sistemas de retroalimentación neumática de operación con válvulas.

Para modificar el flujo en un sistema se gradúa la abertura de la válvula. El obturador de la válvula introduce pérdidas en el sistema, generalmente proporcionales al cuadrado del caudal, $KV^2/2g$ (Sec. 5.10), donde $K$ es principalmente función de la abertura de la válvula. Para una válvula cerrada, $K$ es infinito. La aplicación de la ecuación de la energía, incluido el término de las pérdidas en la válvula, permite calcular el flujo. Cuando en un sistema el flujo y la presión (o la caída de presión) están relacionados, se puede controlar el flujo mediante un control de la presión adecuado.



### *Válvulas de control*

Las válvulas de control se pueden clasificar de una manera amplia en dos categorías, válvulas de cierre y válvulas de control. Una válvula de cierre, tal como una válvula de compuerta, normalmente está o totalmente abierta o totalmente cerrada. Una válvula de control trabaja de modo que reduce el flujo o introduce pérdidas en el sistema. Para que sea una buena válvula de control debe resistir la acción erosiva del fluido a alta velocidad pasando por su abertura, y también ha de ser sensible al movimiento del vástago en todo el margen de operación. Esto se puede cumplir por medio de una guía cuidadosa del vástago de la válvula y un perfil adecuado del obturador (o parte móvil) de la válvula. La Fig. 8.46 es una sección recta de una válvula de obturación de dos vías, guiada en la parte superior y en la inferior, junto con un impulsor que proporciona

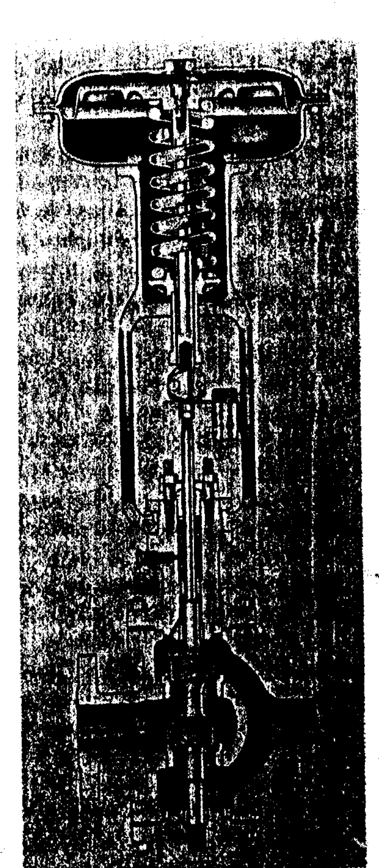


*Fig. 8.46 Válvula de control de doble vía, guiada arriba y abajo con un actuador de presión de aire de diafragma. (Fisher Governor Co.)*

la potencia para mover el cierre mediante un diafragma, un muelle y aire comprimido. El perfil del cierre representado da una variación de flujo de igual tanto por ciento para un desplazamiento dado del vástago en el margen completo de movimiento para una caída de presión dada. Hay otros muchos perfiles especiales de válvulas de cierre que se emplean para distintos casos de control de flujo.

*Elementos de los sistemas de control*

A continuación se describen el posicionador de válvula, el controlador de presión y el transmisor neumático de posición y después se incorporan a un sistema.

Cuando se desea que una válvula tenga una abertura específica para una señal de control dada, se emplea un *posicionador de válvula*, que sitúa, mediante control por retroalimentación, el obturador en la posición con independencia de las presiones o fuerzas no equilibradas del fluido que actúan sobre el obturador. La Fig. 8.47 es una vista esquemática de un posicionador. La señal (suponiendo que se trata de un incremento positivo de la presión) que indica la situación deseada se aplica al interior del fuelle. Este se extiende y da lugar a que el conjunto de la varilla y la paleta reduzca más la tobera. El aire de alimentación se purga a través de un estrechamiento pequeño, de área mucho menor que la tobera, en la cámara de la tobera. Cuando el aire detrás de la tobera se limita aún más al moverse hacia ella el conjunto de la varilla, aumenta la presión y mueve un conjunto diafragma-relé, que abre la válvula de alimentación de la parte superior del impulsor. Cuando el vástago de la válvula se mueve hacia abajo, se suministra alimentación por medio de la leva, que gira y mueve el conjunto de la varilla separándole de la tobera. Disminuye la presión en la tobera, y la válvula que alimenta el relé se cierra para evitar cualquier aumento de la presión de salida. De nuevo está en equilibrio el posicionador, pero a una presión mayor del instrumento (señal) y una nueva posición del obturador de la válvula.

Cuando disminuye la presión del instrumento, el fuelle se contrae, mueve la varilla y destapa la tobera. El relé actúa bajo una presión más baja y abre la válvula de salida del relé con lo que permite que el vástago de la válvula se mueva hacia arriba. El movimiento del vástago se transmite a la leva, que vuelve a colocar en su posición a la varilla y la paleta cuando se alcanzan las condiciones de equilibrio. La válvula de salida se cierra para evitar cualquier nueva variación en la presión del recipiente.

Se emplea un *controlador de presión* para mantener ésta en un conducto en un valor deseado mediante un adecuado posicionado de la válvula de control. En la Fig. 8.48 se controla la presión aguas abajo al valor del dial, que sitúa el fuelle fijado en un extremo de la barra $C$. El otro extre-



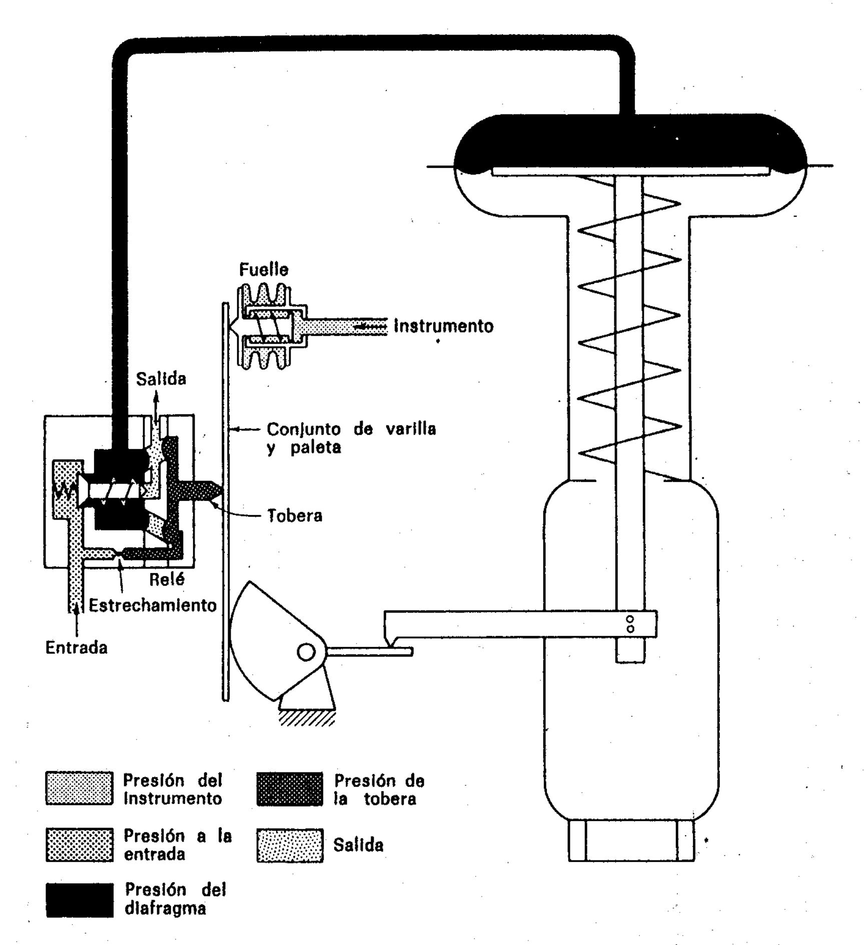



*Fig. 8.47 Circuito esquemático de control para posicionador de válvula. (Fisher Governor Co.)*

mo se fija al tubo bourdon $T$. Este último se conecta al conducto, con lo que es sensible a su presión, tendiendo a enderezarse y elevar la barra cuando aumenta la presión. El conjunto del relé es análogo al del posicionador y da lugar a que el aire suministrado en la parte superior de la carcasa de la válvula salga cuando la barra cubra o destape la tobera. El mecanismo de alimentación $M$ vuelve a situar la barra después del ajuste de la presión, y se ajusta de manera que puede cubrir el recorrido completo de la válvula para el margen de presión deseado de regulación.

En lugar del ajuste manual del dial a la presión que se controla, el fuelle inferior de la Fig. 8.48 puede tomar una posición que dependa

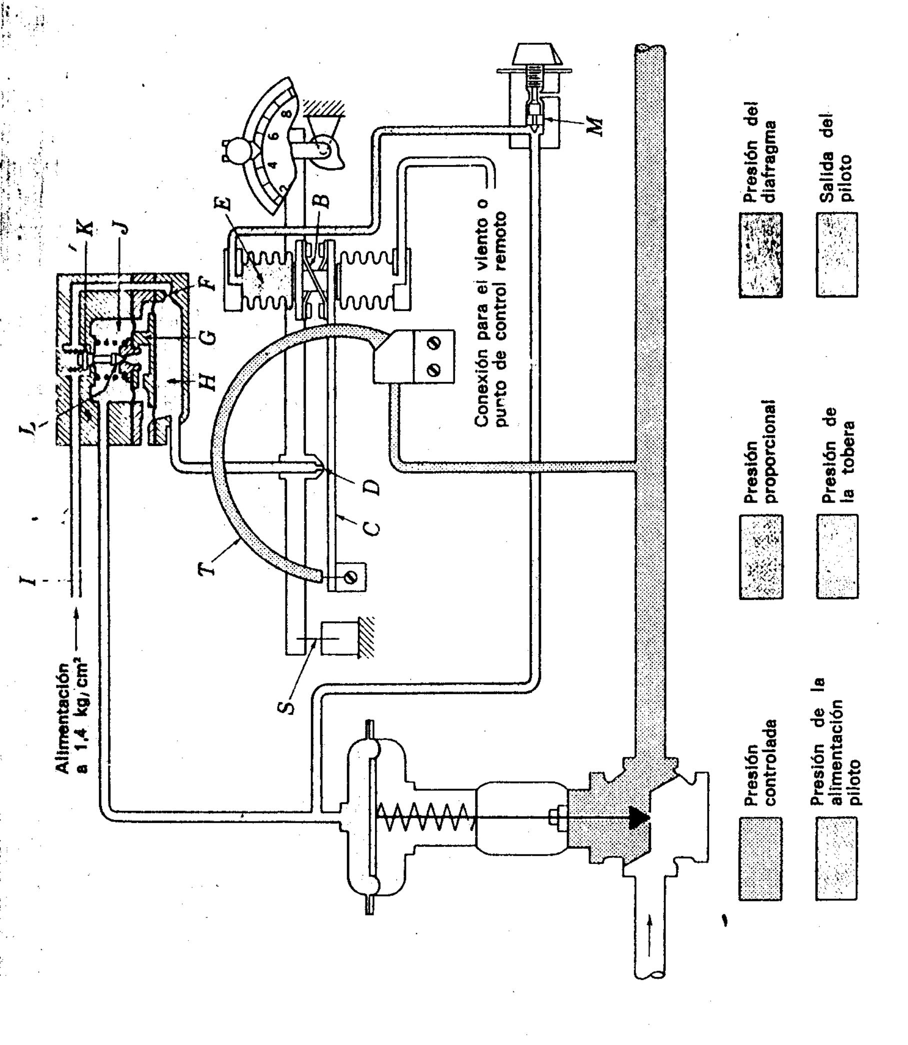



*Fig. 8.48 Circuito esquemático de control de un controlador de presión. (Fisher Governor Co.)*



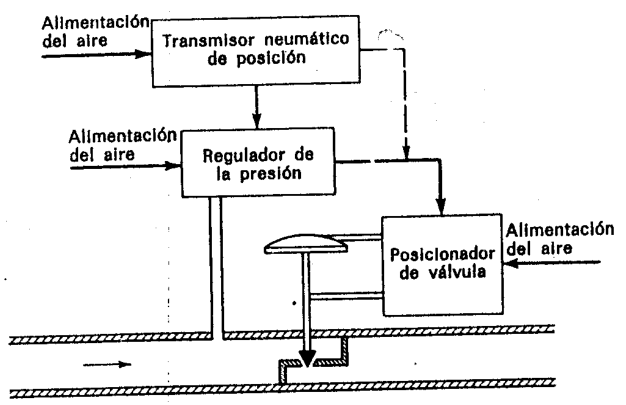



*Fig. 8.49 Diagrama del sistema de control para variación de la presión en una tubería de una manera determinada arbitrariamente.*

de la presión dentro de él, que coloca uno de los extremos de la barra; por consiguiente, se puede obtener un ajuste remoto de la presión deseada. Además, la señal se puede variar en función del tiempo.

Si la presión en una sección de la tubería, aguas arriba de la válvula, se desea que varíe en función del tiempo, dicha presión se puede conseguir como una señal del controlador de presión mediante el *transmisor neumático de posición*. En primer lugar se puede introducir la señal deseada en un calibre que gira a velocidad constante, dando lugar a que la leva de un posicionador de válvula se desplace (Fig. 8.49). Se inyecta en el circuito del posicionador una presión proporcional al desplazamiento de la leva; por tanto, a partir de un calibre, se genera una señal de presión de aire; esta señal al llegar al controlador de presión hace que el posicionador mueva la válvula de manera que se obtenga en la tubería la presión del fluido.

Si se desea una determinada *posición* del obturador de la válvula, en función del tiempo, se indica dicha posición mediante la altura de un calibre que actúa sobre la leva del transmisor neumático de posición. Haciendo que esta señal vaya directamente al posicionador, se coloca el obturador en la posición deseada.

## Problemas

*8.1* Un tubo estático (Fig. 8.2) indica una presión estática que es 0,01 kg/cm² menor que la verdadera cuando la velocidad del agua es de 2 m/seg. Calcular la corrección que debe aplicarse a la presión indicada cuando la velocidad del agua es de 4 m/seg.

*8.2* Cuatro piezómetros abiertos, colocados en la misma sección recta de una tubería de fundición indican las siguientes presiones: 0,303, 0,300, 0,299 y

0,261 kg/cm², siendo las lecturas simultáneas. ¿Qué valor debe tomarse para la presión?

**8.3** Un tubo de Pitot simple (Fig. 8.6) está colocado dentro de una corriente pequeña de aceite, $\gamma = 880$ kg/m³, $\mu = 0{,}65$ poise, $\Delta h = 40$ mm, $h_0 = 120$ mm. ¿Cuál es la velocidad en el punto 1?

**8.4** Un cuerpo en reposo, sumergido en un río, tiene una presión máxima de 1 kg/cm² (man) ejercida sobre un punto de su superficie, que dista de la superficie libre 6 m. Calcular la velocidad del agua del río a esta profundidad.

**8.5** Deducir de la Fig. 8.7 la ecuación de la velocidad en 1.

**8.6** En la Fig. 8.7 está fluyendo aire [$p = 1{,}10$ kg/cm² (abs), $t = 4°$ C] y el líquido manométrico es agua. Para $R' = 3$ cm, calcular la velocidad del aire.

**8.7** En la Fig. 8.7 fluye aire [$p = 1{,}2$ kg/cm² (abs), $t_1 = 5°$ C] y el manómetro es de mercurio. Para $R' = 200$ mm, calcular la velocidad en 1, (*a*) para compresión isoentrópica del aire entre 1 y 2 y (*b*) considerando el aire incompresible.

**8.8** Un tubo de Pitot estático, colocado en una corriente de agua de 4 m/seg, marca una diferencia de 3,70 cm en un manómetro diferencial de agua y mercurio. Determinar el coeficiente del tubo.

**8.9** En un tubo de Pitot estático con $C = 1{,}13$ la lectura de su manómetro diferencial de agua-mercurio es de 50 mm cuando está sumergido en una corriente de agua. Calcular la velocidad.

**8.10** Un tubo de Pitot estático del tipo de Prandtl da las siguientes lecturas $R'$ en función de la distancia radial desde el eje de una tubería de 90 cm de diámetro:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$, cm | 0 | 9,0 | 18,0 | 27,0 | 36,0 | 44,4 |
| $R'$, cm | 10,2 | 9,9 | 9,5 | 8,8 | 7,7 | 6,7 |

El líquido que circula es agua, y el fluido manométrico tiene una densidad relativa de 2,93. Calcular el caudal.

**8.11** ¿Cuál sería la diferencia manométrica en un manómetro de agua-nitrógeno para flujo de nitrógeno a 180 m/seg utilizando un tubo de Pitot estático? La presión estática es 2 kg/cm² (abs) y la temperatura correspondiente 25° C. Mediante el tubo se mide la verdadera presión estática.

**8.12** Medidas efectuadas en una corriente de aire dan como presión absoluta de estancamiento 1,2 kg/cm², presión estática absoluta 0,8 kg/cm² y temperatura de estancamiento 39° C. Determinar la temperatura y la velocidad de la corriente de aire.

**8.13** 0,05 $kg_m$/seg de nitrógeno fluyen por un tubo de diámetro 50 mm con temperatura de estancamiento 40° C y temperatura no perturbada de 20° C. Hallar la velocidad y las presiones estática y de estancamiento.

**8.14** Un medidor de disco tiene un desplazamiento volumétrico de 28,40 cm³ para una oscilación completa. Calcular el caudal en litros por minuto para 86,5 oscilaciones por minuto.

**8.15** Un medidor de disco para agua con un desplazamiento volumétrico de 0,04 litros por oscilación necesita 470 oscilaciones por minuto para que pasen 19 l/min, y 3.990 oscilaciones por minuto para que pasen 160 l/min. Calcular el tanto por ciento de error del medidor.



**8.16** Un depósito cilíndrico de 1,2 m de diámetro y 1,5 m de altura se llenó de aceite en 16 min 32,4 seg. ¿Cuál es el caudal medio de llenado, medido en litros por minuto?

**8.17** Un depósito que contiene 7,5 kg de aceite, de peso específico relativo 0,86, se ha llenado en 14,9 seg. ¿Cuál es el caudal en litros por minuto?

**8.18** Determinar la ecuación de la trayectoria de un chorro que sale horizontalmente por un pequeño orificio, bajo una carga de 5 m y con un coeficiente de velocidad de 0,96. Despreciar la resistencia del aire.

**8.19** Por un orificio de 28 cm² de área, 1,1 m por debajo de la superficie libre, sale un caudal de 645 kg de aceite, de peso específico relativo $S = 0{,}91$, en 79,3 seg. La medida de la trayectoria ha dado $X = 3{,}35$ m, $Y = 1{,}86$ m. Determinar $C_v$, $C_c$ y $C_d$.

**8.20** Calcular $Y$, altura máxima que alcanza un chorro que sale de un plano inclinado (Fig. 8.50) en función de $H$ y $\alpha$. Despreciar las pérdidas.

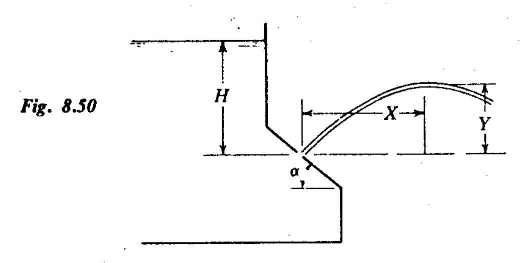


**Fig. 8.50**

**8.21** En la Fig. 8.50, $\alpha = 45°$, $Y = 0{,}48H$. Hallar $C_v$ para el orificio despreciando la resistencia del aire.

**8.22** Demostrar que el lugar geométrico de los puntos máximos del chorro de la Fig. 8.50 viene dado por

$$X^2 = 4Y(H - Y)$$

despreciando las pérdidas.

**8.23** Por un orificio de 75 mm de diámetro salen 2 m³ de un líquido de peso específico relativo 1,07 en 82,2 seg, estando el orificio 3 m por debajo de la superficie libre. La velocidad en la *vena contraída* se determina con un tubo de Pitot estático de coeficiente 1,0. El líquido del manómetro es tetrabromuro de acetileno de peso específico relativo 2,96 y la lectura manométrica es $R' = 1$ m. Determinar $C_v$, $C_c$ y $C_d$.

**8.24** Un orificio de 10 cm de diámetro desagua 44,2 l/seg de agua, bajo una carga de 2,75 m. Una placa plana, mantenida normal al chorro, justamente aguas abajo de la *vena contraída*, requiere una fuerza de 31,7 kg para resistir el impacto del chorro. Determinar $C_d$, $C_v$ y $C_c$.

**8.25** Calcular el caudal que sale por el orificio de la Figura 8.51.

**8.26** Para $C_v = 0{,}96$ en la Fig. 8.51, calcular las pérdidas en kilográmetros por kilogramo y en kilográmetros por segundo.

**8.27** Calcular el caudal que sale por el orificio de la Figura 8.52.

**8.28** Para $C_v = 0{,}93$ en la Fig. 8.52, determinar las pérdidas en kilográmetros por kilogramo y en kilográmetros por segundo.

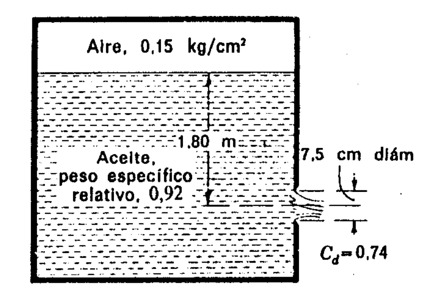



Fig. 8.51

**8.29** Por un orificio de diámetro 100 mm a una profundidad de 3,6 m sale un caudal de 40 l/seg. El diámetro del chorro en la *vena contraída* medido con un calibre es de 86 mm. Calcular $C_v$, $C_d$ y $C_c$.

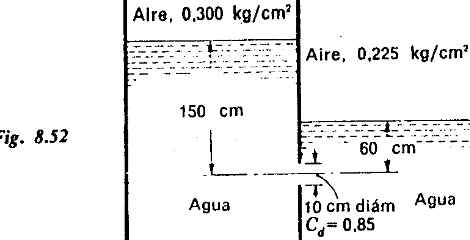



Fig. 8.52

**8.30** Una boquilla de Borda de 5 cm de diámetro tiene un coeficiente de desagüe de 0,51. ¿Cuál es el diámetro del chorro contraído que penetra en la boquilla?

**8.31** Un orificio de 90 mm de diámetro, $C_d$ = 0,82, está colocado en el fondo de un depósito vertical que tiene un diámetro de 1,2 m. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la superficie descienda de 2,4 m a 1,8 m de altura?

**8.32** Seleccionar el tamaño del orificio que permita, en un depósito cuya sección recta horizontal es de 1,5 m², que la superficie libre descienda a una velocidad de 0,2 m/seg, cuando la altura de carga sobre el orificio sea de 3,4 m. $C_d$ = 0,63.

**8.33** Un orificio de 100 mm está situado en un lado de un depósito de 1,8 m de diámetro y hace bajar la superficie de 2,4 a 1,2 m en 83,7 seg. Calcular el coeficiente de desagüe.

**8.34** Seleccionar el tamaño y forma de un recipiente de tal forma que su superficie libre descienda a una velocidad de 1 m/min, sobre una distancia total de 3 m, cuando desagua a través de un orificio de 10 cm de diámetro. $C_d$ = 0,74.

**8.35** El tronco de cono de la Fig. 8.53 tiene un orificio en el fondo. $\theta$ = 60°. ¿Cuánto tiempo tardará la superficie en descender desde 3,6 a 1,2 m?

**8.36** Calcular las dimensiones de un depósito tal que la velocidad con que desciende la superficie libre sea inversamente proporcional a la distancia que separa dicha superficie del eje del orificio de desagüe del depósito. Cuando la altura de carga es de 30 cm, la velocidad de descenso de la superficie libre es 3 cm/seg. Diámetro del orificio 10 mm, $C_d$ = 0,66.



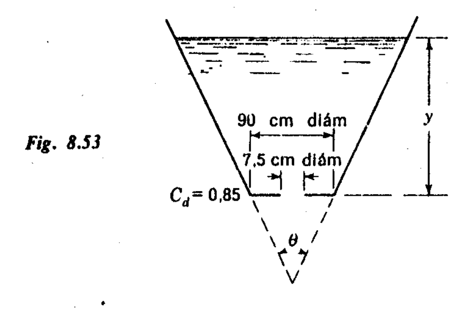



Fig. 8.53

**8.37** Calcular el tiempo necesario para hacer descender 0,75 m la superficie libre del depósito de la izquierda de la Figura 8.54.

**8.38** ¿Cuánto tiempo tarda en elevarse la superficie libre 2 m, en la Fig. 8.55? La superficie libre de la izquierda pertenece a un depósito de grandes dimensiones, y la elevación de la misma se supone constante.

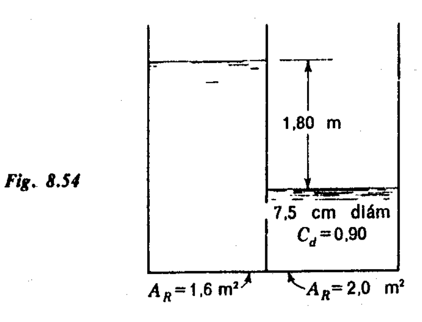



Fig. 8.54

**8.39** Demostrar que en el movimiento de un fluido incompresible la energía perdida por unidad de peso entre las secciones de aguas arriba y de la garganta de un venturímetro es $KV_2^2/2g$, si $K = [(1/C_v)^2 - 1][1 - (D_2/D_1)^4]$.

**8.40** Por un venturímetro de 500 por 250 cm circula agua a 27° C. Un manómetro diferencial de agua y aire da una lectura 6,1 cm. ¿Cuál es el caudal?

**8.41** ¿Cuál es la diferencia de presiones entre una sección de aguas arriba y

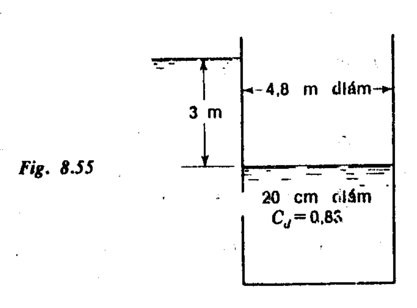



Fig. 8.55

la de garganta de un venturímetro horizontal de 150 por 75 mm por el que pasa un caudal de 3.000 l/min de agua a 50° C?

*8.42* Un venturímetro de 30 por 15 cm está montado en una tubería vertical en la que el flujo es ascendente. A través de la tubería circulan 3.800 l/min de un aceite, de densidad relativa 0,80 ; $\mu$ = 1 poise. La sección de garganta está situada 10 cm por encima de la sección de entrada. ¿Qué valor tiene $p_1 - p_2$?

*8.43* A través de un venturímetro fluye aire en una tubería de 50 mm de diámetro que tiene un diámetro de garganta de 32 mm, $C_v = 0{,}97$. Para $p_1$ = 8 kg/cm² (abs), $t_1$ = 15° C, $p_2$ = 6 kg/cm² (abs) calcular el caudal de masa.

*8.44* A través de un venturímetro de 24 por 12 mm, y con una caída de presión de 0,5 kg/cm², circula una corriente de oxígeno a $p_1$ = 3 kg/cm² (abs) y $t_1$ = 50° C. Determinar el caudal en masa y la velocidad en la garganta.

*8.45* A través de una tobera VDI de 76 mm de diámetro fluye aire en una tubería de 100 mm de diámetro. $p_1$ = 1,5 kg/cm² (abs), $t_1$ = 5° C y un manómetro diferencial con un líquido de peso específico relativo 2,93 tiene una diferencia manométrica de 80 cm cuando se conecta entre los orificios de toma de presión. Calcular el caudal en masa.

*8.46* Para medir el caudal de agua a 5° C en una tubería de 15 cm de diámetro se emplea una tobera VDI de 6 cm de diámetro. ¿Qué lectura dará un manómetro diferencial de agua y mercurio para un caudal de 1.100 l/min?

*8.47* Determinar el caudal en una tubería de 30 cm de diámetro con un orificio VDI de 20 cm de diámetro para agua a 20° C cuando la diferencia manométrica es de 30 cm en un manómetro diferencial de agua-tetrabromuro de acetileno (peso específico relativo 2,94).

*8.48* Un orificio VDI de 12 mm de diámetro está instalado en una tubería de 24 mm de diámetro que transporta nitrógeno a una presión absoluta $p_1$ = 9 kg/cm² y $t_1$ = 50° C. Para una caída de presión a través del orificio de 1,5 kg/cm², calcular el caudal en masa.

*8.49* A través de un conducto cuadrado de lado 90 cm que tiene un orificio de arista cuadrada de 45 cm de diámetro fluye aire a 1 kg/cm² y $t$ = 20° C. Con una pérdida de altura de 75 mm de columna de agua a través del orificio, calcular el caudal en litros por minuto.

*8.50* Un orificio VDI de 15 cm de diámetro está instalado en una línea de 30 cm de diámetro que transporta aceite, $\mu$ = 0,06 poises, $\gamma$ = 830 kg/m³. Se utiliza un manómetro diferencial de aceite y aire. Para una lectura de 55 cm, determinar el caudal en litros por minuto.

*8.51* Un vertedero rectangular en pared delgada de 3 m de longitud y 1,5 m de altura tiene las contracciones laterales suprimidas. Calcular el caudal cuando la altura de la lámina de agua sea de 0,25 m.

*8.52* En la Fig. 8.33, $L$ = 3 m, $P$ = 0,6 m, $H$ = 0,3 m. Calcular el caudal sobre el vertedero. $C$ = 1,84.

*8.53* Un vertedero rectangular en pared delgada con contracciones laterales tiene una longitud de 1 m. ¿A qué altura se debe colocar en un canal para conseguir una profundidad aguas arriba de 2 m con un caudal de 0,25 m³/seg?

*8.54* Determinar la carga sobre un vertedero en V de 60° para un caudal 170 l/seg.

*8.55* Experiencias realizadas con un vertedero en V de 90° han dado los siguientes resultados: $H$ = 0,20 m, $Q$ = 0,02 m³/seg, $H$ = 0,4 m, $Q$ = 0,2 m³/seg. Determinar la fórmula de este vertedero.



*8.56* Un vertedero rectangular de pared delgada de 1 m de longitud con las contracciones de los extremos suprimidas y un vertedero con entalla en V de 90° están colocados en el mismo asiento de vertederos, con el vértice del vertedero con entalla en V de 90° 15 cm por debajo de la cresta del vertedero rectangular. Determinar la altura de carga sobre el vertedero con entalla en V (*a*) cuando los caudales son iguales y (*b*) cuando el vertedero rectangular desagua el máximo caudal sobre el caudal desaguado por el vertedero con entalla en V.

*8.57* Un vertedero de pared gruesa de 1,50 m de alto y 3 m de largo tiene el borde aguas arriba redondeado. ¿Qué altura de carga se necesita para un caudal de 3 m³/seg?

*8.58* Un disco circular de 20 cm de diámetro está colocado a 0,03 cm de una placa plana. ¿Qué par se necesita para hacer girar el disco a 800 r.p.m. cuando el espacio entre placa y disco está lleno de aceite de $\mu$ = 0,8 poises?

*8.59* El viscosímetro de cilindros concéntricos (Fig. 8.41) tiene las dimensiones siguientes: $a$ = 0,3 mm, $b$ = 1,25 mm, $r$ = 70 mm, $h$ = 150 mm. El par vale 0,28 m kg cuando la velocidad es de 160 r.p.m. ¿Cuál es la viscosidad?

*8.60* El aparato de la Fig. 8.43, $D$ = 0,05 cm, $L$ = 100 cm, $H$ = 72 cm, vierte 60 cm³ en 1 h 30 min. ¿Cuál es la viscosidad en poises? $\gamma$ = 830 kg/m³

*8.61* Las propiedades piezoeléctricas del cuarzo se usan para medir

(*a*) temperatura (*b*) densidad; (*c*) velocidad; (*d*) presión; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*8.62* Un tubo estático se emplea para medir

(*a*) la presión en un fluido en reposo;
(*b*) la velocidad de una corriente fluida;
(*c*) la presión total;
(*d*) la presión dinámica;
(*e*) la presión en un fluido no perturbado.

*8.63* Un orificio piezométrico se emplea para medir

(*a*) la presión en un fluido en reposo;
(*b*) la velocidad en una corriente fluida;
(*c*) la presión total;
(*d*) la presión dinámica
(*e*) la presión en fluido no perturbado.

*8.64* El tubo de Pitot sencillo mide

(*a*) la presión estática;
(*b*) la presión dinámica;
(*c*) la presión total;
(*d*) la velocidad en el punto de estancamiento;
(*e*) la diferencia entre las presiones total y dinámica.

*8.65* Un tubo de Pitot estático ($C$ = 1) se usa para medir la velocidad del aire. En el manómetro diferencial de agua la diferencia de lecturas es 75 mm. La velocidad del aire para $\gamma$ = 1,0 kg/m³, en m/seg, es

(*a*) 1,22 (*b*) 4,80 (*c*) 7,34 (*d*) 38,7 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.66** El tubo de Pitot estático mide

(*a*) la presión estática;
(*b*) la presión dinámica;
(*c*) la presión total;
(*d*) la diferencia entre las presiones estática y dinámica;
(*e*) la diferencia entre las presiones total y dinámica.

**8.67** La temperatura de un gas en movimiento conocido se puede determinar midiendo

(*a*) solo la presión estática y de estancamiento;
(*b*) solo la velocidad y la presión de estancamiento;
(*c*) solo la velocidad y la presión dinámica;
(*d*) solo la velocidad y la temperatura de estancamiento;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.68** La velocidad de un gas conocido en movimiento se puede determinar midiendo

(*a*) solo la presión estática y de estancamiento;
(*b*) solo la presión estática y la temperatura;
(*c*) solo la temperatura estática y de estancamiento;
(*d*) solo la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.69** El manómetro de hilo caliente se usa para medir

(*a*) las presiones en los gases;
(*b*) las presiones en los líquidos;
(*c*) las velocidades del viento en los aeropuertos;
(*d*) las velocidades de los gases;
(*e*) los caudales de los líquidos.

**8.70** La ley de Snell relaciona

(*a*) la presión y la densidad en medidas ópticas;
(*b*) el ángulo de incidencia, el ángulo de refracción y el índice de refracción;
(*c*) la velocidad, la presión y las propiedades piezoeléctricas de los cristales;
(*d*) la densidad y el índice de refracción;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.71** La ecuación de Gladstone-Dale relaciona

(*a*) la presión y la densidad en medidas ópticas;
(*b*) ángulo de incidencia, ángulo de refracción e índice de refracción;
(*c*) velocidad, presión y las propiedades piezoeléctricas de los cristales;
(*d*) densidad e índice de refracción;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.72** El sistema óptico Schlieren registra

(*a*) las variaciones de temperatura en el flujo de un gas;
(*b*) las variaciones de presión en el flujo de un gas;



(*c*) las variaciones de densidad en el flujo de un gas;
(*d*) las variaciones del gradiente de densidades en el flujo de un gas;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.73** El sistema óptico Shadowgraph registra

(*a*) las variaciones de temperatura en el flujo de un gas;
(*b*) las variaciones de presión en el flujo de un gas;
(*c*) las variaciones de densidad en el flujo de un gas;
(*d*) las variaciones del gradiente de densidades en el flujo de un gas;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.74** El sistema óptico del interferómetro

(*a*) utiliza la arista viva de una cuchilla;
(*b*) necesita dos manantiales luminosos;
(*c*) depende del *desfase* en el movimiento de la onda luminosa;
(*d*) *divide* la luz de un manantial único en tres circuitos;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.75** Un medidor de desplazamiento de tipo pistón desplaza un volumen de 35,24 cm³ por cada revolución de su eje. Cuando gira a 1.000 r.p.m. el caudal, en litros por minuto, es de

(*a*) 1,88 (*b*) 4,66 (*c*) 35,20 (*d*) 10,60 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores;

**8.76** Por una tubería se ha suministrado agua a un depósito durante 10 min. El aumento de peso del depósito fue de 2.160 kg. El caudal medio en litros por minuto fue de

(*a*) 250,0 (*b*) 216,0 (*c*) 30,6 (*d*) 0,49 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.77** Un depósito rectangular con sección de área de 10 m² se ha llenado hasta una altura de 2 m durante 12 min con un líquido, en régimen permanente. El caudal en m³/seg fue de

(*a*) 1.665 (*b*) 16,65 (*c*) 0,278 (*d*) 27,80 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

**8.78** ¿Cuál de los siguientes aparatos se emplea para medir caudales?

(*a*) el medidor de velocidad de la corriente;
(*b*) el medidor de disco;
(*c*) el anemómetro de hilo caliente;
(*d*) el tubo de Pitot;
(*e*) el venturímetro.

**8.79** La velocidad real en la sección contraída de un fluido que fluye por un orificio desde un depósito se expresa por

(*a*) $C_v\sqrt{2gH}$ (*b*) $C_c\sqrt{2gH}$ (*c*) $C_d\sqrt{2gH}$ (*d*) $\sqrt{2gH}$
(*e*) $C_vV_a$

**8.80** El diámetro de un chorro que sale por un orificio de 50 mm de diámetro

tiene un diámetro de 43,6 mm en su *vena contraída*. El coeficiente de contracción es de

(*a*) 1,146 (*b*) 0,579 (*c*) 0,872 (*d*) 0,761 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.81*** La relación entre los caudales real y teórico a través de un orificio

(*a*) $C_cC_v$ (*b*) $C_cC_d$ (*c*) $C_vC_d$ (*d*) $C_d/C_v$ (*e*) $C_d/C_c$

***8.82*** Las pérdidas de energía en el flujo por un orificio son

(*a*) $\frac{1}{C_v^2}\left(\frac{V_{2a}^2}{2g} - 1\right)$ (*b*) $\frac{V_{2t}^2}{2g} - \frac{V_{2a}^2}{2g}$ (*c*) $H(C_v^2 - 1)$

(*d*) $H - V_{2t}^2/2g$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.83*** Para que una superficie líquida descienda a velocidad constante, el área del depósito $A_R$ debe variar con la altura de carga $y$ sobre el orificio de la manera siguiente:

(*a*) $\sqrt{y}$ (*b*) $y$ (*c*) $1/\sqrt{y}$ (*d*) $1/y$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.84*** Por una boquilla de Borda de 50 mm de diámetro sale un caudal de 0,008 $m^3$/seg bajo una altura de 3 m. El coeficiente de velocidad es

(*a*) 0,5 (*b*) 0,531 (*c*) 0,94 (*d*) 0,96 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.85*** El coeficiente de desagüe para un venturímetro de 100 por 50 mm para un número de Reynolds de 200.000 es de

(*a*) 0,95 (*b*) 0,96 (*c*) 0,97 (*d*) 0,98 (*e*) 0,99

***8.86*** Elegir la proposición correcta:

(*a*) El caudal a través de un venturímetro depende únicamente de $\Delta p$ y es independiente de la orientación del aparato.
(*b*) Por un venturímetro con una lectura manométrica dada $R'$ pasa un caudal mayor cuando el flujo es vertical hacia abajo a su través que cuando es vertical hacia arriba.
(*c*) Para una diferencia dada de presiones las ecuaciones demuestran que el caudal de un gas es mayor a través de un venturímetro cuando la compresibilidad se tiene en cuenta que cuando se desprecia.
(*d*) El coeficiente de contracción de un venturímetro es igual a la unidad.
(*e*) La pérdida total en una tubería dada es la misma si se intercala un venturímetro o una tobera del mismo $D_2$.

***8.87*** El factor de expansión $Y$ depende de

(*a*) $k$, $p_2/p_1$ y $A_2/A_1$
(*b*) $R$, $p_2/p_1$ y $A_2/A_1$
(*c*) $k$, $R$ y $p_2/p_1$
(*d*) $k$, $R$ y $A_2/A_1$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.



***8.88*** El caudal a través de un vertedero en V varía con

(*a*) $H^{-1/2}$ (*b*) $H^{1/2}$ (*c*) $H^{3/2}$ (*d*) $H^{5/2}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.89*** El caudal por un vertedero rectangular en pared delgada con contracciones laterales es menor que por el mismo vertedero con contracciones laterales suprimidas en un

(*a*) 5 por 100 (*b*) 10 por 100 (*c*) 15 por 100 (*d*) ningún porcentaje fijo (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.90*** Un medidor de caudal en masa, con radio a la salida del impulsor 15 cm, gira a 1200 r.p.m. y tiene aplicado un par de 0,4 mkg. La masa que fluye por segundo es, en $kg_m$/seg,

(*a*) 0,0036 (*b*) 0,043 (*c*) 0,216 (*d*) 1,39 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***8.91*** Un viscosímetro de fabricación casera del tipo Saybolt está calibrado para dos medidas con líquidos de viscosidad cinemática conocida. Para $v$ = 0,461 stoke, $t$ = 97 seg, y para $v$ = 0,18 stoke, $t$ = 46 seg. Los coeficientes $C_1$, $C_2$ en $v = C_1t + C_2/t$ son

(*a*) $C_1 = 0{,}005$, $C_2 = -2{,}3$ (*b*) $C_1 = 0{,}0044$, $C_2 = 3{,}6$ (*c*) $C_1 = 0{,}0046$, $C_2 = 1{,}55$
(*d*) $C_1 = 0{,}00317$, $C_2 = 14{,}95$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

## *Referencias*


Addison, Herbert: «Hydraulic Measurements», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1946.

Binder, R. C.: Flow Measurement, sec. 14 en «Handbook of Fluid Dynamics», ed. por V. L. Streeter, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.

Dryden, H. L., y A. M. Keuthe: The Measurement of Fluctuations of Air Speed by the Hot-wire Anemometer, *NACA Rept.* 320, 1929.

«Flow Measurement», American Society of Mechanical Engineers, 1940.

«Fluid Meters: Their Theory and Application», 4.ª ed., American Society of Mechanical Engineers, 1937.

Goldstein, S.: «Modern Developments in Fluid Mechanics», Oxford University Press, London, 1938.

Horton, Robert E.: Weir Experiments, Coefficients, and Formulas, *U. S. Geol. Surv. Water Supply and Irrigation Paper* 200, 1907.

Howarth, L.: «Modern Developments in Fluid Mechanics: High Speed Flow», Oxford University Press, Londres, 1953.

King, H. W., y E. F. Brater: «Handbook of Hydraulics», 5.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963.

Landenburg, R. W., B. Lewis, R. N. Pease y H. S. Taylor: «Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion», Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

Pankhurst, R. C., y D. W. Holder: «Wind-tunnel Technique», Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., Londres, 1952.

# 9

# Turbomaquinaria

La desviación de una corriente fluida o el cambio de intensidad de su velocidad requiere la aplicación de una fuerza. Cuando un álabe en movimiento desvía un chorro fluido y cambia su cantidad de movimiento, se ejerce una fuerza entre el álabe y el chorro, realizándose un trabajo al desplazarse el álabe. Las turbomáquinas hacen uso de este principio: las bombas axiales, mixtas y centrífugas y los turbocompresores, al estar realizando un trabajo continuo sobre el fluido aumentan su energía mecánica; las ruedas de impulsión, las turbinas Francis y las turbinas de hélice y de gas y vapor extraen continuamente energía del fluido y la convierten en par motor sobre un eje que gira, el acoplamiento fluido y el convertidor de par, compuestos cada uno de una bomba y una turbina construidas en un solo cuerpo, utilizan un fluido para transmitir una potencia suavemente. En el diseño de una turbomáquina eficiente se hace uso tanto de la teoría como de la experiencia. Un buen diseño de una máquina de un determinado tamaño y velocidad puede adaptarse fácilmente a otras velocidades y a otros tamaños geométricamente semejantes aplicando la teoría de los modelos semejantes, como se indicó en la Sección 4.5.

En primer lugar se estudian en este capítulo relaciones de semejanza por consideración de las unidades homólogas y la velocidad específica. A continuación se presenta la teoría elemental de la cascada, antes de considerar la teoría de las turbomáquinas. Después se estudian las turbinas y las bombas de agua, siguiendo los turbocompresores, los compresores centrífugos, los acoplamientos fluidos y los convertidores de par. El capítulo finaliza con una descripción de la cavitación.

### *9.1 Unidades homólogas. Velocidad específica*

Para emplear modelos a escala en el diseño de turbomáquinas, se requiere la semejanza geométrica así como que los diagramas vectoriales de velocidades a la entrada y a la salida del rodete sean geométricamente semejantes. Los efectos de viscosidad deben ser, desgraciadamente, despreciados, puesto que generalmente es imposible satisfacer las dos con-



***Fig. 9.1*** *Diagrama vectorial de velocidades a la salida del rodete de una bomba.*

diciones antes mencionadas y además lograr la igualdad de los números de Reynolds en el modelo y en el prototipo. Dos unidades geométricamente semejantes que tengan diagramas vectoriales de velocidades semejantes se dicen que son *homólogas*. Geométricamente también tendrán líneas de corriente semejantes.

El diagrama vectorial de velocidades a la salida del rodete de una bomba de la Fig. 9.1 puede utilizarse para formular las condiciones que tienen que cumplirse para que las líneas de corriente sean semejantes en dos unidades. El ángulo del álabe es $\beta$, $u$ es la velocidad periférica del rodete en el extremo exterior del álabe, $v$ es la velocidad del fluido *relativa* al álabe y $V$ es la velocidad absoluta al abandonar el rodete, suma vectorial de $u$ y $v$; $V_r$ es la componente radial de $V$ y es proporcional al caudal; $\alpha$ es el ángulo que forma la velocidad absoluta con $u$, cuya dirección es tangencial. Para que exista semejanza geométrica, $\beta$ debe ser igual en las dos unidades, y para que las líneas de corriente sean semejantes $\alpha$ debe también ser igual en las dos unidades.

Es conveniente expresar el hecho de que $\alpha$ es el mismo en una serie de turbomáquinas, llamadas unidades homólogas, relacionando la velocidad de rotación $N$, el diámetro del rodete (o cualquier otra dimensión característica) $D$ y el caudal $Q$. Para $\alpha$ constante $V_r$ es proporcional a $V$ ($V_r = V \operatorname{sen} \alpha$) y $u$ es proporcional a $V_r$. De aquí que las condiciones de $\alpha$ constante en una serie de unidades homólogas puedan ser expresadas por

$$\frac{V_r}{u} = \text{const}$$

El caudal $Q$ es proporcional a $V_r D^2$, puesto que el área de cualquier sección transversal del flujo es proporcional a $D^2$. La velocidad de rotación $N$ es proporcional a $u/D$. Sustituyendo estos valores:

$$\frac{Q}{ND^3} = \text{const} \qquad (9.1.1)$$

que expresa la condición para que unidades geométricamente semejantes sean homólogas.

El caudal $Q$ en unidades homólogas puede relacionarse con la altura $H$ y con el área de la sección de la corriente $A$ mediante la fórmula del caudal de desagüe por orificios

$$Q = C_d A \sqrt{2gH}$$

en el cual $C_d$, coeficiente de desagüe, varía ligeramente con el número de Reynolds y esto causa una pequeña variación en el rendimiento con el tamaño en una serie de unidades homólogas. La variación del caudal con el número de Reynolds se denomina «efecto de escala». Las máquinas más pequeñas, que tienen los radios hidráulicos de paso menores, tendrán números de Reynolds menores y, por consiguiente, coeficientes de rozamientos mayores; por tanto, el rendimiento es menor. La variación del rendimiento entre el modelo y el prototipo puede ser del 1 al 4 por 100. Sin embargo, como en la teoría de la semejanza, el efecto de escala debe despreciarse, se impone una corrección empírica que dé la variación del rendimiento con el tamaño [ver la Ec. (9.5.1)]. Como $A \sim D^2$, la fórmula del caudal puede escribirse

$$\frac{Q}{D^2\sqrt{H}} = \text{const} \qquad (9.1.2)$$

Eliminando $Q$ entre las Ecs. (9.1.1) y (9.1.2) resulta

$$\frac{H}{N^2D^2} = \text{const} \qquad (9.1.3)$$

Las Ecs. (9.1.1) y (9.1.3) son muy útiles para deducir las características de funcionamiento de una unidad a partir de las de otra unidad homóloga de diferente tamaño y velocidad†.

† La aplicación del análisis dimensional sirve de ilustración. Las variables que aparecen en las relaciones del flujo para unidades semejantes serían:

$$F(H, Q, N, D, g) = 0$$

Intervienen dos dimensiones $L$ y $T$; $N$ y $D$ pueden seleccionarse como variables que se repiten con lo que se obtiene

$$f\left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{H}{D}, \frac{g}{N^2D}\right) = 0$$

Después de despejar $H$,

$$H = Df_1\left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{g}{N^2D}\right)$$



***Ejemplo 9.1*** En las pruebas hechas con un prototipo de una bomba de flujo mixto con un rodete de 1,8 m de diámetro, al funcionar a 225 r.p.m. han resultado las siguientes características:

| $H_m$ | $Q_{m^3/seg}$ | $e$ % | $H_m$ | $Q_{m^3/seg}$ | $e$ % |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 5,70 | 69 | 12 | 10,85 | 86,3 |
| 17,25 | 6,50 | 75 | 11,25 | 11,25 | 84,4 |
| 16,5 | 7,30 | 80 | 10,5 | 11,70 | 82 |
| 15,75 | 8,00 | 83,7 | 9,75 | 12,10 | 79 |
| 15 | 8,10 | 86 | 9,00 | 12,45 | 75 |
| 14,25 | 9,40 | 87,3 | 8,25 | 12,80 | 71 |
| 13,5 | 9,80 | 88 | 7,5 | 13,00 | 66,5 |
| 12,75 | 10,60 | 87,4 | | | |

¿Qué tamaño y velocidad de sincronismo habrá de tener una bomba homóloga para elevar un caudal de 5,70 m³/seg a 18 m de altura funcionando en el punto de rendimiento óptimo? Encontrar las curvas características para este caso.

El subíndice 1 se refiere a la bomba de 1,8 m. Para el rendimiento óptimo tenemos $H_1 = 13{,}5$ m, $Q_1 = 9{,}80$ m³/seg, $e = 88$ por 100. De las Ecs. (9.1.1) y (9.1.3)

$$\frac{H}{N^2D^2} = \frac{H_1}{N_1^2D_1^2} \qquad \frac{Q}{ND^3} = \frac{Q_1}{N_1D_1^3}$$

o sea,

$$\frac{18}{N^2D^2} = \frac{13{,}5}{(225)^2(1{,}8)^2} \qquad \frac{5{,}7}{ND^3} = \frac{9{,}8}{225(1{,}8)^3}$$

La experiencia demuestra que el segundo parámetro adimensional interviene con la potencia $-1$; por consiguiente,

$$H = \frac{N^2D^2}{g} f_2\left(\frac{Q}{ND^3}\right)$$

o

$$\frac{gH}{N^2D^2} = f_2\left(\frac{Q}{ND^3}\right)$$

La curva característica para una bomba en forma adimensional es la representación gráfica de $Q/ND^3$ como abscisa en función de $H/(N^2D^2/g)$ como ordenada. Esta curva, obtenida experimentalmente para una unidad de la serie, se aplica a todas las unidades homólogas y puede convertirse en la curva característica usual, seleccionando los valores deseados de $N$ y $D$. Como la potencia es proporcional a $\gamma QH$, el término de la potencia en forma adimensional es

$$\frac{\gamma}{\gamma} \times \frac{Q}{ND^3} \times \frac{H}{N^2D^2/g} = \frac{\text{potencia}}{\rho N^3D^3}$$

Despejando $N$ y $D$,

$N = 366$ r.p.m. $\quad D = 1{,}278$ m

El valor de la velocidad de sincronismo más próximo (3.600 dividido por el número de pares de polos) es 360 r.p.m. Para mantener la altura deseada de 18 m es necesario un nuevo $D$ que puede calcularse así:

$$D = \sqrt{\frac{18}{13{,}5}} \times \frac{225}{360} \times 1{,}8 = 1{,}30 \text{ m}$$

Entonces el caudal para rendimiento óptimo es

$$Q = \frac{Q_1 N D^3}{N_1 D_1^3} = 9{,}80 \times \frac{360}{225}\left(\frac{1{,}3}{1{,}8}\right)^3 = 5{,}9 \text{ m}^3/\text{seg}$$

este valor es ligeramente mayor que el deseado. Con $N = 360$ y $D = 1{,}3$, las ecuaciones para calcular los valores de $H$ y $Q$ para cualquier otro rendimiento son

$$H = H_1\left(\frac{ND}{N_1 D_1}\right)^2 = H_1\left(\frac{360}{225} \times \frac{1{,}3}{1{,}8}\right)^2 = 1{,}336 H_1$$

y

$$Q = Q_1 \frac{ND^3}{N_1 D_1^3} = Q_1 \frac{360}{225} \times \left(\frac{1{,}3}{1{,}8}\right)^3 = 0{,}605 Q_1$$

Así, pues, las características de la nueva bomba son

| $H_m$ | $Q_{m^3/seg}$ | $e$% | $H_m$ | $Q_{m^3/seg}$ | $e$% |
|---|---|---|---|---|---|
| 24,0 | 3,45 | 69 | 16,0 | 6,56 | 86,3 |
| 23,0 | 3,93 | 75 | 15,0 | 6,80 | 84,4 |
| 22,0 | 4,42 | 80 | 14,0 | 7,07 | 82 |
| 21,0 | 4,85 | 83,7 | 13,0 | 7,32 | 79 |
| 20,0 | 4,90 | 86 | 12,0 | 7,54 | 75 |
| 19,0 | 5,68 | 87,3 | 11,0 | 7,75 | 71 |
| 18,0 | 5,90 | 88 | 10,0 | 7,86 | 66,5 |
| 17,0 | 6,40 | 87,4 | | | |

El rendimiento de una bomba de 1,3 m debe ser algo menor que el de otra de 1,8 m, ya que el radio hidráulico de paso del fluido es menor y, por tanto, el número de Reynolds debe ser menor.

### *Velocidad específica*

La velocidad específica de una unidad homóloga es una constante que se usa mucho para la selección del tipo de máquina y para un anteproyecto. Usualmente se define de una manera diferente para una bomba que para una turbina.



La velocidad específica $N_s$ de una serie de bombas homólogas se define como la velocidad de una de ellas de tal tamaño que proporcione un caudal unidad con una altura unidad. Se obtiene de la forma siguiente: Se elimina $D$ de las Ecs. (9.1.1) y (9.1.3) y se llega a

$$\frac{N\sqrt{Q}}{H^{\frac{3}{4}}} = \text{const} \tag{9.1.4}$$

Por definición, de la velocidad específica, el valor de la constante en $N_s$, velocidad de una máquina en la que $Q = 1$, $H = 1$

$$N_s = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{\frac{3}{4}}} \tag{9.1.5}$$

La velocidad específica de una serie se define corrientemente para el punto de rendimiento óptimo, es decir, para la velocidad, el caudal y la altura de mayor rendimiento.

La velocidad específica de una serie homóloga de turbinas se define como la velocidad de una máquina de la serie de tal tamaño que produce una potencia unidad con una altura unidad. Puesto que la potencia $P$ es proporcional a $QH$,

$$\frac{P}{QH} = \text{const} \tag{9.1.6}$$

$D$ y $Q$ pueden eliminarse entre las Ecs. (9.1.1), (9.1.3) y (9.1.6) y se obtiene

$$\frac{N\sqrt{P}}{H^{\frac{5}{4}}} = \text{const} \tag{9.1.7}$$

Para potencia unidad y altura unidad la constante de la Ec. (9.1.7) se hace igual a una velocidad, o sea a la velocidad específica $N_s$ de la serie, es decir,

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{\frac{5}{4}}} \tag{9.1.8}$$

La velocidad específica de la máquina necesaria para un caudal y altura dadas puede ser calculada mediante las Ecs. (9.1.5) y (9.1.8). Para bombas de gran caudal con alturas escasas está indicada una alta velocidad específica, para una turbina de altura total grande que produce una potencia relativamente baja (pequeño caudal) la velocidad específica es

baja. La experiencia ha demostrado que para lograr un rendimiento óptimo un tipo particular de bomba o turbina es el indicado para una velocidad específica dada.

Las bombas centrífugas tienen bajas velocidades específicas; las bombas mixtas tienen velocidades específicas medias; y las bombas de flujo axial tienen altas velocidades específicas. Las turbinas de impulsión tienen bajas velocidades específicas; las turbinas Francis poseen velocidades específicas medias; y las turbinas de hélice tienen velocidades específicas altas.

## 9.2 *Teoría elemental de la cascada*

Las turbomáquinas o realizan trabajo sobre un fluido o extraen trabajo de él de una manera continua haciéndole fluir a través de una serie de álabes móviles (y a veces fijos). Examinando el flujo a través de una serie de láminas o álabes semejantes, llamada una *cascada*, se pueden desarrollar algunos de los requerimientos de un sistema eficaz. En primer lugar consideremos el flujo a través del sistema simple de cascada fija de la Fig. 9.2. Se ve que el vector velocidad que representa el fluido ha girado un ángulo $\theta$ debido a la presencia del sistema de cascada. Se ha ejercido una fuerza sobre el fluido, pero despreciando los efectos del rozamiento y la turbulencia, no se realiza trabajo sobre el fluido. La Sec. 3.12 trata de las fuerzas sobre un álabe simple.

Como las turbomáquinas son aparatos rotacionales, el sistema de cascada se puede colocar de manera simétrica alrededor de la periferia de un círculo, como en la Fig. 9.3. Si el fluido se acerca a la cascada fija en dirección radial, cambia su momento de la cantidad de movimiento de cero a un valor que depende de la masa que fluye por unidad de tiempo, de la componente tangencial $V_t$ de la velocidad y del radio; de la Ec. (3.13.5),

$$T = \rho Q r V_t \tag{9.2.1}$$

De nuevo, el sistema de álabe fijo no realiza trabajo.

*Fig. 9.2 Sistema de cascada simple.*



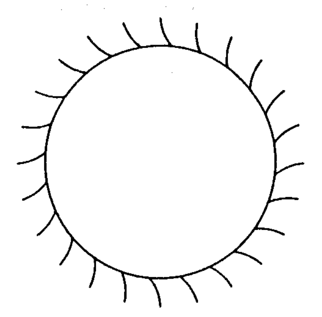


*Fig. 9.3 Cascada dispuesta en la periferia de un cilindro circular.*

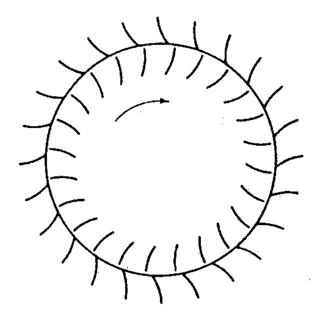


*Fig. 9.4 Cascada móvil en el interior de una cascada fija.*

Consideremos ahora otra serie de álabes (Fig. 9.4) que giran dentro de un sistema de álabes fijos con una velocidad $\omega$. Para una operación eficaz del sistema es importante que el fluido se mueva en los álabes móviles con la mínima perturbación, es decir, de una manera tangencial, como se indica en la Fig. 9.5. Cuando la velocidad relativa no es tangente al álabe en su entrada, puede producirse la separación, como se indica en la Fig. 9.6. Las pérdidas tienden a aumentar rápidamente (aproximadamente como el cuadrado) con el ángulo que forman con la dirección tangencial y desciende de una manera radical el rendimiento de la máquina. También se produce con frecuencia la separación cuando la velocidad relativa de aproximación es tangencial al álabe, debido a la curvatura de éstos o a la expansión del paso del flujo, que produce que la capa límite se haga más gruesa y pase al reposo. Estas pérdidas se llaman pérdidas de *choque* o *turbulencia*. Cuando el fluido sale de la cascada móvil, generalmente habrá modificado su velocidad en módulo y dirección, por lo que variará su momento de la cantidad de movimiento y o bien hace trabajo sobre la cascada o bien lo ha realizado la cascada móvil sobre él. En el caso de una turbina se desea que el fluido salga sin momento de la

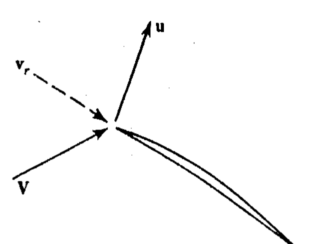



*Fig. 9.5 Velocidad relativa tangente al álabe.*

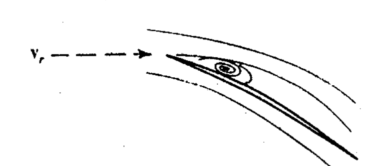



*Fig. 9.6 Separación de flujo, o «choque», de un álabe con velocidad relativa no tangente al borde de ataque.*

cantidad de movimiento. Un viejo dicho en el diseño de turbinas es «haz que el fluido entre sin choque y salga sin velocidad».

El diseño de turbomáquinas requiere la disposición idónea y la forma de los pasos y los álabes de modo que se pueda cumplir el propósito del diseño con la máxima eficacia. El diseño particular depende del oficio de la máquina, la cantidad de trabajo que ha de realizar por unidad de masa del fluido y de la densidad de éste.

### 9.3 *Teoría de las turbomáquinas*

Las turbinas extraen trabajo útil de la energía del fluido, y, por el contrario, las bombas, las soplantes y los turbocompresores aportan energía a los fluidos, por medio de un rodete que consta de álabes unidos rígidamente a un eje. Puesto que el único desplazamiento de las paletas es en dirección tangencial, el trabajo se realiza por el desplazamiento de las componentes tangenciales de las fuerzas que actúan sobre el rodete. Las componentes radiales de las fuerzas que actúan sobre el rodete no tienen desplazamiento en la dirección radial y por ello no pueden realizar trabajo.

En la teoría de turbomáquinas se desprecia el rozamiento y se supone que el fluido tiene una guía perfecta a través de la máquina, es decir, un número infinito de álabes delgados, con lo que la velocidad rela-

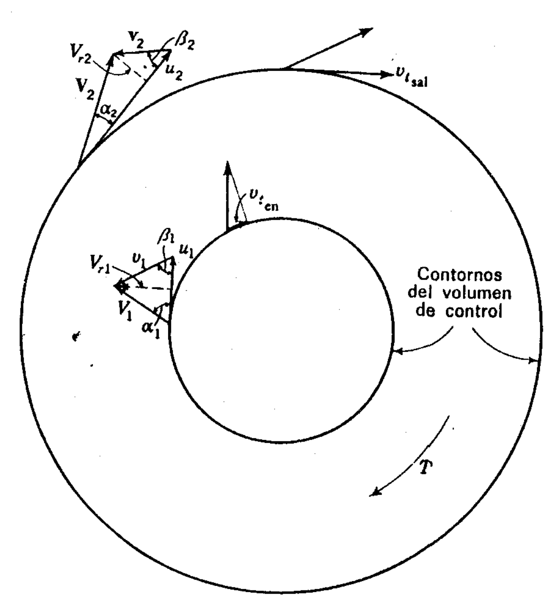



*Fig. 9.7 Flujo permanente a través de un volumen de control con simetría circular.*



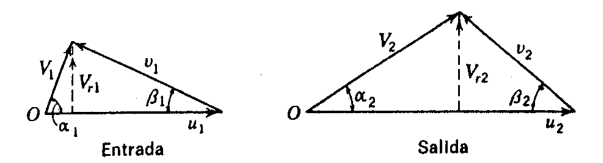



*Fig. 9.8 Diagramas vectoriales polares.*

tiva del fluido es siempre tangente al álabe. Esto da una simetría circular y permite que la ecuación del momento de la cantidad de movimiento, Sec. 3.13, tome la forma sencilla de la Ec. (3.13.5), para flujo permanente,

$$T = \rho Q\left[(rv_t)_{sal} - (rv_t)_{en}\right] \tag{9.3.1}$$

donde $T$ es el par torsor que actúa sobre el fluido dentro del volumen de control (Fig. 9.7) y $\rho Q(rV_t)_{sal}$ y $\rho Q(rv)_{en}$ representan el momento de la cantidad de movimiento que, respectivamente, sale y entra en el volumen de control.

Generalmente se utiliza el diagrama vectorial polar para estudiar las relaciones de álabe (Fig. 9.8), con el subíndice 1 para el fluido que entra y el subíndice 2 para el que sale. $V$ es la velocidad absoluta del fluido, $u$ la velocidad periférica del rodete y $v$ la velocidad del fluido respecto al rodete. Las velocidades absolutas $V$ y $u$ parten de 0 y la velocidad relativa las une como indica la figura. $V_u$ es la componente de la velocidad absoluta en dirección tangencial. $\alpha$ es el ángulo que forma la velocidad absoluta $V$ con la velocidad periférica $u$, y $\beta$ el ángulo que forma la ve-

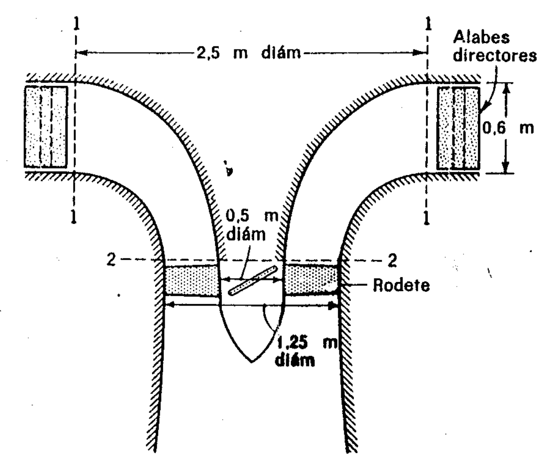



*Fig. 9.9 Esquema de una turbina de hélice.*

locidad relativa con $-u$, luego es el *ángulo del álabe*, ya que se supone guía perfecta. $V_r$ es la componente de la velocidad absoluta normal a la periferia. Con esta notación la Ec. (9.3.1) se convierte en

$$\begin{aligned} T &= \rho Q(r_2 V_2 \cos \alpha_2 - r_1 V_1 \cos \alpha_1) \\ &= \rho Q(r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) = \dot{m}(r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) \end{aligned} \qquad (9.3.2)$$

La masa que fluye por unidad de tiempo es $\dot{m} = \rho Q = (\rho Q)_{sal} = (\rho Q)_{en}$. En la forma anterior, cuando $T$ es positivo, el momento de la cantidad de movimiento del fluido aumenta en el volumen de control, como en el caso de una bomba. Para $T$ negativo, el momento de la cantidad de movimiento del fluido disminuye, como en el rodete de una turbina. Cuando $T = 0$, como en los pasos donde no hay álabes,

$$rV_u = \text{const}$$

Este es el movimiento de *vórtice libre*, con la componente tangencial de la velocidad variando inversamente con el radio. En la Sec. 7.9 se estudió y comparó con el vórtice forzado de la Sección 2.9.

***Ejemplo 9.2*** Los álabes directores de la Fig. 9.9 están girados para que el flujo forme un ángulo de 45° con la dirección radial en la sección 1, donde la velocidad es de 2,5 m/seg. Determinar el módulo de la componente tangencial $V_u$ en la sección 2.

Como no se ejerce par alguno sobre el flujo entre las secciones 1 y 2 el momento de la cantidad de movimiento es constante y el movimiento sigue la ley del vórtice-libre:

$$V_u r = \text{const}$$

En la sección 1

$$V_{u1} = 2{,}5 \cos 45° = 1{,}77 \text{ m/seg}$$

Entonces

$$V_{u1} r_1 = 1{,}77 \times 1{,}25 \doteq 2{,}21 \text{ m}^3/\text{seg}$$

A través de la sección 2

$$V_{u2} = \frac{2{,}21}{r}$$

En el cubo del rodete $V_u = 2{,}21/0{,}25 = 0{,}88$ m/seg y en la parte exterior $V_u = 2{,}21/0{,}625 = 3{,}54$ m/seg.



## Relaciones entre la altura y la energía

Multiplicando la Ec. (9.3.2) por la velocidad de rotación $\omega$ del rodete,

$$\begin{aligned} T\omega &= \rho Q(\omega r_2 V_{u2} - \omega r_1 V_{u1}) \\ &= \rho Q(u_2 V_{u2} - u_1 V_{u1}) \end{aligned} \qquad (9.3.3)$$

No habiendo pérdidas la potencia útil de una turbina es $Q\,\Delta p = Q\gamma H$, donde $H$ es la altura en el rodete, ya que $Q\gamma$ es el peso por unidad de tiempo y $H$ es la energía potencial por unidad de peso. Análogamente el rodete de una bomba produce un trabajo $Q\gamma H$ donde $H$ es la altura de la bomba. El intercambio de potencia es

$$T\omega = Q\gamma H \qquad (9.3.4)$$

Despejando $H$, y utilizando la Ec. (9.3.3) para eliminar $T$,

$$H = \frac{u_2 V_{u2} - u_1 V_{u1}}{g} \qquad (9.3.5)$$

Para las turbinas se cambia el signo de la Ec. (9.3.5).

Para las bombas, la altura *real* $H_p$ que se alcanza es

$$H_p = e_h H = H - H_L \qquad (9.3.6)$$

y para las turbinas, la altura real $H_t$ es

$$H_t = \frac{H}{e_h} = H + H_L \qquad (9.3.7)$$

en las cuales $e_h$ es el rendimiento hidráulico de la máquina y $H_L$ representa la pérdida total interior en la máquina. El rendimiento total de las máquinas disminuye además de por el rozamiento en los cojinetes, por el rozamiento provocado por el fluido entre el rodete y la carcasa y por los escapes o flujo que pasa por la periferia del rodete sin pasar a través de él. Estas pérdidas no afectan las relaciones de altura.

Las bombas se proyectan generalmente para que la cantidad de movimiento angular del fluido que entra en el rodete impulsor sea cero. Entonces:

$$H = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} \qquad (9.3.8)$$

Las turbinas se proyectan de modo que la cantidad de movimiento angu-

lar sea cero en la sección de salida del rodete en las condiciones de rendimiento óptimo, de aquí que

$$H = \frac{u_1 V_1 \cos \alpha_1}{g} \qquad (9.3.9)$$

Escribiendo la ecuación de Bernoulli para una bomba teniendo en cuenta las Ecs. (9.3.5) y (9.3.6) de este número

$$H_p = \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right)$$

$$= \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1}{g} - H_L \qquad (9.3.10)$$

en la cual se supone que todas las líneas de corriente que atraviesan la bomba tienen la misma energía total. Las relaciones entre la velocidad absoluta $V$, la velocidad relativa respecto al rodete $v$ y la velocidad de éste $u$, deducidas de la Fig. 9.8 por la ley del coseno, son

$$u_1^2 + V_1^2 - 2u_1 V_1 \cos \alpha_1 = v_1^2$$
$$u_2^2 + V_2^2 - 2u_2 V_2 \cos \alpha_2 = v_2^2$$

Eliminando las velocidades absolutas $V_1$, $V_2$ entre estas ecuaciones y la Ec. (9.3.10)

$$H_L = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - \frac{p_2 - p_1}{\gamma} - (z_2 - z_1) \qquad (9.3.11)$$

o también

$$H_L = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \left[\left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right)\right] \qquad (9.3.12)$$

La pérdida es la diferencia entre la altura centrífuga $(u_2^2 - u_1^2)/2g$ y la variación de altura en el movimiento relativo del fluido. Cuando no existen pérdidas, el incremento en altura de presión, por la Ec. (9.3.11), es

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \qquad (9.3.13)$$

Cuando no existe flujo a través del rodete $v_1$ y $v_2$ son cero y la altura alcanzada se expresa mediante las relaciones del equilibrio relativo [Ec. (2.9.6)]. Cuando hay flujo, el aumento de altura es igual a la altura centrífuga menos la diferencia entre las alturas de velocidades relativas. En el caso de una turbina, resultan las mismas ecuaciones.



*Ejemplo 9.3* Una bomba centrífuga con un rodete de 610 mm de diámetro gira a 1.800 r.p.m. El agua entra sin remolinos y $\alpha_2 = 60°$. La altura real producida por la bomba es 15 m. Encontrar su rendimiento hidráulico cuando $V_2 = 6$ m/seg.

Según la Ec. (9.3.8) la altura teórica es

$$H = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} = \frac{1800 \times 0{,}61 \times \pi \times 6 \times 0{,}5}{60 \times 9{,}8} = 17{,}6 \text{ m}$$

Como la altura real es 15 m, el rendimiento hidráulico será

$$e_h = \frac{15}{17{,}6} = 0{,}852 = 85{,}2 \text{ por } 100$$

### 9.4 Turbinas de impulsión

En las turbinas de impulsión toda la energía mecánica del flujo se convierte en energía cinética a la presión atmosférica en la tobera, antes de que el flujo entre en contacto con los álabes. Las pérdidas se producen en el flujo desde el depósito a través de la tubería de presión a la base de la tobera, que se pueden calcular a partir de los datos del rozamiento en la tubería. En la base de la tobera la energía útil, o altura total, es

$$h_a = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \qquad (9.4.1)$$

según la Fig. 9.10. Siendo $C_v$ el coeficiente de la tobera, la velocidad $V_2$ del chorro es

$$V_2 = C_v \sqrt{2gh_a} = C_v \sqrt{2g\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}\right)} \qquad (9.4.2)$$

La altura perdida en la tobera es

$$h_a - \frac{V_2^2}{2g} = h_a - C_v^2 h_a = h_a(1 - C_v^2) \qquad (9.4.3)$$

y el rendimiento de la tobera es

$$\frac{V_2^2/2g}{h_a} = \frac{C_v^2 h_a}{h_a} = C_v^2 \qquad (9.4.4)$$

El chorro, a la velocidad $V_2$, choca con los álabes de doble curvatura (Figs. 9.11 y 9.12) que dividen el flujo y hacen que la velocidad relativa gire el ángulo $\theta$ (Fig. 9.12).

La componente $x$ de la cantidad de movimiento varía en (Fig. 9.12)

$$F = \rho Q(v_r - v_r \cos \theta)$$

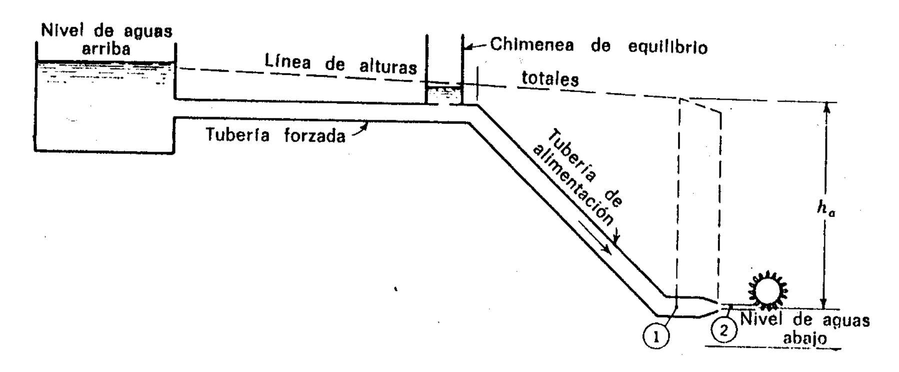



*Fig. 9.10 Sistema de turbina de impulsión.*

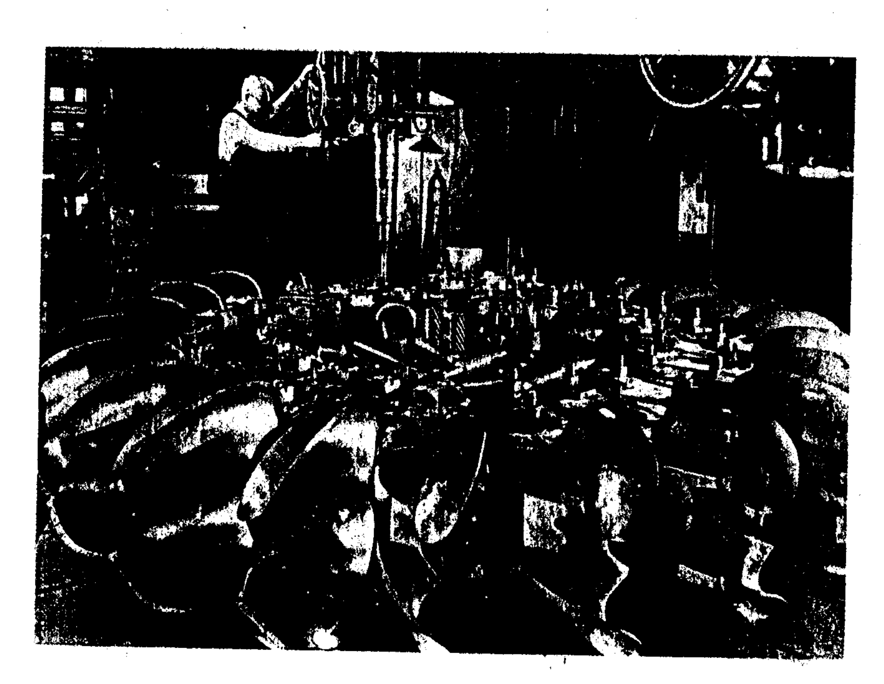


*Fig. 9.11 Cuchara en curso de montaje para formar una rueda Pelton para un chorro de 216 mm de diámetro. Southern California Edison, Big Creek 2A, 1948, 56.000 CV, altura del salto 660 m, 300 r.p.m. (Allis-Chalmers Mfg. Co.)*



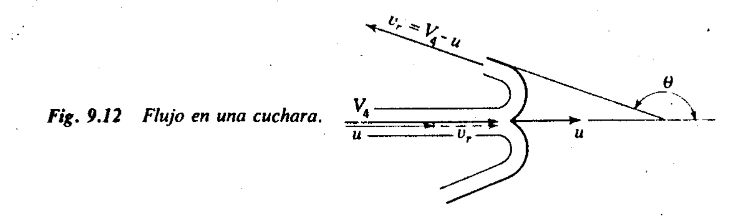



*Fig. 9.12 Flujo en una cuchara.*

y el trabajo realizado por los álabes es

$$Fu = \rho Q u v_r (1 - \cos\theta) \tag{9.4.5}$$

Para hacer máximo el trabajo realizado, teóricamente $\theta = 180°$ y $uv_r$ ha de ser máximo; es decir, $u(V_2 - u)$ debe ser máximo. Derivando respecto a $u$ e igualando a cero,

$$(V_2 - u) + u(-1) = 0$$

$u = V_2/2$. Sustituyendo en la Ec. (9.4.5),

$$Fu = \rho Q \frac{V_2}{2}\left(V_2 - \frac{V_2}{2}\right)(1 - -1) = \gamma Q \frac{V_2^2}{2g} \tag{9.4.6}$$

que estima la energía cinética total del chorro. El diagrama de velocidades para estos valores demuestra que la velocidad absoluta que sale de los álabes es cero.

En la práctica, cuando se disponen los álabes en la periferia de una rueda (Fig. 9.11), es necesario que el fluido retenga la velocidad suficiente para salir del camino del álabe siguiente. La mayor parte de las turbinas de impulsión prácticas son ruedas Pelton. El chorro se divide en dos, gira en un plano horizontal, y cada mitad se desagua por cada lado para evitar cualquier esfuerzo no equilibrado sobre el eje. Hay pérdidas debidas a la división y al rozamiento del chorro en la superficie del álabe, que hacen que la velocidad más económica sea algo menor de $V_1/2$. Se expresa en función del *factor de velocidad*.

$$\phi = \frac{U}{\sqrt{2gh_a}} \tag{9.4.7}$$

Para una operación de la turbina con rendimiento máximo, se ha encontrado que $\phi$ depende de la velocidad específica como se indica en la tabla†. El ángulo $\theta$ del álabe vale normalmente de 173 a 176°. Si el

† J. W. Daily, Hydraulic Machinery, en «Engineering Hydraulics», ed. por H. Rouse, pág. 943, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1950.

diámetro del chorro es $d$ y el de la rueda $D$ en la línea central de los álabes se ha hallado en la práctica que la relación $D/d$ debe ser aproximadamente $54/N_s$ para un rendimiento máximo.

| $N_s$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi$ | 0,47 | 0,46 | 0,45 | 0,44 | 0,433 | 0,425 |

En la mayoría de las instalaciones solo se utiliza un chorro, que descarga horizontalmente contra la parte inferior de la periferia de la rueda como se indica en la Fig. 9.10. La velocidad de la rueda se regula cuidadosamente para la producción de energía eléctrica. Un regulador actúa sobre una válvula de aguja que controla el caudal del chorro modificando su área. Así $V_0$ permanece prácticamente constante para un margen amplio de posiciones de la válvula de aguja.

El rendimiento de la transformación de la energía baja rápidamente cuando varía la altura (ya que varía $V_0$), lo que se hace evidente cuando se expresa la potencia en función de $V_0$ para $u$ constante en la Ec. (9.4.5). La rueda trabaja a la presión atmosférica aunque esté encerrada en una carcasa. Es esencial, por tanto, que la rueda esté colocada por encima del nivel de la corriente de agua o del río en el cual descarga. La altura de la tobera sobre el nivel del agua se desaprovecha. A causa de su poco rendimiento para una altura $H$ distinta de la proyectada y por el desaprovechamiento de dicha altura, las ruedas Pelton se usan únicamente para grandes alturas, desde 180 hasta más de 1.600 m. Para alturas grandes, el rendimiento de la instalación completa puede ser de más de un 80 por 100.

Las ruedas de impulsión de tobera única son las de mejor rendimiento para velocidades específicas entre 8 y 25, estando $P$ en CV, $H$ en m y $N$ en r.p.m. Ruedas con toberas múltiples se proyectan para velocidades específicas entre 25 y 50.

*Ejemplo 9.4* Una rueda Pelton se ha elegido para mover un generador a 600 r.p.m. El chorro de agua tiene 70 mm de diámetro y una velocidad de 100 m/seg. El ángulo del álabe es de 170°, la relación de la velocidad del álabe a la velocidad inicial del chorro es de 0,47. Despreciando las pérdidas, determinar: (*a*) el diámetro de la rueda en el centro de las cucharas (álabes), (*b*) la potencia desarrollada y (*c*) la energía cinética remanente por kilogramo de fluido.

(*a*) La velocidad periférica de la rueda es

$$u = 0{,}47 \times 100 = 47 \text{ m/seg}$$



entonces

$$\frac{600}{60} 2\pi \frac{D}{2} = 47 \qquad \text{de donde} \qquad D = 1{,}5 \text{ m}$$

(*b*) Mediante la Ec. (9.4.5) se calcula que la potencia en kgm/seg vale

$$\frac{1000}{9{,}8} \times \frac{0{,}07^2}{4} \times 100 \times (100 - 47) \times 47[1 - (-0{,}9848)] = 194.000 \text{ kgm/seg}$$

y en CV

$$\frac{194.000}{75} = 2.590 \text{ CV}$$

(*c*) De la Fig. 3.34 las componentes de la velocidad absoluta a la salida del álabe se calculan así:

$$V_x = (100 - 47) \times (-0{,}9848) + 47 = -5{,}1 \text{ m/seg}$$
$$V_y = (100 - 47) \times 0{,}1736 = 9{,}2 \text{ m/seg}$$

La energía cinética remanente en el chorro es

$$\frac{5{,}1^2 + 9{,}2^2}{2 \times 9{,}8} = 5{,}95 \text{ kgm/kg}$$

*Ejemplo 9.5* Una rueda de impulsión pequeña se emplea para mover un generador de potencia de 50 ciclos. La altura es de 100 m y el caudal 0,04 m³/seg. Determinar el diámetro de la rueda en la línea central del álabe de doble curvatura y la velocidad de la rueda. $C_v = 0{,}98$. Suponer un rendimiento del 80 por 100.

La potencia es

$$P = \frac{\gamma Q H e}{75} = \frac{10^3 \times 0{,}04 \times 100 \times 0{,}80}{75} = 42{,}6 \text{ CV}$$

Tomando para $N_s$ el valor de ensayo 16,

$$N = \frac{N_s H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{16 \times (100)^{5/4}}{\sqrt{42{,}6}} = 776 \text{ r.p.m.}$$

Para una potencia a 50 ciclos, la velocidad debe ser 3000 dividido por el número de pares de polos del generador. Para cinco pares de polos de velocidad será $\frac{3000}{5} = 600$ r.p.m. y para cuatro pares de polos $\frac{3000}{4} = 750$ r.p.m. Se toma esta última. Entonces

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{750\sqrt{42{,}6}}{100^{5/4}} = 15{,}5 \text{ r.p.m.}$$

Para $N_s = 15{,}5$ r.p.m., se toma $\phi = 0{,}37$,

$$u = \phi\sqrt{2gH} = 0{,}37\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 100} = 16{,}1 \text{ m/seg}$$

y

$$\omega = \tfrac{750}{60}\,2\pi = 72{,}5 \text{ rad/seg}$$

La velocidad periférica $u$, $D$ y $\omega$ están relacionadas por

$$u = \frac{\omega D}{2} \qquad D = \frac{2u}{\omega} = \frac{2 \times 16{,}1}{72{,}5} = 0{,}445 \text{ m} = 44{,}5 \text{ cm}$$

El diámetro $d$ del chorro se obtiene de la velocidad del chorro $V_2$; luego

$$V_2 = C_v\sqrt{2gH} = 0{,}98\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 100} = 43{,}4 \text{ m/seg}$$

$$a = \frac{Q}{V_2} = \frac{0{,}04}{43{,}4} = 0{,}92 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

y

$$d = \sqrt{\frac{4a}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}92 \times 10}{3{,}14}} = 0{,}117 \text{ m} = 11{,}7 \text{ cm}$$

Por consiguiente, la relación $D/d$ es

$$\frac{D}{d} = \frac{44{,}5}{11{,}7} = 3{,}8$$

La relación para un rendimiento máximo es

$$\frac{D}{d} = \frac{54}{N_s} = \frac{54}{15{,}5} = 3{,}5$$

que es satisfactoria. Por tanto, el diámetro de la rueda es de 44,5 cm y la velocidad 750 r.p.m.

### 9.5 Turbinas de reacción

En las turbinas de *reacción* una parte de la energía del fluido se convierte en energía cinética al pasar el fluido a través de una corona de álabes orientables que no giran, llamados álabes directores (Fig. 9.13), situada antes del rodete móvil, y el resto de la transformación tiene lugar en el rodete móvil. Todos los espacios entre álabes están llenos de líquido, incluida la conducción (tubería de salida) que va desde el rodete al canal de desagüe. La presión estática del fluido se ejerce a ambos lados de los



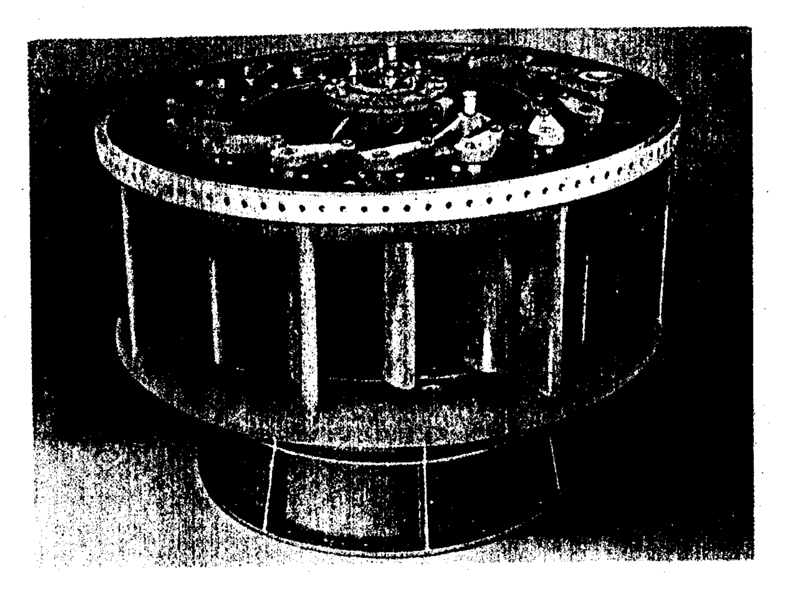


*Fig. 9.13 Corona de álabes directores de una turbina de reacción. (Allis-Chalmers Mfg. Co.)*

álabes y, por tanto, no produce trabajo. El trabajo producido se debe totalmente a la transformación de la energía cinética.

La turbina de reacción es completamente diferente de la de impulsión, estudiada en la Sec. 9.4. En una turbina de impulsión toda la energía mecánica del fluido se convierte en energía cinética en la tobera donde se forma un chorro. La energía es cedida por el chorro al pasar el flujo a través de los álabes móviles. En un momento dado no todos los espacios entre álabes están llenos con el líquido del chorro que está en contacto con la atmósfera en todo su recorrido a través del rodete.

En contraste, en la turbina de reacción la energía cinética es todavía apreciable cuando el fluido abandona el rodete y entra en la tubería de salida. La misión de la tubería de salida es volver a transformar la energía cinética en energía de presión por una gradual expansión de la sección transversal del flujo. La aplicación de la ecuación de Bernoulli entre los

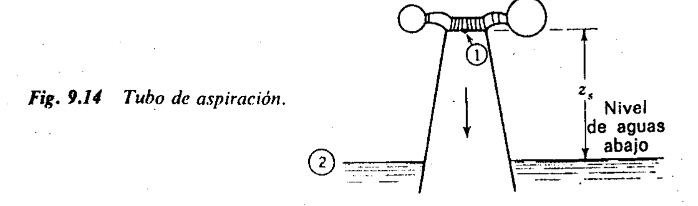



*Fig. 9.14 Tubo de aspiración.*

dos extremos de la tubería de salida muestra que la acción de la tubería es hacer que la presión de su extremo más alto sea menor que la atmosférica, con lo que se consigue que la altura efectiva aumente, pues así es la diferencia de las alturas de la superficie libre de aguas arriba y de la superficie libre del canal de desagüe menos las pérdidas.

Con respecto a la Fig. 9.14, la ecuación de la energía aplicada a los puntos 1 y 2 da

$$z_s + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = 0 + 0 + 0 + \text{pérdidas}$$

Las pérdidas incluyen el rozamiento más la pérdida de altura por velocidad en la salida del tubo de aspiración, que son las dos muy pequeñas; por consiguiente,

$$\frac{p_1}{\gamma} = -z_s - \frac{V_1^2}{2g} + \text{pérdidas} \qquad (9.5.1)$$

que demuestra el vacío tan considerable que se produce en la sección 1, que aumenta efectivamente la altura a lo largo del rodete de la turbina. El montaje de la turbina no debe ser demasiado alto, pues se produciría cavitación en el rodete y en el tubo de aspiración (ver la Sección 9.9).

*Ejemplo 9.6* Una turbina tiene una velocidad de 7 m/seg a la entrada del tubo de aspiración y una velocidad de 1 m/seg en su salida. Las pérdidas por rozamiento son de 0,1 m y el nivel de agua del desagüe está a 5 m por debajo de la entrada del tubo de aspiración. Hallar la altura de presión en la entrada.

De la Ec. (9.5.1)

$$\frac{p_1}{\gamma} = -5 - \frac{7^2}{2 \times 9{,}8} + \frac{1^2}{2 \times 9{,}8} + 0{,}1 = -7{,}35 \text{ m}$$

cuando se pierde la energía cinética en la salida desde el tubo de aspiración. Por tanto se produce una altura de succión de 7,35 m por la presencia del tubo de aspiración.

Hay dos clases de turbinas de reacción en uso, la turbina *Francis* (Fig. 9.15) y la turbina *de hélice* (flujo axial) (Fig. 9.16). En ambas todos los pasos están llenos de líquido y la energía se transforma en trabajo útil por la variación del momento de la cantidad de movimiento del líquido. El flujo pasa en primer lugar a través de los álabes directores, los cuales proporcionan al fluido una velocidad tangencial y radial hacia dentro. En el espacio entre los álabes directores y el rodete, el flujo se mueve como un vórtice libre sin que le sea aplicado ningún par exterior.

En la turbina Francis (Fig. 9.17), el fluido entra en el rodete de tal



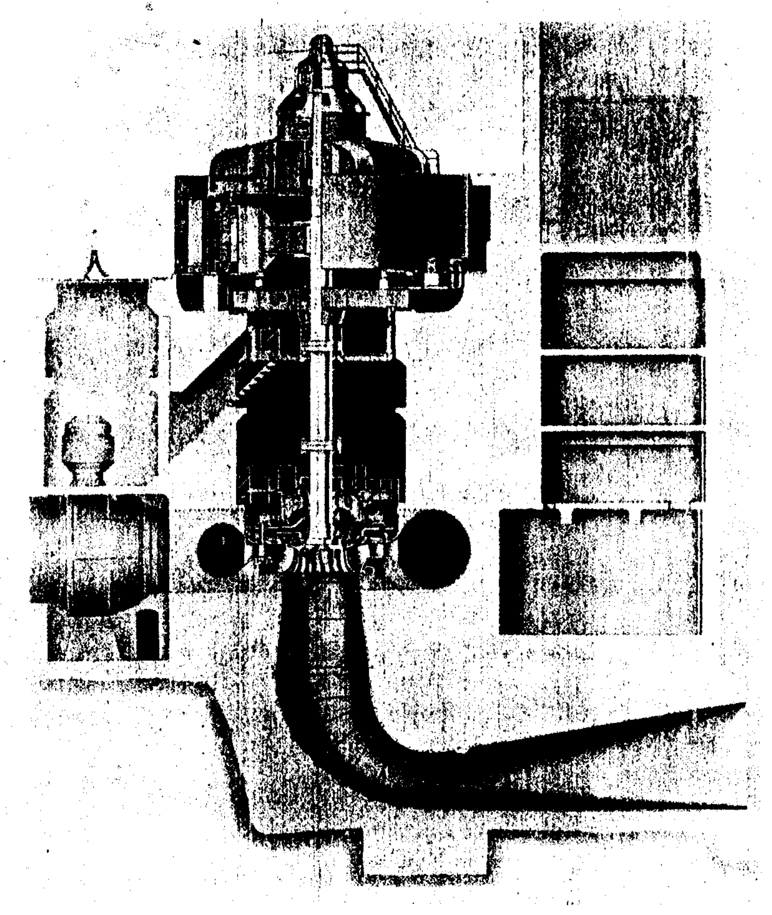


*Fig. 9.15 Sección de una planta hidroeléctrica instalada y puesta en funcionamiento en Hoover Dam en 1952. La potencia de la turbina es de 115.000 CV, a 180 r.p.m., con una altura de 145 m. (Allis-Chalmers Mfg. Co.)*

manera que la velocidad relativa es tangente al borde activo de los álabes. La componente radial se transforma gradualmente en una componente axial y la componente tangencial disminuye mientras el fluido atraviesa el espacio entre álabes; así, pues, a la salida del rodete el flujo es axial con un pequeño torbellino (componente tangencial). La presión ha sido reducida a menos de la atmosférica y la mayor parte de la energía cinética restante se vuelve a convertir en energía de presión, al tiempo que el líquido pasa por la tubería de salida.

La turbina Francis es la más conveniente para instalaciones de altura media de 25 a 180 m y tiene un rendimiento entre el 90 y 95 por 100 para

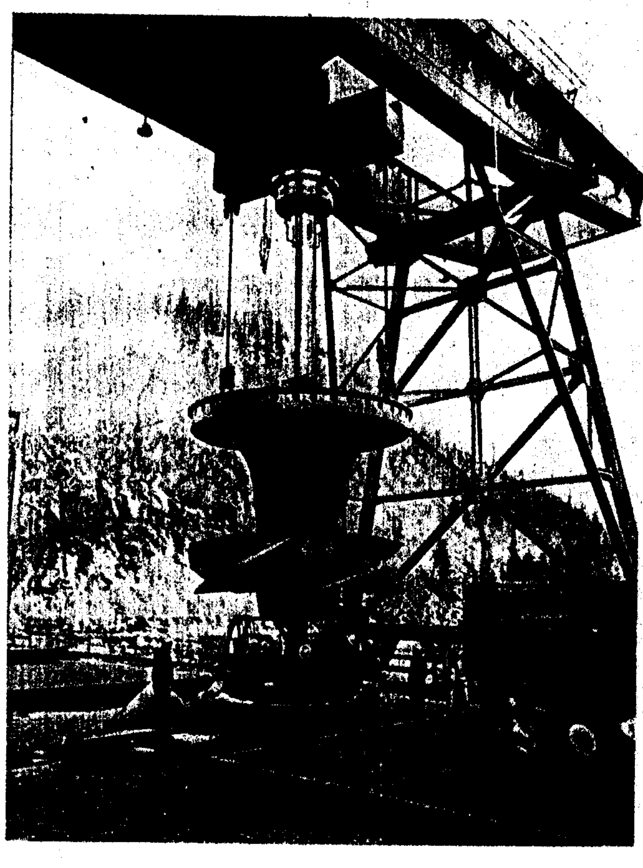


*Fig. 9.16 Maniobra para el montaje del rodete de una turbina hidráulica ajustable tipo Kaplan de 24.500 CV, 100 r.p.m. y 12,5 m de salto. Puesta en marcha en 1955. Box Canyon Project, Public Utility District No. 1 of Pend Oreille County, Washington. (Allis-Chalmers Mfg. Co.)*

las grandes instalaciones. Las turbinas Francis se proyectan para velocidades específicas entre 45 y 500, con rendimiento óptimo entre 180 y 260.

En la turbina de hélice (Fig. 9.9), el fluido, después de pasar por la corona de álabes directores, se mueve como un vórtice libre, cambiando su componente radial en componente axial por las guías que tiene la carcasa. El momento de la cantidad de movimiento es constante y la componente tangencial de la velocidad aumenta al disminuir el radio. Los álabes son pocos en número, relativamente llanos, con muy poca curvatura y colocados de tal manera que el flujo relativo al entrar en el rodete sea tangencial al borde activo del álabe. La velocidad relativa es alta, como en la rueda Pelton, y varía ligeramente al pasar por el álabe.



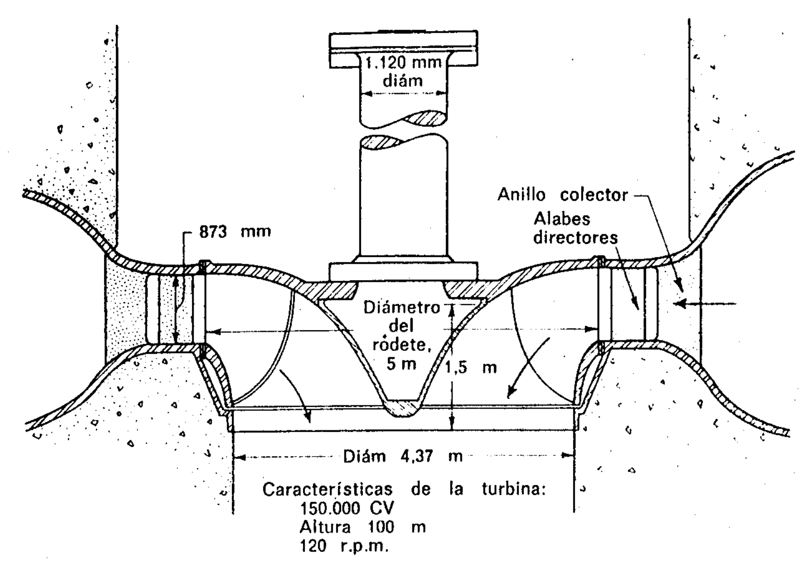



*Fig. 9.17 Turbina Francis para el salto Grand Coulee, Columbia Basin Project. (Newport News Shipbuilding and Dry Dock Co.)*

Los diagramas de velocidad en la Fig. 9.18 muestran cómo la componente tangencial de la velocidad disminuye. Las turbinas de hélice tienen los álabes giratorios alrededor del cubo, así se puede variar el ángulo del álabe para diferentes aberturas de los álabes directores y cambios en la altura. Son particularmente convenientes para instalaciones de altura pequeña, hasta unos 30 m, y su rendimiento oscila alrededor del 94 por 100. Las turbinas de flujo axial están diseñadas para velocidades específicas entre 450 y 1000, siendo el rendimiento óptimo entre 500 y 700.

El molino de viento es una forma de turbina de flujo axial. No tiene álabes directores para dar una componente tangencial inicial a la co-

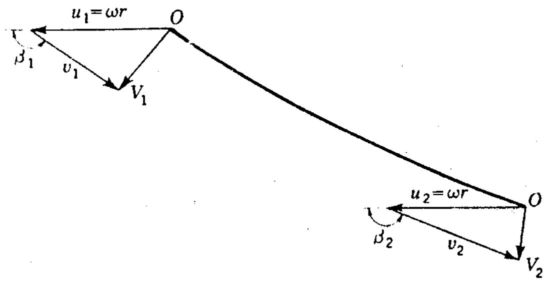



*Fig. 9.18 Diagrama de velocidades a la entrada y a la salida de una turbina de hélice a una distancia radial fija.*

rriente de aire y por eso debe dar la componente tangencial al aire con los álabes móviles. La corriente de aire se expansiona al pasar a través de los álabes con una reducción de su velocidad axial.

*Ejemplo 9.7* Suponiendo la velocidad axial uniforme en la sección 2 de la Fig. 9.9 y usando los datos del Ejemplo 9.2 determinar el ángulo del borde activo de la hélice para $r = 0{,}25$, 0,50 y 0,625 m con una velocidad de la hélice de 240 r.p.m.

Para $r = 0{,}25$,

$$u = \tfrac{240}{60} \times 2\pi \times 0{,}25 = 6{,}28 \text{ m/seg}$$
$$V_u = 8{,}84 \text{ m/seg}$$

Para $r = 0{,}50$,

$$u = \tfrac{240}{60} \times 2\pi \times 0{,}50 = 12{,}56 \text{ m/seg}$$
$$V_u = 4{,}42 \text{ m/seg}$$

Para $r = 0{,}625$,

$$u = \tfrac{240}{60} \times 2\pi \times 0{,}625 = 15{,}70 \text{ m/seg}$$
$$V_u = 3{,}54 \text{ m/seg}$$

El caudal de la turbina calculado en la sección 1 es

$$Q = 0{,}6 \times 2{,}5 \times \pi \times 2{,}5 \times \cos 45^\circ = 8{,}33 \text{ m}^3\text{/seg}$$

De aquí que la velocidad axial en la sección 2 sea

$$V_a = \frac{8{,}33}{\pi(0{,}625^2 - 0{,}25^2)} = 8{,}08 \text{ m/seg}$$

La Fig. 9.19 muestra el ángulo inicial del álabe para las tres posiciones.

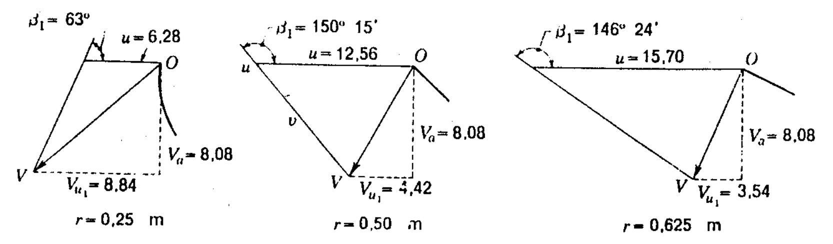



*Fig. 9.19 Diagrama de velocidades en el borde activo de una de las paletas de una turbina de hélice.*



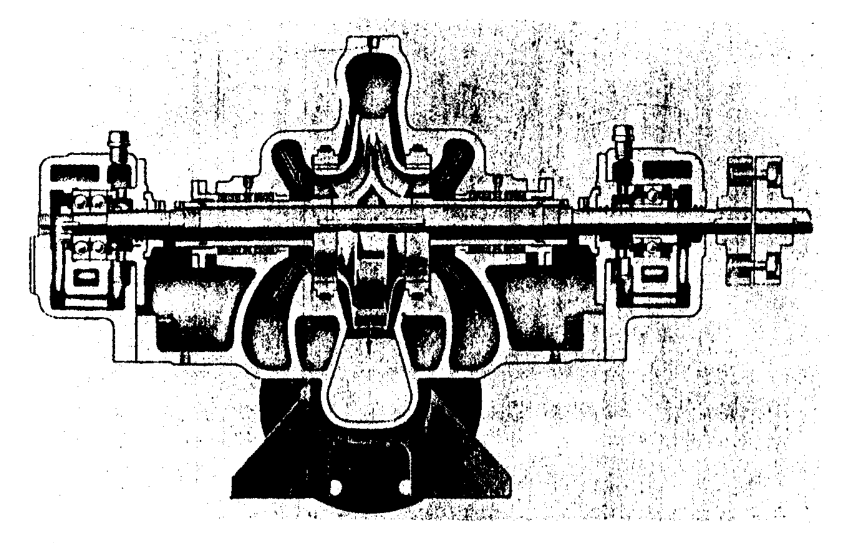


*Fig. 9.20 Sección de una bomba centrífuga de escalón único y de doble succión. (Ingersoll-Rand Co.)*

Moody† ha desarrollado una fórmula para calcular el rendimiento de una turbina de una serie de turbinas homólogas cuando se conoce el rendimiento de otra turbina de la serie.

$$e = 1 - (1 - e_1)\left(\frac{D_1}{D}\right)^{1/1} \qquad (9.5.2)$$

en la que $e_1$ y $D_1$ son el rendimiento y el diámetro de la turbina conocida.

### 9.6 *Bombas y turbocompresores*

Las bombas proporcionan energía a los líquidos y los turbocompresores a los gases. Ambos se proyectan de manera análoga, excepto en los casos en que la densidad se aumenta apreciablemente. Las turbobombas y los turbocompresores pueden ser de *flujo radial*, de *flujo axial* o de una combinación de ambos llamada *flujo mixto*. Para grandes alturas, la bomba radial (centrífuga), frecuentemente con dos o más escalones (dos o más rodetes en serie), es la que se adapta mejor. Una bomba centrífuga de doble succión se muestra en la Fig. 9.20. Para grandes caudales con pequeñas alturas, la bomba de flujo axial o de hélice (Fig. 9.21) es la más conveniente. La bomba de flujo mixto (Fig. 9.22) se usa para altura y caudal medios.

† Lewis F. Moody, The Propeller Type Turbine, *Trans. ASCE*, vol. 89, pág. 628, 1926.

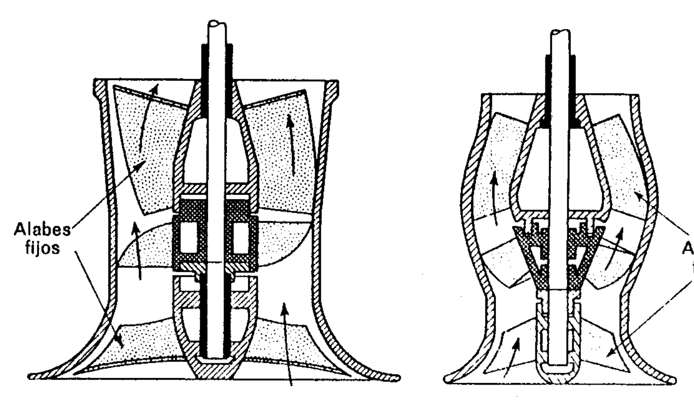



*Fig. 9.21* *Bomba de flujo axial. (Ingersoll-Rand Co.)*

*Fig. 9.22* *Bomba de flujo mixta. (Ingersoll-Rand Co.)*

Las ecuaciones deducidas en la Sec. 9.2 se aplican lo mismo a bombas y turbocompresores que a turbinas. La bomba centrífuga corriente tiene una tubería de aspiración o de entrada, que conduce el fluido al centro del rodete impulsor, un rodete radial de flujo de dentro a fuera como el de la Fig. 9.23 y una tubería colectora o carcasa en espiral que conduce el fluido a la tubería de salida. Ordinariamente no existe corona de álabes directores fijos, excepto en las unidades de varios escalones en las cuales el caudal es relativamente pequeño y el adicional rozamiento del

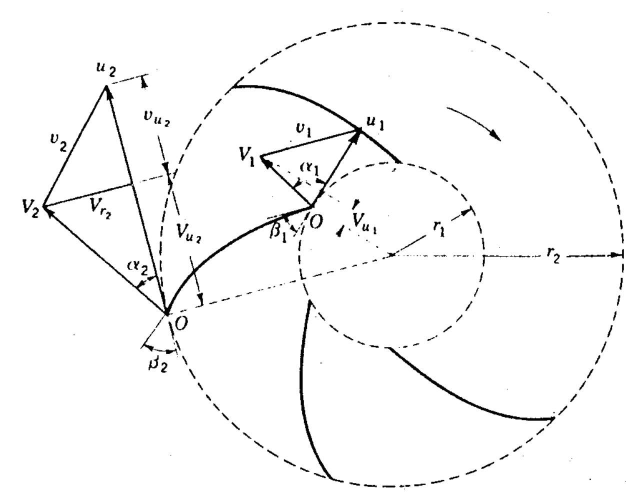


*Fig. 9.23* *Relaciones de velocidades en el flujo a través del rodete de una bomba centrífuga.*



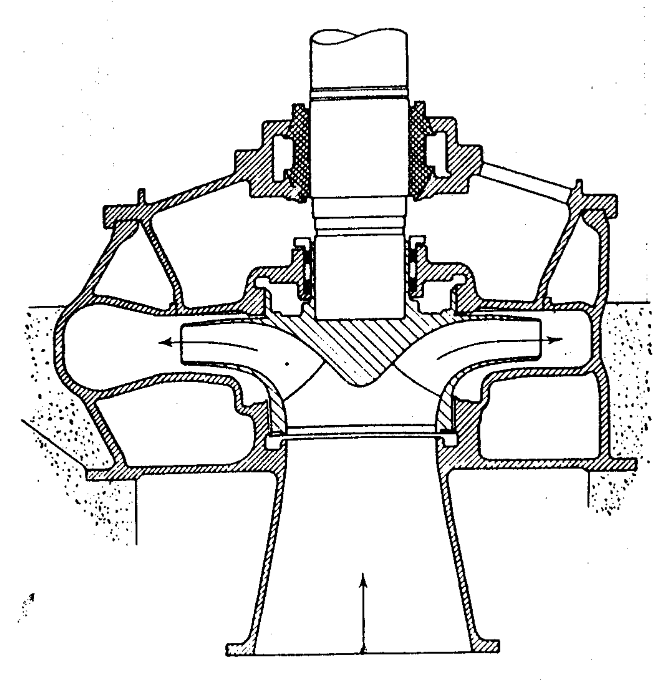


*Fig. 9.24* *Sección de la bomba de Eagle Mountain y Hayfield, Colorado River Aqueduct. (Worthington Corp.)*

fluido es menor que la ganancia por conversión de energía cinética en energía de presión una vez abandonado el rodete impulsor.

La Fig. 9.24 muestra una sección de una gran bomba centrífuga. Para alturas más bajas y relativamente mayores caudales, los rodetes impulsores varían como se muestra en la Fig. 9.25 desde alturas grandes a la izquierda hasta alturas pequeñas a la derecha, con rodete de flujo axial. La velocidad específica aumenta de izquierda a derecha. La Fig. 9.26 muestra un gráfico para determinar el tipo de bomba con la que se puede obtener rendimiento óptimo con agua.

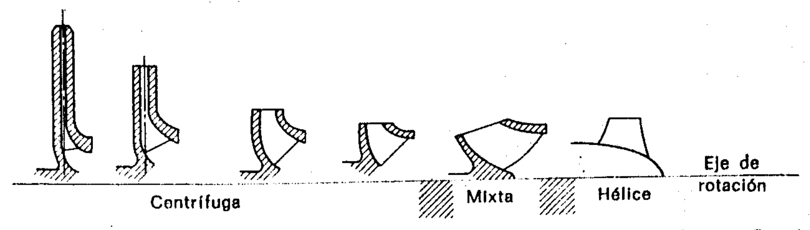



*Fig. 9.25* *Tipo de rodete usado en bombas y compresores. (Worthington Corp.)*

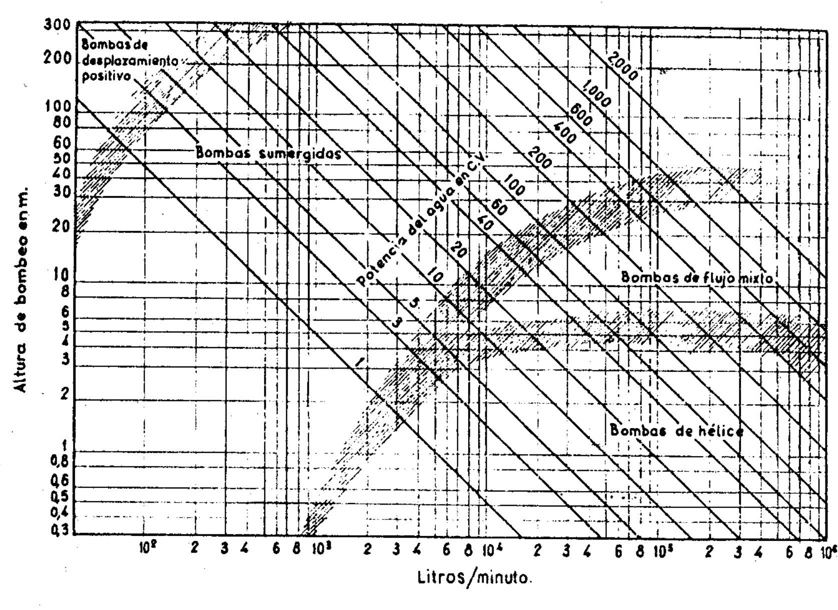



*Fig. 9.26 Gráfico para la elección del tipo de bomba. (Fairbanks, Morse & Co.)*

Bombas centrífugas y de flujo mixto se proyectan para velocidades específicas entre 2.400 y 31.000 y bombas axiales para velocidades específicas entre 24.000 y 52.000, estando la velocidad expresada en re-

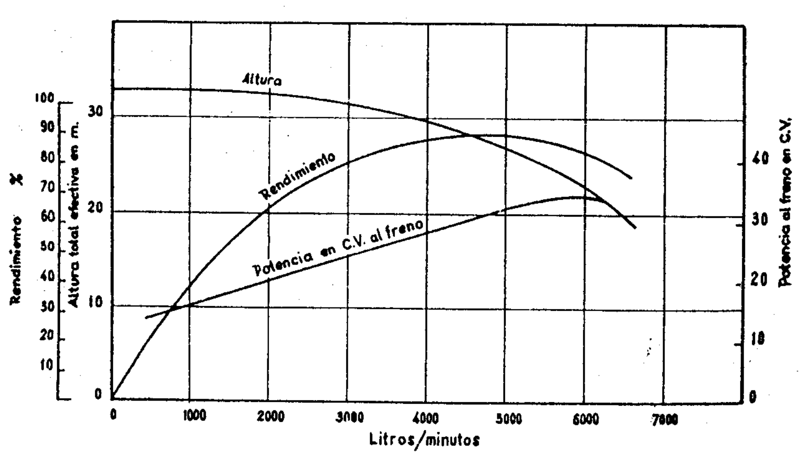



*Fig. 9.27 Curvas características de una bomba centrífuga típica. Rodete de 250 mm, 1.750 r.p.m. (Ingersoll-Rand Co.)*





voluciones por minuto, el caudal en litros por minuto y la altura en metros.

En la Fig. 9.27 se muestra una curva característica que da la altura, rendimiento y potencia al freno en función del caudal para una bomba centrífuga con álabes curvados hacia atrás. Las bombas no tienen tanto rendimiento como las turbinas en general, debido a la gran pérdida de energía como resultado de la transformación de la energía cinética en energía de presión.

### *Curvas teóricas altura-caudal*

Se puede obtener una curva teórica altura-caudal utilizando la Ec. (9.3.8) y los diagramas vectoriales de la Fig. 9.8. Del diagrama de salida de la Fig. 9.8

$$V_2 \cos \alpha_2 = V_{u2} = u_2 - V_{r2} \cot \beta_2$$

Del caudal, si $b_2$ es el ancho del impulsor en $r_2$ y se desprecia el espesor del álabe,

$$Q = 2\pi r_2 b_2 V_{r2}$$

Eliminando $V_{r2}$ y sustituyendo estas dos ecuaciones en la Ec. (9.3.8),

$$H = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 Q \cot \beta_2}{2\pi r_2 b_2 g} \tag{9.6.1}$$

Para una bomba y una velocidad dadas, $H$ varía linealmente con $Q$, como se ve en la Fig. 9.28. El diseño normal de una bomba centrífuga tiene $\beta_2 < 90°$, con lo que la altura disminuye al aumentar el caudal. Para álabes radiales en la salida, $\beta_2 = 90°$ y la altura teórica es independiente del caudal. Para álabes curvos hacia delante, $\beta_2 > 90°$ y la altura crece con el caudal.

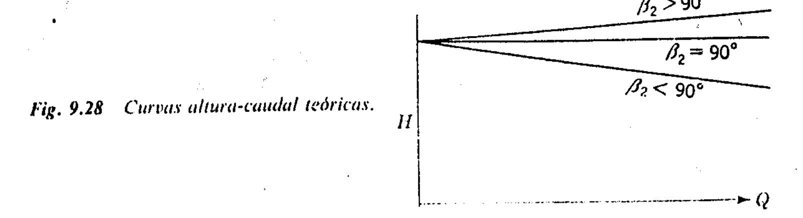



*Fig. 9.28 Curvas altura-caudal teóricas.*

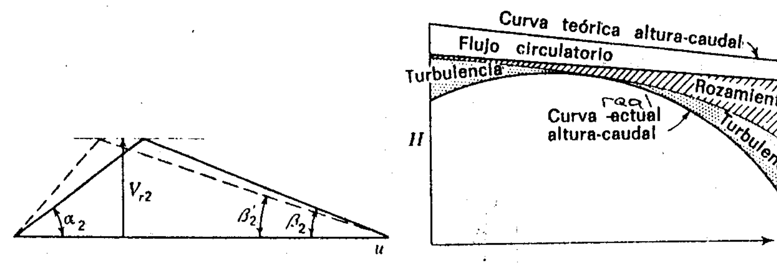



*Fig. 9.29* *Efecto del flujo circulatorio.*

*Fig. 9.30* *Relaciones altura-caudal.*

## *Curva real altura-caudal*

Se obtiene la curva real altura-caudal restando las pérdidas de altura de la curva teórica. El sustraendo más importante no es una pérdida real, sino un defecto del número finito de álabes que comunican la velocidad relativa con el ángulo $\beta_2$ de los álabes. Sin una guía perfecta (infinito número de álabes) el fluido sale realmente como si los álabes tuvieran un ángulo $\beta'_2$ menor que $\beta_2$ (Fig. 9.29) para el mismo caudal. Esta incapacidad de los álabes para comunicar la guía idónea reduce $V_{u2}$ y, por consiguiente, disminuye la altura real producida. Este fenómeno se llama *flujo circulatorio* y se representa en la Fig. 9.30. El rozamiento del fluido en movimiento con los pasos fijos y móviles produce pérdidas proporcionales al cuadrado del caudal. Se ven en la Fig. 9.30. La pérdida que falta es la turbulencia, debida al ángulo que forma la velocidad relativa con la parte interior del álabe. La bomba se puede diseñar para un caudal (a una velocidad dada) para el que la velocidad relativa sea tangente a la parte interior del álabe. Este es el punto de rendimiento máximo, y las pérdidas por choque o turbulencia son despreciables. Para otros caudales la pérdida varía aproximadamente con el cuadrado de la diferencia del ángulo respecto al de rendimiento máximo, como se ve en la Fig. 9.30. Entonces la línea inferior representa la curva real altura-caudal. La altura de corte es normalmente del orden de $u_2^2/2g$, o sea la mitad de la altura de corte teórica.

Además de las pérdidas y las reducciones de alturas, las bombas y las soplantes tienen pérdidas de par debidas al rozamiento de los cojinetes y las juntas y al rozamiento del disco y las pérdidas del fluido entre el impulsor móvil y el armazón. El vacío interno es también una importante pérdida de potencia, ya que el fluido que ha pasado a través del impulsor, con su energía incrementada, se sale a través de las holguras y fluye de regreso hacia el lado de succión del impulsor.

***Ejemplo 9.8*** Una bomba centrífuga de agua tiene un rodete impulsor (Fig. 9.23) con las siguientes características: $r_2$ = 300 mm, $r_1$ = 100 mm, $\beta_1 = 20°$, $\beta_2 = 10°$; anchura para $r = r_1$, 50 mm, y para $r = r_2$, 20 mm. A 1.800 r.p.m., despreciando las pérdidas y el espesor de los álabes, determinar: (*a*) el caudal para una entrada sin choque cuando $\alpha_1 = 90°$; (*b*) $\alpha_2$ y la altura teórica $H$; (*c*) la potencia necesaria, y (*d*) el aumento de presión a través del rodete.





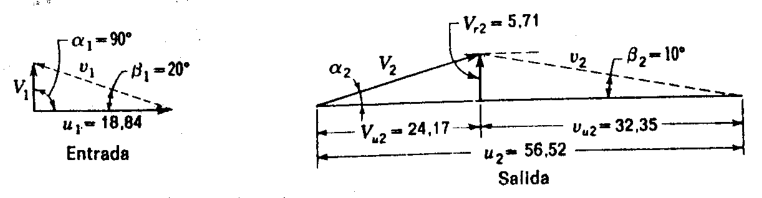



*Fig. 9.31* *Diagramas vectoriales a la entrada y a la salida del rodete de una bomba.*

(*a*) Las velocidades periféricas son

$$u_1 = \frac{1800}{60} \times 2\pi \times 0{,}1 = 18{,}84 \text{ m/seg} \qquad u_2 = 3u_1 = 56{,}52 \text{ m/seg}$$

Los diagramas vectoriales están representados en la Fig. 9.31. Cuando $u_1$ y los ángulos $\alpha_1$ y $\beta_1$ son conocidos, el diagrama de la entrada está determinado, $V_1 = u_1$ tg 20° = 6,85 m/seg; por consiguiente,

$$Q = 6{,}85 \times \pi \times 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}215 \text{ m}^3\text{/seg}$$

(*b*) A la salida, la velocidad radial $V_{r2}$ es

$$V_{r2} = \frac{0{,}215}{\pi \times 0{,}6 \times 0{,}02} = 5{,}71 \text{ m/seg}$$

Trazando $u_2$ (Fig. 9.31) y una paralela a $u_2$ a la distancia $V_{r2}$, el triángulo de vectores queda determinado cuando $\beta_2$ es conocido. Entonces,

$$V_{u2} = 5{,}71 \text{ ctg } 10° = 32{,}35 \qquad V_{u2} = 56{,}52 - 32{,}35 = 24{,}17$$

$$\alpha_2 = \text{arc tg}\,\frac{5{,}71}{24{,}17} = 13°\,18' \qquad V_2 = 5{,}71 \text{ cosec } 13°\,18' = 24{,}8$$

De la Ec. (9.3.8)

$$H = \frac{u_2 V_2 \cos\alpha_2}{g} = \frac{u_2 V_{u2}}{g} = \frac{56{,}52 \times 24{,}17}{9{,}8} = 139 \text{ m}$$

(*c*) $$\text{Potencia} = \frac{Q\gamma H}{75} = \frac{0{,}215 \times 1000 \times 139}{75} = 398 \text{ CV}$$

(*d*) Aplicando la ecuación de Bernoulli a la entrada y a la salida del rodete impulsor, incluyendo la energía $H$ suministrada (el incremento de altura a través del impulsor puede despreciarse):

$$H + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

y

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = 139 + \frac{6{,}85^2}{19{,}6} - \frac{24{,}8^2}{19{,}6} = 110{,}1 \text{ m}$$

o sea

$$p_2 - p_1 = 110{,}1 \times 10^3 = 11{,}01 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 = 11{,}01 \text{ kg/cm}^2$$

## 9.7 *Compresores centrífugos*

Los compresores centrífugos funcionan de acuerdo con los mismos principios que las turbomáquinas para los líquidos. Es importante que el fluido entre en el impulsor sin choque, es decir, con velocidad relativa tangente al álabe. Se realiza trabajo sobre el gas girando los álabes y la ecuación del momento de la cantidad de movimiento relaciona el par con la velocidad tangencial obtenida. En la salida del impulsor el gas a alta velocidad debe haber convertido en parte su energía cinética en energía de flujo por medio de adecuados pasos de expansión del fluido. Para compresión adiabática (sin refrigeración de gas) el trabajo real $w_a$ de compresión por unidad de masa se compara con el trabajo $w_{th}$ por unidad de masa para comprimir isoentrópicamente el gas a la misma presión. En los compresores refrigerados el trabajo $w_{th}$ se basa en el trabajo isotérmico de compresión a la misma presión que en el caso real. Por consiguiente,

$$\eta = \frac{w_{th}}{w_a} \tag{9.7.1}$$

es la fórmula del rendimiento de un compresor.

Para el compresor adiabático se desarrolla la fórmula del rendimiento de compresión de un gas perfecto, suponiendo que no hay fugas internas en la máquina, es decir, que no hay «pasos de fuga» del fluido a alta presión al extremo de baja presión del impulsor. Normalmente los compresores centrífugos tienen varios escalonamientos, con relaciones de presión de hasta 3 a través de un escalonamiento simple. De la ecuación del momento de la cantidad de movimiento (9.3.2) con velocidad absoluta de entrada radial, $\alpha_1 = 90°$, el par teórico $T_{th}$ es

$$T_{th} = \dot{m} V_{u2} u_2 \tag{9.7.2}$$

donde $\dot{m}$ es la masa que se comprime por unidad de tiempo, $V_{u2}$ es la componente tangencial de la velocidad absoluta de salida del impulsor y $r_2$ es el radio del impulsor en la salida. El par real aplicado $T_a$ es mayor



que el par teórico por las pérdidas de par debidas al rozamiento de los cojinetes y las juntas más el rozamiento del disco; por tanto,

$$T_{th} = T_a \eta_m \tag{9.7.3}$$

siendo $\eta_m$ el rendimiento mecánico del compresor.

Además de las pérdidas de par, hay irreversibilidades debidas al flujo a través de la máquina. El trabajo real de compresión en la máquina adiabática se obtiene a partir de la ecuación de la energía en flujo permanente (3.8.8), despreciando las variaciones de altura y sustituyendo $u + p/\rho$ por $h$,

$$-w_a = \frac{V_{2a}^2 - V_1^2}{2} + h_2 - h_1 \tag{9.7.4}$$

El trabajo isoentrópico de compresión se puede obtener de la Ec. (3.8.8) en forma diferencial, despreciando los términos en $z$,

$$-dw_{th} = V\,dV + d\frac{p}{\rho} + du$$

$$= V\,dV + \frac{dp}{\rho} + p\,d\frac{1}{\rho} + du$$

Los dos últimos términos son iguales a $T\,ds$ según la Ec. (3.8.13), que para el flujo isoentrópico es cero, luego

$$-dw_{th} = V\,dV + \frac{dp}{\rho} \tag{9.7.5}$$

Integrando para $p/\rho^k$ = const entre las secciones 1 y 2,

$$-w_{th} = \frac{V_{2th}^2 - V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_{2th}} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \frac{V_{2th}^2 - V_1^2}{2} + c_p T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \tag{9.7.6}$$

Entonces el rendimiento se puede escribir de la forma

$$\eta = \frac{-w_{th}}{-w_a} = \frac{[(V_{2th}^2 - V_1^2)/2] + c_p T_1[(p_2/p_1)^{(k-1)/k} - 1]}{[(V_{2a}^2 - V_1^2)/2] + c_p(T_{2a} - T_1)} \tag{9.7.7}$$

ya que $h = c_p T$. En función de las Ecs. (9.7.2) y (9.7.3)

$$-w_a = \frac{T_a \omega}{\dot{m}} = \frac{T_{th}\omega}{\eta_m \dot{m}} = \frac{V_{u2} r_2 \omega}{\eta_m} = \frac{V_{u2} u_2}{\eta_m} \tag{9.7.8}$$

entonces

$$\eta = \frac{\eta_m}{V_{u2}u_2}\left\{c_p T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] + \frac{V_{2th}^2 - V_1^2}{2}\right\} \qquad (9.7.9)$$

A continuación se da un ejemplo de aplicación de esta ecuación.

*Ejemplo 9.9* Un turbocompresor adiabático tiene álabes radiales en la salida de su impulsor de 16 cm de diámetro. Comprime 0,5 $kg_m$/seg de aire a 1 kg/cm², y $t = 15°$ C, a 3 kg/cm². El área de entrada es de 63 cm² y el área de salida es 36 cm². $\eta = 0{,}75$; $\eta_m = 0{,}90$. Determinar la velocidad de giro del impulsor y la temperatura real del aire a la salida.

La densidad en la entrada es

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1 \times 10^4}{29{,}3 \times 9{,}8(273 + 15)} = 0{,}12 \text{ UTM/m}^3$$

y la velocidad en la entrada es

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 A_1} = \frac{0{,}5}{9{,}8} \times \frac{1}{0{,}12} \times \frac{1}{63 \times 10^{-4}} = 67{,}5 \text{ m/seg}$$

La densidad teórica a la salida es

$$\rho_{2th} = \rho_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k} = 0{,}12 \times 3^{1/1{,}4} = 0{,}263 \text{ UTM/m}^3$$

y la velocidad teórica a la salida es

$$V_{2th} = \frac{\dot{m}}{\rho_{2th}A_2} = \frac{0{,}5}{9{,}8} \times \frac{1}{0{,}263} \times \frac{1}{36 \times 10^{-4}} = 54{,}6 \text{ m/seg}$$

Para álabes radiales en la salida, $V_{u2} = u_2 = \omega r_2$. De la Ec. (9.7.9)

$$u_2^2 = \frac{\eta_m}{\eta}\left\{c_p T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] + \frac{V_{2th}^2 - V_1^2}{2}\right\}$$

$$= \frac{0{,}90}{0{,}75}\left\{0{,}24 \times 427 \times 9{,}8(273 + 15)[3^{(1{,}4-1)/1{,}4} - 1] + \frac{54{,}6^2 - 67{,}5^2}{2}\right\}$$

de donde $u_2 = 310$ m/seg. Entonces

$$\omega = \frac{u_2}{r_2} = \frac{310}{\frac{16}{2} \times 10^{-2}} = 3.880 \text{ rad/seg}$$

y

$$N = \frac{\omega}{2\pi}60 = \frac{3.880}{2\pi}60 = 37.000 \text{ r.p.m.}$$



El trabajo teórico $w_{th}$ es el término entre las llaves en la expresión de $u_2^2$. Vale $-w_{th} = 8 \times 10^4$ kgm/UTM. Entonces de la Ec. (9.7.1)

$$w_a = \frac{w_{th}}{\eta} = -\frac{8 \times 10^4}{0{,}75} = -1{,}07 \times 10^5 \text{ kgm/UTM}$$

Como el término de energía cinética es pequeño, se puede despejar $h_2 - h_1$ de la Ec. (9.7.4), y resolverla por tanteos

$$h_2 - h_1 = c_p(T_{2a} - T_1) = 1{,}07 \times 10^5 + \frac{67{,}5^2 - V_{2a}^2}{2}$$

En una primera aproximación $V_{2a} = V_{2th} = 54{,}6$ m/seg, entonces

$$T_{2a} = 288 + \frac{1}{0{,}24 \times 9{,}8 \times 427}\left[1{,}07 \times 10^5 + \frac{67{,}5^2 - 54{,}6^2}{2}\right] = 395{,}5° \text{ K}$$

Para esta temperatura la densidad a la salida es 0,241 UTM/m³ y la velocidad es 57 m/seg. Llevando este valor en lugar de 54,6 m/seg se reduce la temperatura aproximadamente en ½°; por consiguiente, $T_{2a} = 395°$ K.

## 9.8 Acoplamientos fluidos y convertidores de par fluidos

El *acoplamiento fluido* consiste en una bomba centrífuga y una turbina montadas ambas dentro de la misma carcasa, para evitar pérdidas al eliminar conducciones o canales que de otra manera se necesitarían para conectarlas. No hay ninguna conexión sólida entre la bomba y la turbina (Fig. 9.32); el líquido, corrientemente aceite, transmite el par transportando el momento de la cantidad de movimiento desde la bomba a la turbina. El acoplamiento fluido tiene dos ventajas principales: (*a*) la suavidad de marcha, ya que las vibraciones torsionales no se transmiten a su través; (*b*) el par total no se desarrolla hasta que el aparato ha alcanzado su velocidad de régimen, lo cual es conveniente tanto para los motores eléctricos como para los motores de combustión interna con grandes masas de inercia.

La aplicación de la ecuación del momento de la cantidad de movimiento [Ec. (9.3.1)] da la relación entre el par desarrollado y la variación de la cantidad de movimiento angular en la bomba o en la turbina. El par debe ser el mismo en ambas cuando se ha establecido el régimen permanente, ya que no existen órganos estacionarios para absorber par, ni hay aceleración angular. Cuando el acoplamiento y una porción de los ejes primario y secundario se considera como un cuerpo libre, la aceleración angular en éste es cero en régimen permanente, de aquí que la suma de los pares que actúan sobre el cuerpo libre tiene que ser cero, y el par en el eje secundario es exactamente igual al par en el eje primario.

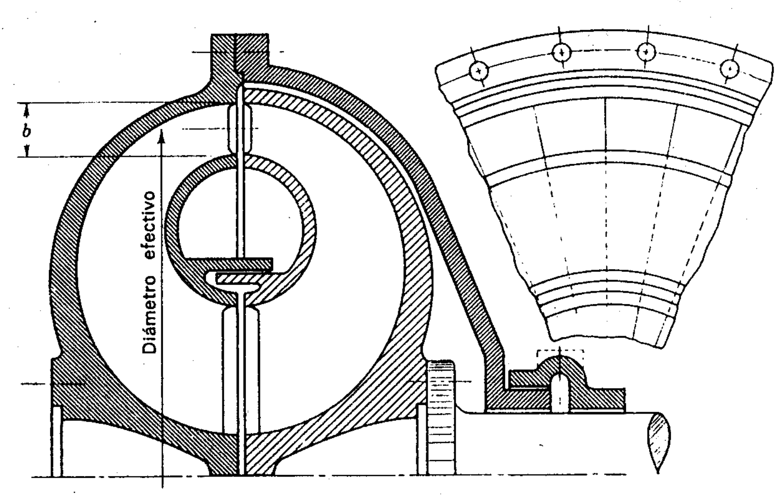



*Fig. 9.32* *Acoplamiento fluido del tipo Foettinger. (David Taylor Model Basin, U. S. Navy Dept.)*

En el funcionamiento del acoplamiento hay que considerar que al principio el órgano secundario está quieto, mientras que el órgano conductor gira ya a su velocidad de régimen. El líquido entra en la bomba, cerca del eje, se le comunica un momento de cantidad de movimiento mientras la atraviesa y entra en la turbina por la parte exterior. La cantidad de movimiento angular del fluido se hace cero en la turbina en reposo y así el fluido ejerce el par que el eje primario le ha suministrado. Cuando el eje secundario empieza a moverse, la acción centrifugadora de la turbina ejerce una resistencia al fluido que hace disminuir la cantidad de líquido bombeado. No se verifica bombeo alguno cuando ambos ejes giran a la misma velocidad y, por tanto, no se transmite ningún par. Puesto que el aparato es simétrico, cuando el eje secundario gira a mayor velocidad que el primario se transmite un par al eje primario que hace una acción de frenado. En la marcha normal debe haber siempre una diferencia de velocidades, o *deslizamiento* que hace que se transmita un par. El rendimiento $e$ es el cociente del trabajo obtenido por el trabajo realizado, o sea

$$e = \frac{T\omega_t}{T\omega_p} = \frac{\omega_t}{\omega_p} = 1 - s \qquad (9.8.1)$$

en la que $T$ es el par, $\omega_p$ la velocidad del eje primario, $\omega_t$ la velocidad del eje secundario y $s$ el deslizamiento, o sea $(\omega_p - \omega_t)/\omega_p$.

Para transmitir un par dado, cuanto mayor sea el diámetro y menor el deslizamiento, mayor será el rendimiento del acoplamiento. Como el rendimiento puede aumentarse, aumentando simplemente el diámetro, no



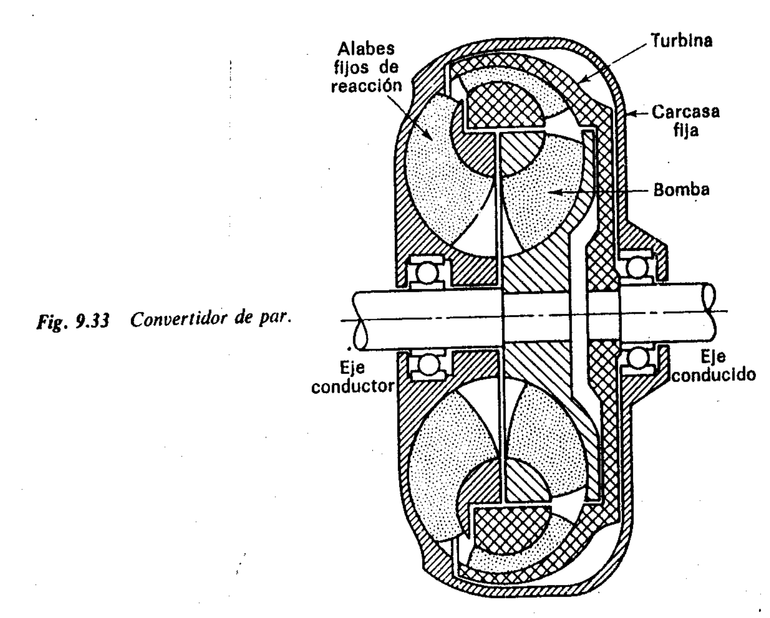



*Fig. 9.33* *Convertidor de par.*

es necesario curvar los álabes o redondear sus lados activos para disminuir la turbulencia o choque del fluido al entrar en los álabes. Los rendimientos son mayores del 95 por 100.

En algunas aplicaciones en las que es variable el par a transmitir conviene que se pueda variar la cantidad de aceite en el acoplamiento.

El *convertidor de par fluido* (Fig. 9.33) es muy parecido al acoplamiento fluido. Se diferencia en que tiene un sistema de álabes *fijos*, que transmite el par a la fundación y trabaja siempre completamente lleno de líquido.

En régimen permanente no hay aceleración angular y la suma de todos los pares que actúan sobre el aparato debe ser cero. Puesto que hay un sistema de álabes fijos al que está aplicado un par exterior $T_f$ para mantenerlo en reposo, los pares en los ejes secundario y primario no son iguales. Por ejemplo, si los álabes fijos están curvados de modo que el líquido actúe sobre ellos intentando girarlos en sentido opuesto al eje primario, hay un aumento de par en el par del eje secundario que es igual a la suma del par del eje primario más el par que se ejerce sobre los álabes fijos, con la correspondiente disminución de velocidad del eje secundario.

Debido al diseño del sistema de álabes fijos, puede haber o un aumento o una disminución en el par. Puesto que no se efectúa trabajo sobre los álabes fijos, la potencia obtenida en el eje secundario debe ser igual a la potencia consumida en el eje primario menos las pérdidas. Un convertidor de par de un solo escalón se representa en la Fig. 9.33. El rendi-

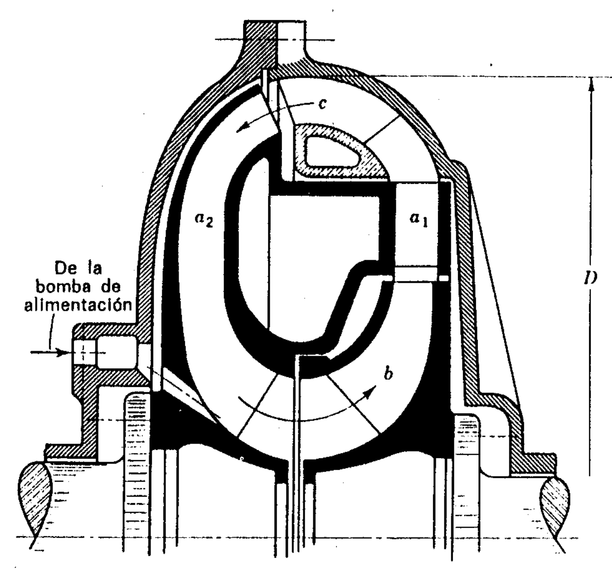



*Fig. 9.34* *Convertidor de par con turbina de dos escalones. ($a_1$) Turbina del primer escalón; ($a_2$) turbina del segundo escalón; (b) bomba; (c) álabes fijos de guía; (d) máximo diámetro del circuito. (David Taylor Model Basin, U. S. Navy Dept.)*

miento máximo es menor que en un acoplamiento fluido, corrientemente entre un 80 y un 90 por 100.

Como en el caso de una turbina de reacción, donde los álabes fijos crean una cantidad de movimiento angular que disminuye en los álabes móviles creando un par sobre el eje secundario, los álabes fijos de un convertidor de par están curvados para dar al líquido un momento de cantidad de movimiento. La bomba aumenta este momento de la cantidad de movimiento y la turbina, por su propia construcción y por tener una velocidad mucho menor que la bomba, toma el momento de la cantidad de movimiento del líquido y así se logra un gran par. Cuando se desea una gran multiplicación del par, el convertidor de par se proyecta con dos o más series de álabes de turbina con álabes fijos o bien con álabes de bomba entre ellos como se indica en la Fig. 9.34.

Colocando un dispositivo de *rueda libre* en vez de los álabes fijos, que gire en la dirección del par que se aplique, el convertidor de par se transforma en un acoplamiento fluido. Cuando existe una gran diferencia entre las velocidades de la turbina y de la bomba se requiere una conversión del par y la reacción que se ejerce sobre los álabes (fijos) de la rueda libre mantiene a ésta quieta. Cuando la bomba y la turbina tienen velocidades próximas, la turbina se mueve de modo que el líquido que sale de ella hace moverse a la rueda libre, es decir, ésta no toma parte



en el proceso, resultando un acoplamiento fluido con mejor rendimiento que el convertidor de par.

## 9.9 Cavitación

Cuando un líquido se mueve en una región donde la presión es menor que la tensión de vapor, hierve y se forman burbujas de vapor en su seno. Las burbujas de vapor son arrastradas con el líquido hasta una región donde se alcanza una presión más elevada y allí desaparecen. Este fenómeno se llama *cavitación*. Si las burbujas de vapor están próximas (o en contacto) a una pared sólida cuando desaparecen, las fuerzas que el líquido ejerce al introducirse violentamente en las cavidades crean presiones localizadas muy altas que dañan la superficie sólida. El fenómeno es acompañado de ruidos y vibraciones parecidos a los que se producen cuando se introduce arena dentro de una bomba centrífuga.

En un líquido en movimiento, el *parámetro de cavitación* es muy útil para caracterizar la susceptibilidad del sistema a la cavitación. Se define mediante

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\rho V^2/2} \tag{9.9.1}$$

donde $p$ es la presión absoluta en el punto considerado, $p_v$ es la tensión máxima de vapor del líquido, $\rho$ es su densidad y $V$ es la velocidad no perturbada o de referencia. El parámetro de cavitación es una forma del coeficiente de presión. En dos sistemas geométricamente semejantes habrá la misma probabilidad de que se produzca cavitación o habrá el mismo grado de cavitación para el mismo valor de $\sigma$. Cuando $\sigma = 0$, la presión se reduce a la tensión de vapor y se producirá la ebullición.

Ensayos efectuados con líquidos químicamente puros demuestran que soportan tensiones de tracción muy elevadas, del orden de cientos de kilos por centímetro cuadrado, lo que está en contradicción con el concepto de las cavidades que se forman cuando la presión se reduce a la tensión de vapor. Como se produce ebullición espontánea cuando se alcanza la tensión de vapor con líquidos comerciales o industriales, se acepta generalmente que debe haber núcleos presentes alrededor de los cuales se forman y crecen burbujas de vapor. La naturaleza de los núcleos aún no está completamente explicada, pero pueden ser partículas microscópicas de polvo o de otros contaminantes, que están ampliamente dispersos en los líquidos industriales.

Las burbujas de cavitación se pueden formar sobre los núcleos, crecer, moverse hacia un área de presión mayor y colapsarse, todo ello en unas pocas milésimas de segundo en el movimiento en el interior de una turbomáquina. En agua aireada se han fotografiado las burbujas cuando se

*Tabla 9.1 Pérdidas de peso en los materiales empleados en las máquinas hidráulicas*

| Aleación | Pérdida de peso después de 2 horas, mg |
|---|---|
| Estelita laminada† | 0,6 |
| Bronce de aluminio soldado‡ | 3,2 |
| Bronce de aluminio fundido§ | 5,8 |
| Acero inoxidable soldado (dos capas, 17 % Cr, 7 % Ni) | 6,0 |
| Acero inoxidable laminado en caliente (26 % Cr, 13 % Ni) | 8,0 |
| Acero inoxidable laminado y revenido (12 % Cr) | 9,0 |
| Acero inoxidable fundido (18 % Cr, 8 % Ni) | 13,0 |
| Acero inoxidable fundido (12 % Cr) | 20,0 |
| Bronce de manganeso fundido | 80,0 |
| Acero dulce soldado | 97,0 |
| Acero en placa | 98,0 |
| Acero fundido | 105,0 |
| Aluminio | 124,0 |
| Latón | 156,0 |
| Hierro fundido | 224,0 |

† Este material no es útil para uso ordinario, a pesar de su gran resistencia, a causa de su elevado coste y la dificultad de mecanizar.
‡ Ampco-Trode 200: 83 % Cu, 10,3 % Al, 5,8 % Fe.
§ Ampco 20: 83,1 % Cu, 12,4 % Al, 4,1 % Fe.

mueven mediante varias oscilaciones, pero no parece que se produzca este fenómeno en líquidos no aireados. La tensión superficial de las burbujas de vapor parece ser una propiedad importante teniendo en cuenta los impulsos de alta presión que resultan del colapso de una burbuja de vapor. Experimentos recientes indican presiones del orden de 15.000 kg/cm$^2$ basados en el análisis de las ondas de deformación en una probeta fotoelástica expuesta a cavitación†. Parecen ser razonables presiones de esta magnitud, de acuerdo con los daños mecánicos observados debidos a la cavitación.

La formación y colapso de gran número de burbujas en una superficie la somete a solicitaciones locales intensas, que dañan dicha superficie por fatiga. Algunos materiales dúctiles resisten la corrosión durante un período, llamado periodo de incubación, antes de que se manifieste el daño, mientras que los materiales frágiles pierden peso inmediatamente. Puede haber algunos efectos electromecánicos, de corrosión y términos que favorezcan el deterioro de las superficies expuestas. Rheingans‡ ha reunido una serie de medidas realizadas mediante ensayos con un oscila-

† G. W. Sutton, A Photoelastic Study of Strain Waves Caused by Cavitation, *J. Appl. Mech.*, vol. 24, parte 3, págs. 340-348, 1957.
‡ W. J. Rheingans, Selecting Materials to Avois Cavitation Damage, *Mater. Design Eng.*, págs. 102-106, 1958.



dor de magnetoestricción, dando las pérdidas de peso de varios metales empleados en las máquinas hidráulicas (ver la Tabla 9.1).

La protección contra la cavitación debe empezar con el diseño hidráulico del sistema a fin de evitar las presiones bajas si es posible. De otro modo, se deben emplear materiales o recubrimientos especialmente resistentes a la cavitación. Pequeñas cantidades de aire introducidas en los sistemas de agua han reducido notablemente el daño debido a la cavitación, y estudios recientes indican que sirve de ayuda una protección catódica.

La formación de cavidades de vapor disminuye el espacio utilizable para el paso del líquido y, por tanto, el rendimiento de una máquina hidráulica. La cavitación tiene tres inconvenientes: disminuye el rendimiento, daña los conductos de paso del fluido y produce ruidos y vibraciones. Los álabes curvos son particularmente productores de este fenómeno en sus lados convexos y se pueden observar áreas donde la cavitación produce picado o corrosión, como en la Fig. 9.35. Todas las turbomáquinas, hélices de barco y muchas estructuras hidráulicas están sometidas a los peligros de la cavitación, de aquí la atención que ha de ponerse en el proyecto de todas ellas.

Un *índice de cavitación σ'* es útil para la conveniente elección de turbomáquinas y su emplazamiento en relación con la altura de aspiración o altura sobre la superficie libre del agua. La presión mínima en una turbina

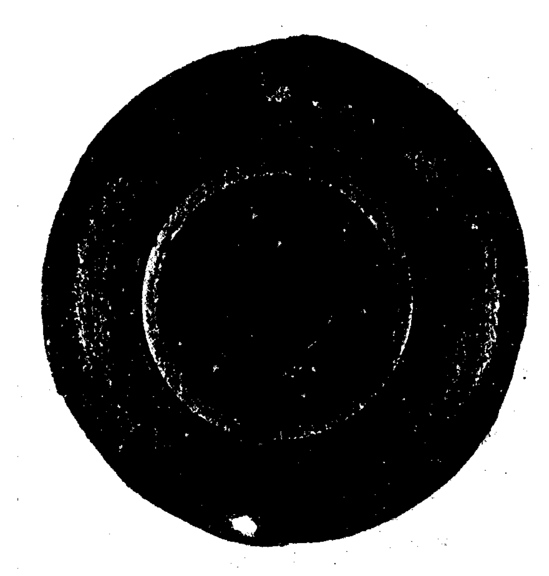


*Fig. 9.35 Daños producidos por la cavitación en una turbina Francis. (Ingersoll-Rand Co.)*

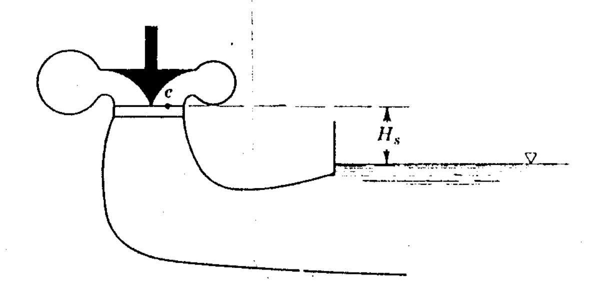



*Fig. 9.36* Turbina o bomba instalada.

o bomba tiene lugar en el lado convexo de los álabes cerca del lado de aspiración del rodete impulsor. En la Fig. 9.36, si $e$ es el punto de presión mínima, la ecuación de Bernoulli aplicada entre $e$ y la superficie del líquido aguas abajo, despreciando las pérdidas entre los dos puntos, puede ser escrita:

$$\frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} + H_s = \frac{p_a}{\gamma} + 0 + 0$$

siendo $p_a$ la presión atmosférica y $p_e$ la presión absoluta. Para que en $e$ se presente la cavitación, la presión ha de ser igual o menor que la tensión de vapor $p_v$. Si $p_e = p_v$,

$$\sigma' = \frac{V_e^2}{2gH} = \frac{p_a - p_v - \gamma H_s}{\gamma H} \tag{9.9.2}$$

que es la relación entre la energía disponible en $e$ y la energía total $H$ puesto que la única energía es energía cinética. La relación $\sigma'$ es el índice o número de cavitación. El valor crítico $\sigma_c$ puede determinarse experimentando con un modelo de una serie homóloga. Para evitar la cavitación, la altura de aspiración $H_s$ ha de ser tal que el valor que resulte para $\sigma'$ sea mayor que $\sigma_c$.

***Ejemplo 9.10*** Experimentos realizados con una bomba modelo indican que $\sigma_c = 0{,}10$. Una bomba semejante tiene que ser instalada en un lugar donde $p_a = 0{,}9$ kg/cm² y $p_v = 0{,}035$ kg/cm² para bombear agua a una altura de 25 m. ¿Cuál será la máxima altura de aspiración permitida?

Despejando $H_s$ en la Ec. (9.9.2) y sustituyendo luego los valores de $\sigma_c$, $H$, $p_a$ y $p_v$ resulta

$$H_s = \frac{p_a - p_v}{\gamma} - \sigma' H = \frac{(0{,}9 - 0{,}035)10^4}{10^3} - 0{,}10 \times 25 = 6{,}15 \text{ m}$$

Cuanto menor sea el valor de $H_s$ mayor será el valor de $\sigma'$ y mayor será la seguridad de que no aparecerá la cavitación.



La *altura neta de succión positiva* ($NPSH$) se emplea con frecuencia en la especificación de las condiciones mínimas de succión de una turbomáquina. Es

$$NPSH = \frac{V_e^2}{2g} = \frac{p_a - p_v - \gamma H_s}{\gamma} \tag{9.9.3}$$

Se realiza un ensayo en la máquina para determinar el valor máximo de $H_s$ para la operación de la máquina sin disminución del rendimiento y sin ruido ni daño inadmisible. Después, a partir de este ensayo se calcula la $NPSH$ de la Ec. (9.9.3). Entonces es aceptable cualquier diseño de esta máquina para el cual la elevación de succión sea menor que $H_s$, hallado de la Ec. (9.9.3). Nótese que $H_s$ es positivo cuando el depósito de succión está por debajo de la turbomáquina, como en la Figura 9.36.

Se puede formular una *velocidad específica de succión S* para unidades homólogas. Eliminando $D_e$ en las dos ecuaciones

$$NPSH = \frac{V_e^2}{2g} \sim \frac{Q^2}{D_e^4} \qquad \frac{Q^2}{ND_e^3} = \text{const}$$

se obtiene $S$,

$$S = \frac{N\sqrt{Q}}{(NPSH)^{3/4}} \tag{9.9.4}$$

Cuando unidades distintas de una serie están operando bajo condiciones de cavitación, valores iguales de $S$ indican un grado de cavitación semejante. Cuando no hay cavitación, la ecuación no es válida.

### Problemas

***9.1*** Desarrollar una relación homóloga para $P$ en función de la velocidad y el diámetro utilizando las Ecs. (9.1.1) y (9.1.3) junto con $P = \gamma QH$ para la potencia.

***9.2*** Una bomba centrífuga es accionada por un motor de inducción que reduce su velocidad cuando la carga de la bomba aumenta. Un ensayo determina varios grupos de valores de $N$, $Q$, $H$ para la bomba. ¿Cómo será una curva característica de la bomba para una velocidad constante determinada a partir de los datos anteriores?

***9.3*** ¿Cuál es la velocidad específica de la bomba del Ejemplo 9.1 en su punto de rendimiento máximo?

***9.4*** Dibujar la curva característica adimensional de la bomba del Ejemplo 9.1. Sobre esta curva marcar varios puntos de las características de la bomba nueva (130 cm). ¿Por qué no están exactamente sobre la misma curva?

***9.5*** Determinar el tamaño y la velocidad síncrona de una bomba homóloga a la bomba de 180 cm del Ejemplo 9.1 que dé 3.600 l/seg a 90 m de altura en su punto de rendimiento máximo.

*9.6* Desarrollar la curva característica de una bomba homóloga de la serie del Ejemplo 9.1 para un diámetro de descarga de 45 cm y 1800 r.p.m.

*9.7* Una bomba con un rodete de 20 cm de diámetro descarga 8000 l/min a 1140 r.p.m. y 9 m de altura en su punto de rendimiento máximo. ¿Cuál es su velocidad específica?

*9.8* Una central hidroeléctrica dispone de una altura de carga de 100 m y de un caudal medio de 10 m³/seg. Para una velocidad del generador de 200 r.p.m., ¿cuál es la velocidad específica de la turbina requerida? Supóngase un rendimiento del 92 por 100.

*9.9* Una turbina modelo, $N_s = 225$, con un rodete de 300 mm de diámetro, desarrolla 25 CV para una altura de 15 m y con un rendimiento del 80 por 100. ¿Cuál es el caudal y la velocidad del modelo?

*9.10* ¿Qué tamaño y velocidad de sincronización tendrá una unidad homóloga de la del Prob. 9.9 para un caudal de 16 m³/seg y una carga de 80 m?

*9.11* El agua que fluye con un caudal de 24.000 l/seg a través de los álabes fijos de una turbina tiene una componente tangencial de 1,80 m/seg en un radio de 1,20 m. El rodete, que gira a 180 r.p.m., descarga en dirección axial. ¿Qué par se ejerce sobre el rodete?

*9.12* Despreciando las pérdidas en el Prob. 9.11, ¿cuál es la altura de carga sobre la turbina?

*9.13* Un generador con velocidad $N = 240$ r.p.m. se emplea con una turbina donde $H = 120$ m y $Q = 9$ m³/seg. Despreciando las pérdidas, ¿qué componente tangencial se debe dar al agua en $r = 0{,}90$ m por medio de los álabes fijos? ¿Qué par se ejerce sobre el rodete? ¿Qué potencia se produce?

*9.14* La rueda Pelton de una central dispone de un caudal permanente de 60 l/seg, siendo la velocidad a la salida de la boquilla de 70 m/seg. Para un ángulo de álabes de 174°, y $C_v = 0{,}98$ para la potencia a 60 ciclos, determinar (*a*) el diámetro del rodete, (*b*) la velocidad, (*c*) la potencia, (*d*) la energía remanente en el agua. Despréciense las pérdidas.

*9.15* Una rueda de impulsión se emplea para dar una potencia a 50 ciclos/seg en un lugar donde $H = 120$ m y $Q = 80$ l/seg. Determinar el diámetro de la rueda y su velocidad. $C_v = 0{,}97$, $e = 0{,}82$.

*9.16* ¿Con qué ángulo deberán colocarse los álabes directores de una turbina para proporcionar una potencia de 12.000 CV con un caudal de 25 m³/seg? El diámetro interior de la corona de álabes directores es 3,6 m y su altura de 90 cm. La turbina gira a 200 r.p.m., y el flujo abandona el rodete en dirección axial.

*9.17* Para una dada corona de álabes directores, ¿cómo varía el momento de la cantidad de movimiento con el caudal?

*9.18* Suponiendo una velocidad axial constante justamente encima del rodete de la turbina de hélice del Prob. 9.16, calcular las componentes de la velocidad tangencial, si el radio del eje es de 30 cm y el radio exterior de 90 cm.

*9.19* Determinar los ángulos del álabe a la entrada y a la salida $\beta_1$, $\beta_2$, para la turbina de hélice del Prob. 9.18 de tal manera que el momento de la cantidad de movimiento remanente en el fluido sea nulo. (Calcular los ángulos para los radios interior, medio y exterior.)

*9.20* Despreciando las pérdidas, ¿cuál es la altura de carga sobre la turbina del Prob. 9.16?

*9.21* El rendimiento hidráulico de una turbina es del 92 por 100 y la altura teórica del salto es de 80 m. ¿Cuál es la altura real necesaria?



*9.22* El ensayo sobre modelo de una turbina de 25 cm de diámetro de la hélice dio un rendimiento del 90 por 100. ¿Qué rendimiento cabe esperar con una hélice de 1,20 m de diámetro?

*9.23* El tubo difusor de una turbina (Fig. 9.37) pasa de un diámetro de 2 a 6 m. En la sección 1 la velocidad es 10 m/seg para una tensión de vapor de 30 cm y presión barométrica de 10 m de columna de agua. Determinar $h_s$ para el comienzo de la cavitación (presión igual a la tensión de vapor en la sección 1).

*9.24* Dibujar la curva teórica altura de carga-caudal para las siguientes especificaciones de una bomba centrífuga: $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 10$ cm, $b_1 = 2{,}5$ cm, $b_2 = 1{,}8$ cm, 1200 r.p.m. y $\beta_2 = 30°$.

*9.25* Una bomba centrífuga de agua (Fig. 9.23) tiene un impulsor de $r_1 = 63{,}5$ mm, $b_1 = 35$ mm, $r_2 = 114{,}0$ mm, $b_2 = 19{,}0$ mm, $\beta_1 = 30°$, $\beta_2 = 45°$ ($b_1$, $b_2$ son las anchuras del impulsor en $r_1$ y $r_2$, respectivamente. Suponer que los álabes tienen un espesor despreciable. Para 1.800 r.p.m., determinar: (*a*) el caudal de proyecto para fluido que entra sin rotación, (*b*) $\alpha_2$ y la altura teórica de elevación en el punto de máximo rendimiento y (*c*) para un rendimiento hidráulico del 85 por 100 y un rendimiento total del 78 por 100, la altura de elevación real, las pérdidas de energía en el fluido en kgm/kg y la potencia al freno.

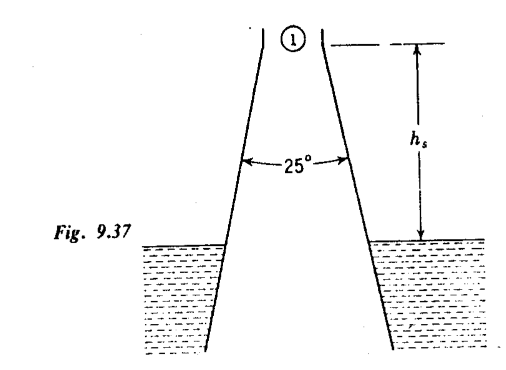



*Fig. 9.37*

*9.26* Una bomba centrífuga tiene un impulsor de las siguientes dimensiones: $r_1 = 7{,}5$ cm, $r_2 = 15$ cm, $b_1 = 5$ cm, $b_2 = 3$ cm, $\beta_1 = \beta_2 = 30°$. Para un caudal de 60 l/seg y sin choque a la entrada de los álabes, calcular (*a*) la velocidad, (*b*) la carga, (*c*) el par, (*d*) la potencia y (*e*) el aumento de presión a través del impulsor. Despreciar las pérdidas. $\alpha_1 = 90°$.

*9.27* Una bomba centrífuga tiene un rodete con las siguientes dimensiones: $r_1 = 50$ mm, $r_2 = 125$ mm, $b_1 = 75$ mm, $b_2 = 25$ mm, $\beta_2 = 60°$, anchura en $r_2 = 20$ mm; $\beta_1 = 50°$, $\beta_2 = 40°$. Para un caudal de 0,14 m³/seg y una carga de 20 m, calcular: (*a*) $\beta_1$, (*b*) la velocidad, (*c*) la potencia en CV y (*d*) la elevación de presión al pasar por el rodete. Despreciar las pérdidas y suponer que no hay choque en la entrada. $\alpha_1 = 90°$.

*9.28* Elegir los valores de $r_1$, $r_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $b_1$ y $b_2$ de un rodete centrífugo que tome 30 l/seg de agua de una tubería de succión de 10 cm de diámetro y aumente su energía en 12 kgm/kg. $N = 1200$ r.p.m.; $\alpha_1 = 90°$. Despreciar las pérdidas.

*9.29* Una bomba tiene los ángulos de los álabes $\beta_1 = \beta_2$; $b_1 = 2b_2 = 25$ mm; $r_1 = r_2/3 = 50$ mm. Para una altura teórica de 28,5 m y un caudal para el rendi-

miento máximo de 30 $m^3$/seg, determinar los ángulos de los álabes y la velocidad de la bomba. Despreciar el espesor de los álabes y suponer un guiado perfecto. (*Sugerencia*: Poner todas las relaciones que se conozcan entre $\beta_1$, $\beta_2$, $b_1$, $b_2$, $r_1$, $r_2$, $u_1$, $u_2$, $H_{th}$, $Q$, $V_{r2}$, $V_{u2}$, $V_1$, $\omega$ y $N$ a partir de los dos triángulos vectoriales de velocidades, y por sustitución reducirlo a una incógnita.)

***9.30*** Un manómetro diferencial de mercurio y agua, $R' = 66$ cm, está conectado entre la tubería de succión, de 10 cm de diámetro, y la tubería de descarga, de 7,5 cm de diámetro, de una bomba. El eje de la tubería de succión está 30 cm por debajo de la tubería de descarga. Para $Q = 3.400$ l/min de agua, calcular la altura de carga desarrollada por la bomba.

***9.31*** El rodete de la soplante de la Fig. 9.38 tiene 450 mm de ancho. Tiene álabes rectos y gira a 1200 r.p.m. Para un caudal de aire de 280 $m^3$/min, $\gamma = 1,28$ kg/$m^3$,

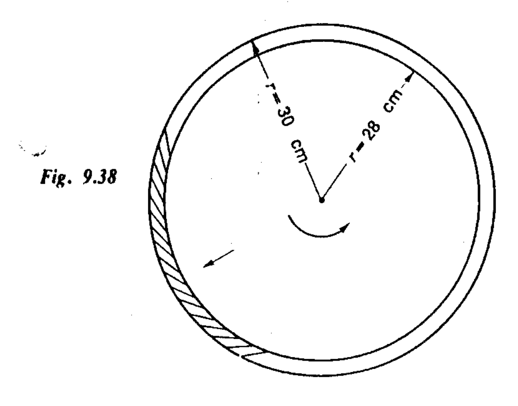



*Fig. 9.38*

calcular: (*a*) los ángulos del álabe a la entrada y a la salida ($\alpha_1 = 90°$), (*b*) la altura producida en centímetros de agua y (*c*) la potencia necesaria en CV.

***9.32*** Un soplador de aire está diseñado para producir una presión de 10 cm de agua cuando funciona a 3.600 r.p.m. $\gamma = 1,12$ kg/$m^3$; $r_2 = 1,1\ r_1$; $\beta_2 = \beta_1$; la anchura del impulsor es 10 cm; $\alpha_1 = 90°$. Determinar $r_1$.

***9.33*** En el Prob. 9.32 cuando $\beta_1 = 30°$, calcular el caudal en $m^3$/min.

***9.34*** Desarrollar la ecuación del rendimiento de un compresor refrigerado,

$$\eta = \frac{\eta_m}{V_{u2}u_2}\left(\frac{V_{2th}^2 - V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}\ln\frac{p_2}{p_1}\right)$$

***9.35*** Hallar la velocidad de rotación en el Ejemplo 9.9 para un compresor refrigerado utilizando los resultados del Prob. 9.34 con una temperatura real a la salida de 15° C.

***9.36*** Un acoplamiento fluido transmite 60 CV cuando el árbol motor gira a 1.200 r.p.m. y el árbol conducido gira a 1.160 r.p.m. ¿Cuál es el par sobre cada uno de los árboles y cuál el rendimiento del acoplamiento?

***9.37*** ¿Cuál es el parámetro de cavitación en un punto del agua en movimiento donde $t = 20°$ C, $p = 0,15$ kg/cm (abs) y la velocidad es 12 m/s?

***9.38*** Una turbina con $\sigma_c = 0,08$ se va a instalar en una central en la que $H =$



60 m y la lectura en un barómetro de agua es 8,3 m. ¿A qué altura máxima, sobre el nivel de agua a la salida de la turbina, puede colocarse el rodete?

***9.39*** Dos unidades son homólogas cuando son geométricamente semejantes y tienen

(*a*) líneas de corriente semejantes;
(*b*) el mismo número de Reynolds;
(*c*) el mismo rendimiento;
(*d*) el mismo número de Froude;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***9.40*** Las dos relaciones siguientes son necesarias para unidades homólogas:

(*a*) $H/ND^3 = \text{const}$; $Q/N^2D^2 = \text{const}$
(*b*) $Q/D^2\sqrt{H} = \text{const}$; $H/N^3D = \text{const}$
(*c*) $P/QH = \text{const}$; $H/N^2D^2 = \text{const}$
(*d*) $N\sqrt{Q}/H^{3/2} = \text{const}$; $N\sqrt{P}/H^{3/4} = \text{const}$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***9.41*** La velocidad específica de una bomba se define como la velocidad de una unidad

(*a*) de tamaño unidad con caudal unidad y altura unidad;
(*b*) de un tamaño tal que necesite potencia unidad para altura unidad;
(*c*) de un tamaño tal que dé un caudal unidad para altura unidad;
(*d*) de un tamaño tal que dé un caudal unidad para potencia unidad;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***9.42*** Una turbina de impulsión

(*a*) siempre trabaja sumergida;
(*b*) utiliza tubería de salida;
(*c*) es la más conveniente en instalaciones de pequeña altura;
(*d*) convierte la altura de presión en altura de velocidad en los álabes;
(*e*) trabaja con una conversión total inicial de la energía en energía cinética.

***9.43*** Una rueda Pelton de 600 mm de diámetro gira a 400 r.p.m. Elegir entre las siguientes alturas en metros la más conveniente para esta rueda:

(*a*) 2 (*b*) 10 (*c*) 40 (*d*) 50 (*e*) 150

***9.44*** Un árbol transmite 200 CV a 600 r.p.m. El par en mkg es

(*a*) 2,64 (*b*) 25,40 (*c*) 242,3 (*d*) 475,0 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***9.45*** ¿Qué par se necesita para dar a 2,8 $m^3$/seg de agua un momento de la cantidad de movimiento tal que tenga una velocidad tangencial de 3 m/seg a una distancia de 1,8 m del eje?

(*a*) 16,1 mkg (*b*) 268 mkg (*c*) 832 mkg (*d*) 1.610 mkg
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***9.46*** El momento de la cantidad de movimiento del agua se reduce en 2.770 mkg

al pasar a través de los álabes de una turbina que gira a 400 r.p.m. La potencia en CV desarrollada por la turbina es

(*a*) 242 (*b*) 1.522 (*c*) 14.500 (*d*) no determinable; datos insuficientes; (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*9.47* Un líquido que se mueve con momento de la cantidad de movimiento constante, tiene una velocidad tangencial de 1,2 m/seg a 3 m del eje de giro. La velocidad tangencial a 1,5 m del eje es, en m/seg,

(*a*) 0,6 (*b*) 1,2 (*c*) 2,4 (*d*) 4,8 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*9.48* Por una turbina de reacción para un caudal de 34 $m^3$/seg con una altura de salto de 8 m y un rendimiento total del 91 por 100. La potencia desarrollada en CV es

(*a*) 3.890 (*b*) 3.540 (*c*) 3.220 (*d*) 100 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*9.49* La elevación provocada por una bomba con rendimiento hidráulico del 80 por 100, para $u_2 = 30$ m/seg, $V_2 = 18$ m/seg, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_1 = 90°$, es

(*a*) 15,8 (*b*) 31,6 (*c*) 39,6 (*d*) 49,5 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*9.50* Elegir la relación correcta para los diagramas vectoriales de una bomba

(*a*) $\alpha_1 = 90°; v_1 = u_1 \cot \beta_1$
(*b*) $V_{u2} = u_2 - V_{r2} \cot \beta_2$
(*c*) $\omega_2 = r_2/u_2$
(*d*) $r_1 V_1 = r_2 V_{r2}$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*9.51* El parámetro de cavitación se define mediante

(*a*) $\dfrac{p_v - p}{\rho V^2/2}$ (*b*) $\dfrac{p_{atm} - p_v}{\rho V^2/2}$ (*c*) $\dfrac{p - p_v}{\gamma V^2/2}$ (*d*) $\dfrac{p - p_v}{\rho V^2/2}$

(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*9.52* La cavitación se debe a la

(*a*) gran velocidad; (*b*) baja presión barométrica; (*c*) alta presión; (*d*) baja presión; (*e*) baja velocidad.

## *Referencias*

Church, A. H.: «Centrifugal Pumps and Blowers», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1944.

Daily, J. W.: Hydraulic Machinery, en «Engineering Hydraulics», ed. por H. Rouse, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1950.

Eisenberg, P., y M. P. Tulin: Cavitation, sec. 12 de «Handbook of Fluid Dynamics», ed. por V. L. Streeter, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.



Hunsaker, J. C., y B. G. Rightmire: «Engineering Applications of Fluid Mechanics», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1947.

Moody, L. F.: Hydraulic Machinery, en «Handbook of Applied Hydraulics», 2.ª ed., ed. por C. V. Davis, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1952.

Spannhake, W.: «Centrifugal Pumps, Turbines and Propellers», The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1934.

Stepanoff, A. J.: «Centrifugal and Axial Flow Pumps», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1948.

Wislicenus, G. F.: «Fluid Mechanics of Turbomachinery», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1947.

# 10

# Flujo permanente en conductos cerrados

Los procedimientos fundamentales para resolver los problemas del flujo permanente en conductos cerrados se trataron ya en la Sec. 5.10, donde se estudiaron casos de flujo en tuberías sencillas incluyendo las pérdidas debidas a los cambios de dirección o de sección del flujo. En las Secs. 6.6 a 6.8 se trató el flujo compresible en conductos. Las distribuciones de velocidad en el flujo turbulento se trataron en la Sec. 5.4. Este capítulo se refiere a casos y aplicaciones más complejos que los del Capítulo 5.

## *10.1 Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales*

Los conceptos de líneas de alturas *piezométricas* y de alturas *totales* son útiles en el análisis de problemas complejos de flujo. Si en cada punto a lo largo de un sistema de tuberías se determina el valor de $p/\gamma$ y se lleva verticalmente hacia arriba desde el centro de la tubería, el lugar de los puntos extremos es la línea de alturas piezométricas. Con más generalidad, si se hace la suma

$$\frac{p}{\gamma} + z$$

y se lleva gráficamente como ordenada, tomando como abscisa la longitud de la tubería se obtiene la línea de alturas piezométricas. La línea de alturas piezométricas es el lugar de las alturas a las que subiría el líquido en tubos verticales conectados a agujeros piezométricos situados en la tubería. Cuando la presión en la conducción es menor que la atmosférica, $p/\gamma$ es negativo y la línea de alturas piezométricas está por debajo de la tubería.

La línea de alturas totales es la línea que une la serie de puntos que señalan la energía total en kgm/kg de cada punto de la tubería tomada como ordenada, llevada en correspondencia a la longitud de la tubería



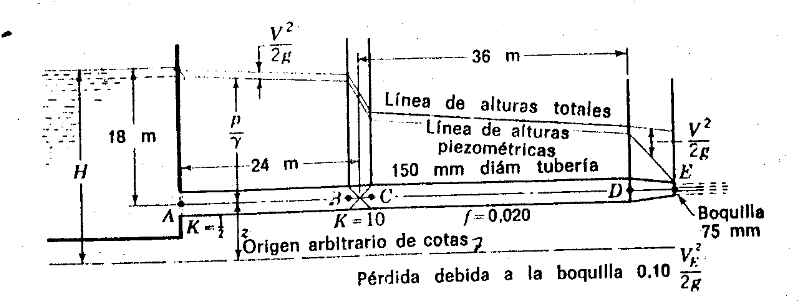



*Fig. 10.1 Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales.*

tomada como abscisa. Es el gráfico de

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$

para cada punto de la conducción. Por definición, la línea de alturas totales está siempre verticalmente por encima de la línea de alturas piezométricas a una distancia de $V^2/2g$, despreciando el factor de corrección de la energía cinética.

Las líneas de alturas piezométricas y totales se representan en la Figura 10.1 para una tubería sencilla que contiene una entrada en arista viva, una válvula y una boquilla al final de la conducción. Para construir estas líneas, cuando se da la superficie del depósito, es necesario primeramente aplicar la ecuación de la energía desde el depósito hasta la salida, incluyendo todas las pérdidas menores, así como las pérdidas por rozamiento en las paredes de la tubería y despejar entonces la altura de velocidad $V^2/2g$. Después, para encontrar la altura piezométrica en cualquier punto, se aplica la ecuación de energía desde el depósito hasta ese punto, incluyendo todas las pérdidas entre los dos puntos. En la ecuación se despeja $(p/\gamma) + z$, que se lleva al gráfico por encima del origen arbitrario. Para encontrar la línea de alturas totales en el mismo punto se despeja en la ecuación $(V^2/2g) + p/\gamma + z$, que se lleva al gráfico a partir del origen arbitrario.

Para los puntos del depósito, la superficie de éste coincide con las líneas de alturas piezométricas y totales. En la entrada en arista viva, la altura total cae $0{,}5V^2/2g$ a causa de la pérdida que allí existe, y la altura piezométrica cae $1{,}5V^2/2g$. Esto se comprueba fácilmente aplicando la ecuación de la energía entre la superficie del depósito y un punto justamente aguas abajo de la entrada de la tubería:

$$H + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} + 0{,}5\frac{V^2}{2g}$$

Despejando $z + p/\gamma$

$$z + \frac{p}{\gamma} = H - 1{,}5\frac{V^2}{2g}$$

se encuentra que la caída de la altura piezométrica es $1{,}5V^2/2g$. La pérdida de energía debida al estrechamiento brusco en la entrada no ocurre realmente a la entrada misma, sinc en una distancia de 10 o más diámetros de tubería aguas abajo. Sin embargo, es costumbre suponer que tiene lugar en la unión misma de la tubería del depósito, es decir, en el accesorio.

***Ejemplo 10.1*** Determinar las alturas piezométricas y totales en los puntos $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$ de la Figura 10.1.

Si elegimos como línea origen el eje central de la tubería ambas líneas parten de una altura de 18 m. En primer lugar, para calcular la altura de velocidad se aplica la ecuación de la energía entre el recipiente y $E$,

$$18 + 0 + 0 = \frac{V_E^2}{2g} + 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{2g} + 0{,}020\frac{60}{0{,}15}\frac{V^2}{2g} + 10\frac{V^2}{2g} + 0{,}10\frac{V_E^2}{2g}$$

por la ecuación de continuidad, $V_E = 4V$. Simplificando,

$$18 = \frac{V^2}{2g}(16 + \tfrac{1}{2} + 8 + 10 + 16 \times 0{,}1) = 36{,}1\frac{V^2}{2g}$$

de donde $V^2/2g = 0{,}5$. Aplicando la ecuación de la energia entre el depósito y $A$,

$$18 + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + 0{,}5\frac{V^2}{2g}$$

Por consiguiente, la altura piezométrica en $A$ es

$$\left.\frac{p}{\gamma} + z\right|_A = 18 - 1{,}5\frac{V^2}{2g} = 18 - 1{,}5 \times 0{,}5 = 17{,}25 \text{ m}$$

La altura total en $A$ es

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = 17{,}25 + 0{,}5 = 17{,}75 \text{ m}$$

Para $B$,

$$18 + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + 0{,}5\frac{V^2}{2g} + 0{,}02\frac{24}{0{,}15}\frac{V^2}{2g}$$

y

$$\left.\frac{p}{\gamma} + z\right|_B = 18 - (1{,}5 + 3{,}2) \times 0{,}5 = 15{,}65 \text{ m}$$

la altura total es $15{,}65 + 0{,}5 = 16{,}15$ m.



Debido a la válvula, la altura piezométrica desciende $10\ V^2/2g$, o sea, 5 m. Por consiguiente, en $C$ las alturas piezométrica y total valen 10,65 y 10,15 m, respectivamente.

En el punto $D$,

$$18 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \left(10{,}5 + 0{,}02\frac{60}{0{,}15}\right)\frac{V^2}{2g}$$

y

$$\left.\frac{p}{\gamma} + z\right|_D = 18 - 19{,}5 \times 0{,}5 = 8{,}25 \text{ m}$$

con una altura total de $8{,}25 + 0{,}5 = 8{,}75$ m.

En el punto $E$, la altura piezométrica vale cero, y la altura total,

$$\frac{V_E^2}{2g} = 16\frac{V^2}{2g} = 16 \times 0{,}5 = 8 \text{ m}$$

El *gradiente de alturas piezométricas* es igual a la pendiente de la línea de alturas piezométricas, si el conducto es horizontal; en caso contrario vale

$$\frac{d(z + p/\gamma)}{dL}$$

El *gradiente de energía* es la pendiente de la línea de alturas totales si el conducto es horizontal; en caso contrario vale

$$\frac{d(z + p/\gamma + V^2/2g)}{dL}$$

En muchas situaciones con tuberías largas se pueden despreciar las pérdidas menores (cuando representan menos del 5 por 100 de las pér-

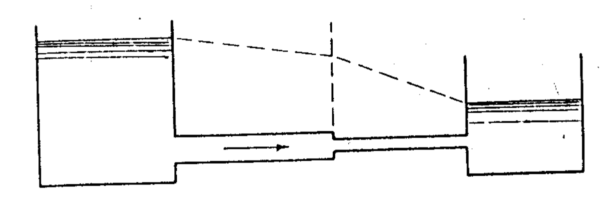


***Fig. 10.2*** *Líneas de alturas piezométricas en tuberías largas donde se desprecian las pérdidas menores o se consideran incluidas como longitudes equivalentes de tubería.*

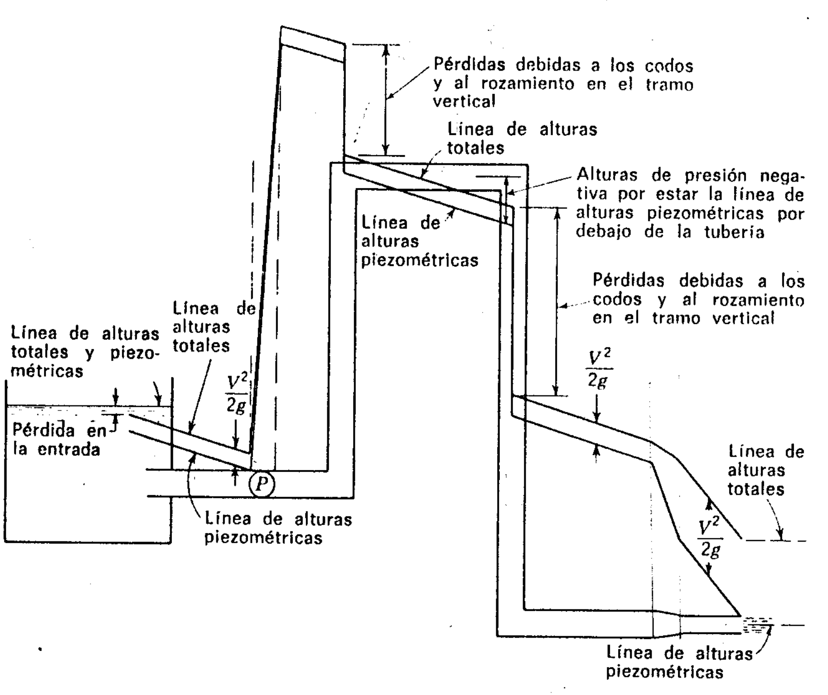



***Fig. 10.3*** *Líneas de alturas totales y piezométricas para un sistema con bomba y sifón.*

didas por rozamiento en la tubería) o se pueden añadir como longitudes equivalentes a la longitud real al resolver el problema. Para estas situaciones el valor de la altura de velocidad $V^2/2g$ es pequeño comparado con $f(L/D)V^2/2g$ y se desprecia. Entonces se utiliza la línea de alturas piezométricas, como se indica en la Fig. 10.2. No se observa cambio alguno en la línea de alturas piezométricas para las pérdidas menores. Para estos estados con tuberías largas el gradiente de alturas piezométricas vale $h_f/L$ y se determina a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach,

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \qquad (10.1.1)$$

La corriente fluida (excepto en el caso de que se intercale una bomba) va siempre en la dirección en que disminuye la altura total.

Las bombas añaden energía al flujo fluido, lo que puede expresarse en la ecuación de Bernoulli incluyendo esta adición como una pérdida negativa o añadiendo un término positivo igual a la energía por unidad de peso en el miembro de la ecuación correspondiente a aguas arriba. La línea de alturas piezométricas se eleva pronunciadamente en una bomba. La Fig. 10.3 muestra las líneas piezométricas y totales para un



sistema con una bomba y un sifón. La pendiente verdadera de las líneas solo se puede demostrar para líneas horizontales.

***Ejemplo 10.2*** Una bomba con una potencia en el eje de 10 CV y un rendimiento del 70 por 100 está conectada a una tubería que conduce un caudal de 0,085 m³/seg. Los diámetros de las tuberías de entrada y de salida en la bomba son, respectivamente, 150 y 100 mm, estando la sección de entrada 0,9 m por debajo de la salida. Calcular la presión en la sección de salida y el incremento de la altura piezométrica debida a la bomba sabiendo que la presión en la sección de entrada es de 0,75 kg/cm².

La energía añadida a la corriente por la bomba en kgm/kg se designa por $E$,

$$\frac{Q\gamma E}{75} = 10 \times 0{,}7$$

de donde

$$E = \frac{75 \times 7}{0{,}085 \times 1.000} = 6{,}17 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones de entrada y de salida,

$$\frac{V_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + 0 + 6{,}17 = \frac{V_d^2}{2g} + \frac{p_d}{\gamma} + 0{,}9$$

refiriéndose los subíndices $s$ y $d$ a la entrada y a la salida, respectivamente. De la ecuación de continuidad

$$V_s = 0{,}085\frac{4 \times 10}{225 \times \pi} = 4{,}81 \text{ m/seg} \qquad V_d = 0{,}085\frac{4}{\pi \times 0{,}1} = 10{,}82 \text{ m/seg}$$

y despejando $p_d$

$$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{4{,}81}{19{,}6} + \frac{0{,}75 \times 10}{10} + 6{,}17 - \frac{10{,}82^2}{19{,}6} - 0{,}9 = 7{,}97 \text{ m}$$

y, por tanto, $p_d = 0{,}797$ kg/m². El incremento de altura piezométrica es

$$\left(\frac{p_d}{\gamma} + 0{,}9\right) - \frac{p_s}{\gamma} = 7{,}97 + 0{,}9 - 7{,}5 = 1{,}37 \text{ m}$$

En este ejemplo casi toda la energía adicionada lo fue en forma de energía cinética, incrementándose la altura piezométrica solamente en 1,37 m, mientras que la altura total se incrementó en 6,17 m.

Las turbinas absorben energía de la corriente fluida provocando una brusca caída en la altura total. La energía absorbida por unidad de peso del fluido deberá considerarse como una pérdida al calcular las líneas de alturas.

## 10.2 El sifón

Un *sifón* es un conducto cerrado, dispuesto como se ve en la Fig. 10.4, que conduce el líquido a una altura mayor que la de la superficie libre y lo vierte después a una altura menor. Existen ciertas limitaciones en su funcionamiento debido a las bajas presiones que se presentan cerca del vértice $s$.

Suponiendo que el tubo del sifón está totalmente lleno de líquido, es decir, que a través de él la columna líquida es continua, la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 conduce a la ecuación

$$H = \frac{V^2}{2g} + K\frac{V^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

siendo $K$ la suma de todos los coeficientes de las pérdidas menores. Sacando factor común la altura de velocidad,

$$H = \frac{V^2}{2g}\left(1 + K + \frac{fL}{D}\right) \tag{10.2.1}$$

que se resuelve de la misma forma que se hizo en los problemas de tuberías sencillas del primero o segundo tipo. Cuando se conoce el caudal se calcula $H$ directamente, mientras que para el cálculo de $V$ a partir de un $H$ dado es necesario proceder por aproximaciones sucesivas suponiendo un cierto $f$.

La presión en el vértice $s$ se encuentra aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y $s$ después de resolver la Ec. (10.2.1). Esto es,

$$0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + y_s + K'\frac{V^2}{2g} + f\frac{L'}{D}\frac{V^2}{2g}$$

siendo $K'$ la suma de todos los coeficientes de las pérdidas menores entre los dos puntos y $L'$, la longitud del conducto hasta $s$. Despejando la presión,

$$\frac{p_s}{\gamma} = -y_s - \frac{V^2}{2g}\left(1 + K' + \frac{fL'}{D}\right) \tag{10.2.2}$$

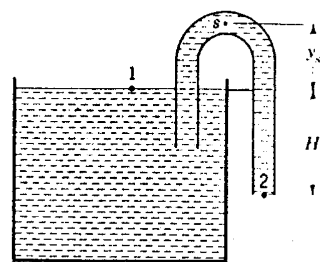



*Fig. 10.4 Sifón.*



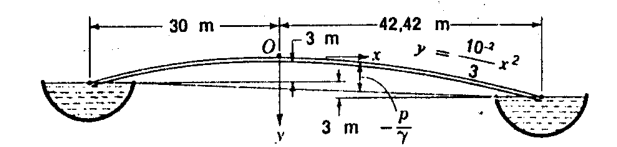



*Fig. 10.5 Sifón conectando dos depósitos.*

que demuestra que la presión es negativa y que disminuye con $y_s$ y con $V^2/2g$. Si al resolver la ecuación anterior se obtuviese un valor de $p_s/\gamma$ igual o menor que la presión de vapor† del líquido, entonces la Ec. (10.2.1) no es válida porque la evaporación de porciones de la columna fluida invalida la hipótesis de incompresibilidad que se hizo para deducir la ecuación de Bernoulli.

Aunque la Ec. (10.2.1) no es válida para este caso, teóricamente existirá un paso de fluido en tanto que $y_s$ más la presión de vapor sea menor que la presión atmosférica local expresada en altura de columna fluida. Cuando la Ec. (10.2.2) da una presión menor que la presión de vapor en $s$, la presión en $s$ debe tomarse igual a la presión de vapor. A continuación, con esta presión conocida, en la Ec. (10.2.2) se despeja $V^2/2g$ y se obtiene de esta manera el caudal. Se supone que el aire no penetra en el sifón por 2, rompiendo en $s$ el vacío que produce la corriente.

Prácticamente, un sifón no trabaja satisfactoriamente cuando la presión en el vértice está próxima a la presión del vapor. El aire u otros gases que lleva el líquido en solución se separan de él en los puntos de baja presión y se estacionan en el vértice reduciendo así la longitud de la columna de líquido de la parte derecha que produce la baja presión en el vértice. Los grandes sifones que trabajan continuamente tienen en los vértices bombas de vacío para desalojar los gases.

La más baja presión puede no presentarse en el vértice sino en un punto aguas abajo de aquél, puesto que el rozamiento y las pérdidas menores pueden reducir la presión más de lo que la eleva la disminución de altura.

***Ejemplo 10.3*** Despreciando las pérdidas menores y considerando la longitud de la tubería igual a su distancia horizontal, determinar el punto de presión mínima en el sifón de la Figura 10.5.

Cuando las pérdidas menores se desprecian, se desprecia también el término de la energía cinética $V^2/2g$. Entonces la línea de alturas piezométricas es una recta

† Un líquido hierve cuando se reduce su presión a su tensión de vapor. La tensión de vapor es función de la temperatura para cada líquido. El agua tiene una tensión de vapor de 6 cm de columna de agua absolutos a 0° C, 23,2 cm de columna de agua absolutos a 20° C, 2 m de columna de agua a 60° C y 10 m de columna de agua a 100° C. Ver la Sección 1.8.

que une las dos superficies libres. Las coordenadas de los dos puntos de la línea son: $x = -30$ m, $y = 3$ m; $x = 42,42$ m, $y = 6$ m. La ecuación de la recta es $y = mx + b$, o sea:

$$y = 0,0415x + 4,245$$

La presión mínima se presenta en el punto de la tubería más distante de la línea de alturas piezométricas,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{10^{-2}}{3}x^2 - 0,0415x - 4,245$$

Para encontrar el mínimo de $p/\gamma$, haremos $d(p/\gamma)\,dx = 0$, que nos da $x = 6,225$ m y $p/\gamma = -4,374$ m de altura de columna del líquido que fluye. El punto de presión mínima se presenta donde las pendientes de la tubería y de la línea de alturas piezométricas son iguales.

## 10.3 Tuberías en serie

Cuando dos tuberías de diferentes tamaños o rugosidades se conectan de manera que el fluido pase por una y a continuación por la siguiente se dice que están conectadas en serie. Un problema típico de tuberías en serie es aquel en el que se pide la altura $H$ para un caudal dado o el caudal que sale para una dada altura $H$ y que se ilustra en la Fig. 10.6. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre $A$ y $B$, incluyendo todas las pérdidas, resulta

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + K_e\frac{V_1^2}{2g} + f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

en la que los subíndices se refieren a cada una de las dos tuberías. El último término corresponde a la pérdida a la salida de la tubería 2. Utilizando la ecuación de continuidad

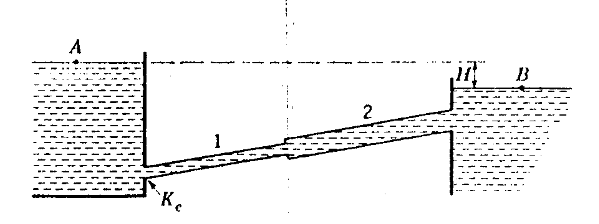



*Fig. 10.6 Tuberías conectadas en serie.*



$$V_1D_1^2 = V_2D_2^2$$

se puede eliminar $V_2$, obteniéndose

$$H = \frac{V_1^2}{2g}\left\{K_e + \frac{f_1L_1}{D_1} + \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 + \frac{f_2L_2}{D_2}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 + \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4\right\}$$

Para tuberías de longitudes y diámetros conocidos la anterior ecuación se reduce a

$$H = \frac{V_1^2}{2g}(C_1 + C_2f_1 + C_3f_2) \qquad (10.3.1)$$

siendo $C_1$, $C_2$, $C_3$ conocidos. Cuando se conoce el caudal se puede calcular fácilmente el número de Reynolds, y entonces las $f$ se encuentran en el diagrama de Moody. Después se calcula $H$ sin más que sustituir valores en la ecuación anterior. Para un $H$ dado, $V_1, f_1, f_2$ son desconocidos en la Ec. (10.3.1). Suponiendo ciertos valores de $f_1$ y de $f_2$ (pueden suponerse iguales), se calcula un valor de ensayo de $V_1$ con el cual se obtienen números de Reynolds de ensayo y con éstos en el diagrama de Moody se obtienen nuevos valores de $f_1$, $f_2$ a partir de los cuales con la Ec. (10.3.1) se calcula un $V_1$ mejor. Como $f$ varía muy ligeramente con el número de Reynolds, las soluciones de ensayo convergen muy rápidamente. El mismo proceso se aplica cuando las tuberías en serie son más de dos.

***Ejemplo 10.4*** En la Fig. 10.6 $K_e = 0,5$, $L_1 = 300$ m, $D_1 = 0,6$ m, $\epsilon_1 = 0,0015$ m, $L_2 = 240$ m, $D_2 = 0,9$ m, $\epsilon_2 = 0,0003$ m, $\nu = 10^{-6}$ m/seg y $H = 6$ m. Determinar el caudal a través del sistema de tuberías.

De la ecuación de la energía,

$$6 = \frac{V_1^2}{2g}\left\{0,5 + f_1\frac{300}{0,6} + \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 + f_2\frac{240}{0,9}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^4\right\}$$

Y simplificando,

$$6 = \frac{V_1^2}{2g}(1,006 + 500f_1 + 52,6f_2)$$

Siendo $\epsilon_1/D_1 = 0,0025$, $\epsilon_2/D_2 = 0,00033$ y tomando en la Fig. 5.32 los valores de $f_1$ y $f_2$ del intervalo de turbulencia completa,

$$f_1 = 0,025 \qquad f_2 = 0,015$$

Despejando $V_1$, con estos valores, obtenemos $V_1 = 2{,}87$ m/seg y $V_2 = 1{,}27$ m/seg.

$$\mathbf{R}_1 = \frac{2{,}87 \times 0{,}6}{10^{-6}} = 1.720.000 \qquad \mathbf{R}_2 = \frac{1{,}26 \times 0{,}9}{10^{-6}} = 1.142.000$$

y por la Fig. 5.32, $f_1 = 0{,}025$, $f_2 = 0{,}016$. Despejando de nuevo $V_1$ se encuentra $V_1 = 2{,}86$ m/seg, y $Q = 2{,}86 \times (\pi \times 0{,}36/4) = 0{,}809$ m³/seg.

### *Tuberías equivalentes*

Los problemas de tuberías en serie pueden resolverse por el método de las longitudes equivalentes. Se dice que dos sistemas de tuberías son equivalentes cuando la misma pérdida de altura produce el mismo caudal en ambos sistemas. Por la Ec. (10.1.1),

$$h_{f1} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{Q_1^2}{(D_1^2\pi/4)^2\, 2g} = \frac{f_1 L_1}{D_1^5} \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g}$$

y para la segunda tubería:

$$h_{f2} = \frac{f_2 L_2}{D_2^5} \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g}$$

Para que las dos tuberías sean equivalentes se ha de verificar que

$$h_{f1} = h_{f2} \qquad Q_1 = Q_2$$

Igualando $h_{f1} = h_{f2}$ y simplificando

$$\frac{f_1 L_1}{D_1^5} = \frac{f_2 L_2}{D_2^5}$$

Despejando $L_2$,

$$L_2 = L_1 \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \qquad (10.3.2)$$

que determina la longitud de una segunda tubería equivalente a la primera. Por ejemplo, si se quiere remplazar una tubería de 1.000 m de longitud y 200 mm de diámetro por otra equivalente de 150 mm de diámetro, hay que obtener unos valores aproximados de $f_1$, $f_2$ eligiendo un caudal dentro del intervalo previsto. Sea, por ejemplo, $f_1 = 0{,}020$, $f_2 = 0{,}018$; entonces:

$$L_2 = 1.000 \frac{0{,}020}{0{,}018} \left(\frac{150}{200}\right)^5 = 264 \text{ m}$$



Es decir, que en las condiciones supuestas 264 m de tubería de 150 mm equivalen a 1.000 m de tubería de 200 mm.

Hipotéticamente, dos o más tuberías que compongan un sistema pueden también remplazarse por una única tubería que dé el mismo caudal para la misma pérdida total de altura.

***Ejemplo 10.5*** Resolver el problema del Ejemplo 10.4 por medio de tuberías equivalentes.

En primer lugar, expresando las pérdidas menores en función de la longitud equivalente, resulta para la tubería 1:

$$K_1 = 0{,}5 + [1 - (\tfrac{0,6}{0,9})^2]^2 = 0{,}809$$

$$L_{e1} = \frac{K_1 D_1}{f_1} = \frac{0{,}809 \times 0{,}6}{0{,}025} = 19{,}4 \text{ m}$$

y para la tubería 2:

$$K_2 = 1$$

$$L_{e2} = \frac{K_2 D_2}{f_2} = \frac{1 \times 0{,}9}{0{,}015} = 60 \text{ m}$$

Los valores de $f_1$ y de $f_2$ se eligen dentro del intervalo de turbulencia completa en una primera aproximación. El problema se reduce ahora a 319,4 m de tubería de 0,6 m de diámetro y a 300 m de tubería de 0,9 m de diámetro. Expresando la tubería de 0,9 m de diámetro en función de la longitud equivalente de tubería de 0,6 m por la Ec. (10.3.2),

$$L_e = 300 \frac{0{,}015}{0{,}025} \left(\frac{0{,}6}{0{,}9}\right)^5 = 23{,}8 \text{ m}$$

Sumando esta longitud a la de la tubería de 0,6 m, el problema se reduce a un problema de una tubería sencilla consistente en encontrar el caudal a través de 319,4 + 23,8 = 343,2 m de una tubería de 0,6 m de diámetro, $\epsilon = 0{,}005$, para una pérdida de altura de 6 m,

$$6 = f \frac{343{,}2}{0{,}6} \frac{V^2}{2g}$$

Para $f = 0{,}025$, $V = 2{,}87$ m/seg, $\mathbf{R} = 2{,}87 \times 0{,}6/10^{-6} = 1.720.000$. Para $\epsilon/D = 0{,}0025$, $f = 0{,}025$ y $Q = 2{,}87(\pi \times 0{,}6^2/4) = 0{,}81$ m³/seg.

## *10.4 Tuberías en paralelo*

Una combinación de dos o más tuberías conectadas como en la Figura 10.7, de tal manera que la corriente fluida se divida entre las tuberías

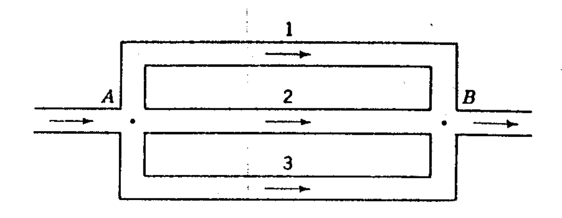



*Fig. 10.7* *Sistema de tuberías en paralelo.*

y después se junte de nuevo, es un sistema de *tuberías en paralelo*. En tuberías en serie el mismo fluido fluye a través de todas las tuberías y las pérdidas de energía mecánica son acumulativas, mientras que en las tuberías en paralelo las pérdidas de energía mecánica son las mismas en cualquiera de las tuberías y los caudales son acumulativos.

Al considerar los sistemas de tuberías en paralelo se supone que las pérdidas menores se suman a las longitudes de cada tubería como longitudes equivalentes. Para la Fig. 10.7 las condiciones que tienen que satisfacer son:

$$h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} = \frac{p_A}{\gamma} + z_A - \left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B\right) \qquad (10.4.1)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

siendo $z_A$, $z_B$ las cotas de los puntos $A$ y $B$, y $Q$ el caudal a través de la tubería de llegada o de la de salida.

Dos tipos de problemas pueden presentarse: (1) conociendo la altura piezométrica en $A$ y en $B$, calcular el caudal $Q$; (2) conociendo $Q$, encontrar la distribución del caudal y la pérdida de energía. Se suponen conocidos los diámetros de las tuberías, las rugosidades y las propiedades del fluido.

El primer tipo de problemas se reduce al problema de calcular el caudal en una tubería sencilla conocida la pérdida de energía que es igual a la caída de la altura piezométrica. Los caudales así calculados se suman para determinar el caudal total.

La resolución del segundo tipo de problemas es más difícil, ya que ni se conoce la pérdida de altura ni el caudal para ninguna de las tuberías. El procedimiento que se recomienda es el siguiente:

1. Suponer un caudal $Q'_1$ a través de la tubería 1.
2. Despejar $h'_f$, empleando el caudal supuesto.
3. Utilizando $h'_{f1}$, encontrar $Q'_2$, $Q'_3$.
4. Determinados estos tres caudales para una pérdida de energía común, suponer que el caudal dado $Q$ se reparte entre las tuberías proporcionalmente a los $Q'_1$, $Q'_2$, $Q'_3$, es decir:



$$Q_1 = \frac{Q'_1}{\Sigma Q'}Q \qquad Q_2 = \frac{Q'_2}{\Sigma Q'}Q \qquad Q_3 = \frac{Q'_3}{\Sigma Q'}Q \qquad (10.4.2)$$

5. Comprobar la exactitud de estos caudales comprobando los $h_{f1}$, $h_{f2}$, $h_{f3}$ para los $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$.

Este procedimiento sirve para cualquier número de tuberías. Se obtiene una prudente elección de $Q'_1$ estimando el porcentaje del caudal total a través del sistema que pasa por la tubería 1 (teniendo en cuenta su diámetro, longitud y rugosidad); la Ec. (10.4.2) da valores que solo difieren un 5 por 100 de los verdaderos; lo cual está dentro del intervalo de exactitud de los coeficientes de rozamiento.

*Ejemplo 10.6* En la Fig. 10.7, $L_1 = 900$ m, $D_1 = 0{,}3$ m, $\epsilon_1 = 0{,}0003$ m, $L_2 = 600$ m, $D_2 = 200$ mm, $\epsilon_2 = 0{,}00003$ m; $L_3 = 1.200$ m, $D_3 = 400$ mm, $\epsilon_3 = 0{,}00024$ m, $\rho = 104{,}8$ UTM/m$^3$, $\nu = 0{,}000003$ m$^2$/seg, $p_A = 6$ kg/cm$^2$; $z_A = 30$ m, $z_B = 25$ m. Para un caudal total de 0,34 m$^3$/seg determinar el caudal a través de cada una de las tuberías y la presión en $B$.

Suponiendo $Q'_1 = 0{,}09$ m$^3$/seg, entonces $V'_1 = 1{,}27$, $\mathbf{R}'_1 = 1{,}27 \times 0{,}3/3 \times 10^{-6} = 127.000$, $\epsilon_1/D_1 = 0{,}001$, $f'_1 = 0{,}022$, y

$$h'_{f1} = 0{,}022 \times \frac{900}{0{,}3}\frac{1{,}27^2}{19{,}6} = 5{,}43 \text{ m}$$

Para la tubería 2

$$5{,}43 = f'_2 \frac{600}{0{,}2}\frac{V'^2_2}{2g}$$

Entonces $\epsilon_2/D_2 = 0{,}00015$. Suponiendo $f'_2 = 0{,}020$; resulta $V'_2 = 1{,}33$ m/seg, $\mathbf{R}'_2 = 1{,}33 \times 0{,}2/0{,}000003 = 88.800$, $f'_2 = 0{,}019$, $V'_2 = 1{,}37$ m/seg, $Q'_2 = 0{,}043$ m$^3$/seg.

Para la tubería 3

$$5{,}43 = f'_3 \frac{1200}{0{,}4}\frac{V'^2_3}{2g}$$

Entonces $\epsilon_3/D_3 = 0{,}0006$. Suponiendo $f'_3 = 0{,}020$; resulta $V'_3 = 1{,}33$ m/seg, $\mathbf{R}'_3 = 1{,}33 \times 0{,}4/0{,}000003 = 177.000$, $f'_3 = 0{,}020$, $Q'_3 = 0{,}167$ m$^3$/seg.

El caudal total para las condiciones supuestas es

$$\Sigma Q' = 0{,}090 + 0{,}043 + 0{,}167 = 0{,}3 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Por consiguiente,

$$Q_1 = \frac{0{,}09}{0{,}3} \times 0{,}34 = 0{,}102 \text{ m}^3\text{/seg} \qquad Q_2 = \frac{0{,}043}{0{,}3} \times 0{,}34 = 0{,}049 \text{ m}^3\text{/seg}$$

$$Q_3 = \frac{0{,}167}{0{,}3} \times 0{,}34 = 0{,}189 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Comprobando los valores de $h_1$, $h_2$, $h_3$,

$$V_1 = \frac{0{,}102}{(\pi/4)\times 0{,}3^2} = 1{,}44 \text{ m/seg} \qquad \mathbf{R}_1 = 144.000 \qquad f_1 = 0{,}022 \qquad h_{f1} = 7{,}00 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{0{,}049}{(\pi/4)\times 0{,}2^2} = 1{,}56 \text{ m/seg} \qquad \mathbf{R}_2 = 102.000 \qquad f_2 = 0{,}019 \qquad h_{f2} = 7{,}08 \text{ m}$$

$$V_3 = \frac{0{,}189}{(\pi/4)\times 0{,}4^2} = 1{,}50 \text{ m/seg} \qquad \mathbf{R}_3 = 200.000 \qquad f_3 = 0{,}019 \qquad h_{f3} = 6{,}55 \text{ m}$$

$f_2$ es, aproximadamente, la media de 0,019 y 0,020. Si se eligiera 0,020, $h_2$ resultaría 6,9 m.

Para calcular $p_B$,

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + h_f$$

o sea

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{6\times 10^4}{10^3} + 30 - 25 - 6{,}87 = 58{,}13 \text{ m}$$

en la cual se ha tomado una pérdida de energía media. Entonces

$$p_B = 58{,}13 \times 10^3 \text{ kg/m}^2 = 5{,}813 \text{ kg/cm}^2$$

### 10.5 *Tuberías ramificadas*

Un sistema sencillo de *tuberías ramificadas* se representa en la Fig. 10.8. En este caso se pide el caudal de cada tubería conociendo las alturas de los depósitos. También se suponen conocidos los diámetros y rugosidades de las tuberías, así como las propiedades del fluido. En cada tubería deben cumplirse las ecuaciones de Darcy-Weisbach y de continuidad. Esta expresa que el caudal que llega al nudo $J$ debe ser igual al que sale de él. El líquido debe salir del depósito más alto y entrar en el más bajo; por consiguiente, la ecuación de continuidad puede ser una de las siguientes:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Si la altura piezométrica en el nudo $J$ está por encima de la superficie libre del depósito intermedio, el líquido *entrará* en éste; pero si la altura piezométrica en $J$ está por debajo de la superficie libre del depósito intermedio, el líquido *saldrá* de él. Las pérdidas menores pueden expresarse en longitudes equivalentes y añadirse a las longitudes de las tuberías.



Se llega a la solución suponiendo una cierta altura piezométrica en el nudo, calculando entonces $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ y sustituyendo en la ecuación de continuidad. Si el caudal en el nudo es demasiado grande, debe suponerse una altura piezométrica mayor, con lo que se reducirá el caudal de llegada y se aumentará el de salida.

***Ejemplo 10.7*** En la Fig. 10.8 calcular los caudales de agua a 15° C y con los siguientes datos para las tuberías y alturas de los depósitos: $L_1 = 3.000$ m, $D_1 = 1$ m, $\epsilon_1/D_1 = 0{,}0002$; $L_2 = 600$ m, $D_2 = 0{,}5$ m, $\epsilon_2/D_2 = 0{,}002$; $L_3 = 1.200$ m, $D_3 = 0{,}75$ m, $\epsilon_3/D_3 = 0{,}001$, $z_1 = 30$ m, $z_2 = 18$ m, $z_3 = 9$ m.

Suponiendo $z_J + p_J/\gamma = 20$ m, resulta

$$30 - 20 = 10 = f_1 \frac{3000}{1}\frac{V_1^2}{2g} \qquad f_1 = 0{,}014 \qquad V_1 = 2{,}16 \text{ m/seg} \qquad Q_1 = 1{,}70 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$20 - 18 = 2 = f_2 \frac{600}{0{,}5}\frac{V_2^2}{2g} \qquad f_2 = 0{,}024 \qquad V_2 = 1{,}17 \text{ m/seg} \qquad Q_2 = 0{,}23 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$20 - 9 = 11 = f_3 \frac{1200}{0{,}75}\frac{V_3^2}{2g} \qquad f_3 = 0{,}020 \qquad V_3 = 2{,}60 \text{ m/seg} \qquad Q_3 = 1{,}15 \text{ m}^3/\text{seg}$$

así, pues, el caudal que entra es mayor que el que sale, ya que

$$1{,}70 - 0{,}23 - 1{,}15 = 0{,}32 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Suponiendo $z_J + p_J/\gamma = 22$ m, resulta

$$30 - 22 = 8 = f_1 \frac{3000}{1}\frac{V_1^2}{2g} \qquad f_1 = 0{,}015 \qquad V_1 = 1{,}87 \text{ m/seg} \qquad Q_1 = 1{,}47 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$22 - 18 = 4 = f_2 \frac{600}{0{,}5}\frac{V_2^2}{2g} \qquad f_2 = 0{,}024 \qquad V_2 = 1{,}65 \text{ m/seg} \qquad Q_2 = 0{,}32 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$22 - 9 = 13 = f_3 \frac{1200}{0{,}75}\frac{V_3^2}{2g} \qquad f_3 = 0{,}020 \qquad V_3 = 2{,}82 \text{ m/seg} \qquad Q_3 = 1{,}25 \text{ m}^3/\text{seg}$$

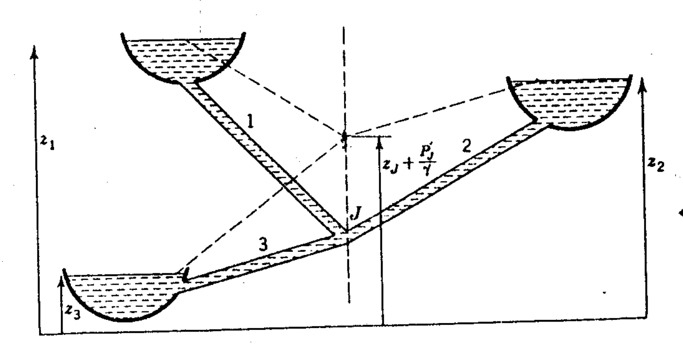



*Fig. 10.8 Tres depósitos interconectados.*

El caudal de salida sobrepasa al de entrada en 0,10 $m^3$/seg. Haciendo una interpolación lineal, $z_J + p_J/\gamma = 21{,}52$ m, y

$$30 - 21{,}52 = 8{,}48 = f_1 \frac{3000}{1} \frac{V_1^2}{2g} \qquad f_1 = 0{,}015 \qquad V_1 = 1{,}92 \text{ m/seg}$$

$Q_1 = 1{,}51$ $m^3$/seg

$$21{,}52 - 18 = 3{,}52 = f_2 \frac{600}{0{,}5} \frac{V_2^2}{2g} \qquad f_2 = 0{,}024 \qquad V_2 = 1{,}55 \text{ m/seg}$$

$Q_2 = 0{,}30$ $m^3$/seg

$$21{,}52 - 9 = 12{,}52 = f_3 \frac{1200}{0{,}75} \frac{V_3^2}{2g} \qquad f_3 = 0{,}020 \qquad V_3 = 2{,}77 \text{ m/seg}$$

$Q_3 = 1{,}22$ $m^3$/seg

y como el caudal que sale solo se diferencia del de entrada en 0,01 $m^3$/seg, pueden tomarse estos valores como solución del problema.

Problemas más complejos de tuberías ramificadas se resuelven por el mismo método de ensayos sucesivos. Es importante que únicamente se haga una hipótesis independiente, puesto que de otra manera la convergencia de la solución se dejaría al azar. La Fig. 10.9 ilustra sobre un problema de cuatro depósitos con dos uniones. Suponiendo una altura piezométrica en un nudo, por ejemplo, en $J_1$, el caudal a través de las tuberías 1 y 2 se puede determinar. Después, por la ecuación de continuidad se obtiene el caudal entre los dos nudos y se puede calcular la altura piezométrica en $J_2$. Se comprueba la hipótesis viendo si el caudal por las tuberías 3 y 4 satisface la ecuación de continuidad en $J_2$. Si no es así, debe hacerse una nueva hipótesis respecto a la altura piezométrica en $J_1$ y repetir el proceso. El sentido en que debe hacerse la corrección es generalmente obvio.

Cuando desde un depósito se bombea a otros dos o más depósitos como en la Fig. 10.10, deben conocerse las características de funcionamiento de la bomba. Suponiendo que la bomba gira a velocidad constante, su altura depende únicamente del caudal. Un procedimiento conveniente es el siguiente:

1. Suponer para la bomba un caudal.
2. Calcular la altura piezométrica a la entrada de la bomba.
3. Utilizando la curva característica de la bomba, encontrar la altura que ésta origina y añadírsela a la altura piezométrica a la entrada.

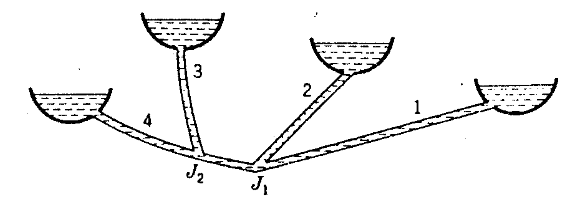



*Fig. 10.9* Cuatro depósitos con dos nudos.





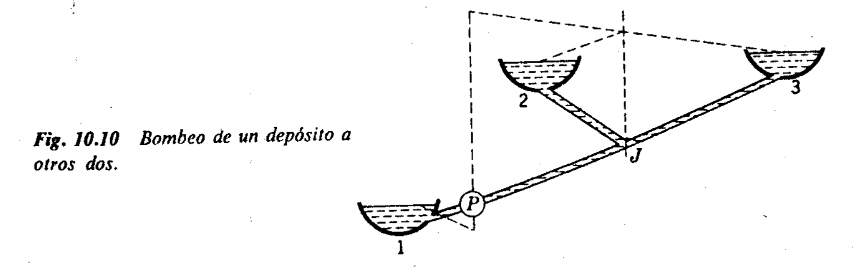



*Fig. 10.10* Bombeo de un depósito a otros dos.

4. Calcular el descenso de altura piezométrica en el nudo $J$, y determinar la altura piezométrica allí.
5. Para esta altura calcular el caudal que entra en los depósitos 2 y 3.
6. Si el caudal que entra por $J$ iguala al que sale por $J$, el problema está resuelto. Si el caudal que entra en $J$ es demasiado grande debe suponerse que la bomba dé un caudal menor y ha de repetirse el proceso.

## 10.6 Red de tuberías

Se llama *red de tuberías* a una serie de tuberías conectadas de tal manera que el caudal que sale por una salida dada puede proceder de diversos circuitos. Los problemas de redes son, en general, muy complicados y requieren recurrir a ensayos en los cuales los circuitos elementales se compensan de uno en uno hasta que todas las condiciones que debe satisfacer la corriente fluida se cumplen.

Las condiciones que deben cumplirse en una red de tuberías son las siguientes:

1. La suma algebraica de las caídas de presión alrededor de cada circuito debe ser nula.
2. El caudal que llega a cada uno debe ser igual al que sale de él.
3. La fórmula de Darcy-Weisbach debe cumplirse en cada tubería,

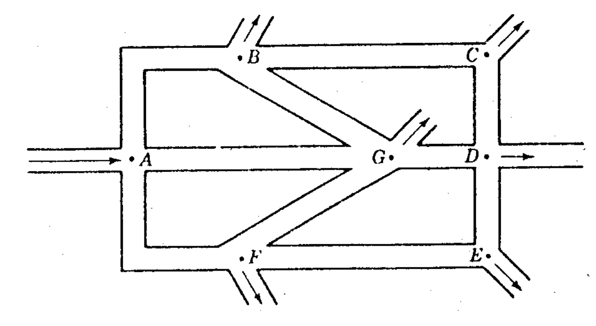



*Fig. 10.11* Red de tuberías.

es decir, existe una relación entre la pérdida de energía y el caudal que debe satisfacerse en cada tubería.

La primera condición establece que la caída de presión entre dos puntos cualesquiera del circuito, por ejemplo, $A$ y $G$ (Fig. 10.11), debe ser la misma si se calcula a través de la tubería $AG$ o a través de $AFEDG$. La segunda condición es la ecuación de continuidad

La forma de Darcy-Weisbach se sustituye por una fórmula exponencial. Expresando $f$ en función de $V$ para una tubería y un fluido dados, la fórmula de Darcy-Weisbach puede reducirse a

$$h_f = rQ^n \tag{10.6.1}$$

***Ejemplo 10.8*** Determinar la fórmula exponencial para una corriente de agua a 15° C a través de una tubería de acero fundido limpio de 150 mm de diámetro para un intervalo de velocidades de 1 a 3 m/seg.

Primeramente se determina $f$ para 1 m/seg y para 3 m/seg. Utilizando el diagrama de Moody, $\epsilon/D = 0{,}0017$. Para 1 m/seg, $f = 0{,}024$, y para 3 m/seg, $f = 0{,}023$. Por tanto,

$$f = 0{,}024 \qquad Q = 1 \times \frac{\pi}{4} 0{,}15^2 = 0{,}0177 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$f = 0{,}023 \qquad Q = 3 \times \frac{\pi}{4} 0{,}15^2 = 0{,}0531 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Sustituyendo en la

$$f = aQ^b$$

resulta

$$0{,}024 = a(0{,}0177)^b \qquad 0{,}023 = a(0{,}0531)^b$$

Dividiendo las dos ecuaciones,

$$\frac{0{,}024}{0{,}023} = \left(\frac{177}{531}\right)^b \qquad b = -0{,}0387 \qquad a = 0{,}0224$$

Por consiguiente,

$$f = 0{,}0224Q^{-0{,}0387}$$

Sustituyendo en la ecuación de Darcy Weisbach resulta

$$\frac{h_f}{L} = \frac{fQ^2}{2gD^5(\pi/4)^2} = \frac{16 \times 0{,}0224}{19{,}6 \times 0{,}15^5 \times 3{,}14^2} Q^{1{,}9613} = 24{,}4Q^{1{,}9613}$$

Si la tubería es de 1.000 m de longitud, $h_f = 24.400Q^{1{,}9613}$



Como en la práctica no pueden resolverse los problemas de redes de tuberías analíticamente, suelen utilizarse métodos de aproximaciones sucesivas. Con el método de Hardy Cross† se supone que el caudal en cada tubería es tal que se satisface la ecuación de continuidad en cada nudo. A continuación se calcula una corrección del caudal en cada circuito y se aplica para hacer que los circuitos estén compensados.

Las pérdidas menores se incluyen como longitudes equivalentes en cada tubería. Con la ecuación de la pérdida de carga, $h_f = rQ^n$, en la que $r$ y $n$ se han determinado para cada tubería, el método se aplica como sigue:

1. Se supone una distribución de caudales que satisfaga la ecuación de continuidad y que después de un cuidadoso examen de la red se presuma que es la mejor.
2. Se calcula la pérdida de altura en cada tubería $h = rQ^n$. Se calcula la pérdida de altura alrededor de cada circuito: $\Sigma h = \Sigma rQ^n$ (que debe de ser cero para cada circuito compensado).
3. Se calcula para cada circuito: $\Sigma\, |nrQ^{n-1}|$ (todos los términos se consideran positivos).
4. Se establece para cada circuito un caudal correctivo $\Delta Q$ para compensar la altura en el circuito (para $\Sigma rQ^n = 0$):

$$\Delta Q = \frac{\Sigma rQ^n}{\Sigma\, |nrQ^{n-1}|} \tag{10.6.2}$$

5. Se calculan los caudales corregidos en cada tubería y se repite el proceso hasta conseguir la precisión deseada.

Se conoce que la solución es correcta cuando todas las condiciones se satisfacen para cada circuito. El término correctivo se obtiene como sigue:

Para cualquier tubería,

$$Q = Q_0 + \Delta Q$$

siendo $Q$ el caudal corregido, $Q_0$ el caudal supuesto e $\Delta Q$ la corrección. Por tanto, para cada tubería:

$$h = rQ^n = r(Q_0 + \Delta Q)^n = r(Q_0^n + nQ_0^{n-1}\,\Delta Q + \cdots)$$

Si $\Delta Q$ es pequeño comparado con $Q_0$, todos los términos de la serie después del segundo pueden despreciarse. Entonces, para un circuito,

$$\Sigma h = \Sigma rQ^n = \Sigma rQ_0^n + \Delta Q\; \Sigma rnQ_0^{n-1} = 0$$

en la cual $\Delta Q$ ha salido factor común de la suma porque es el mismo para

† Hardy Cross, Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors, *Univ. Illinois Bull. 286*, noviembre 1946.

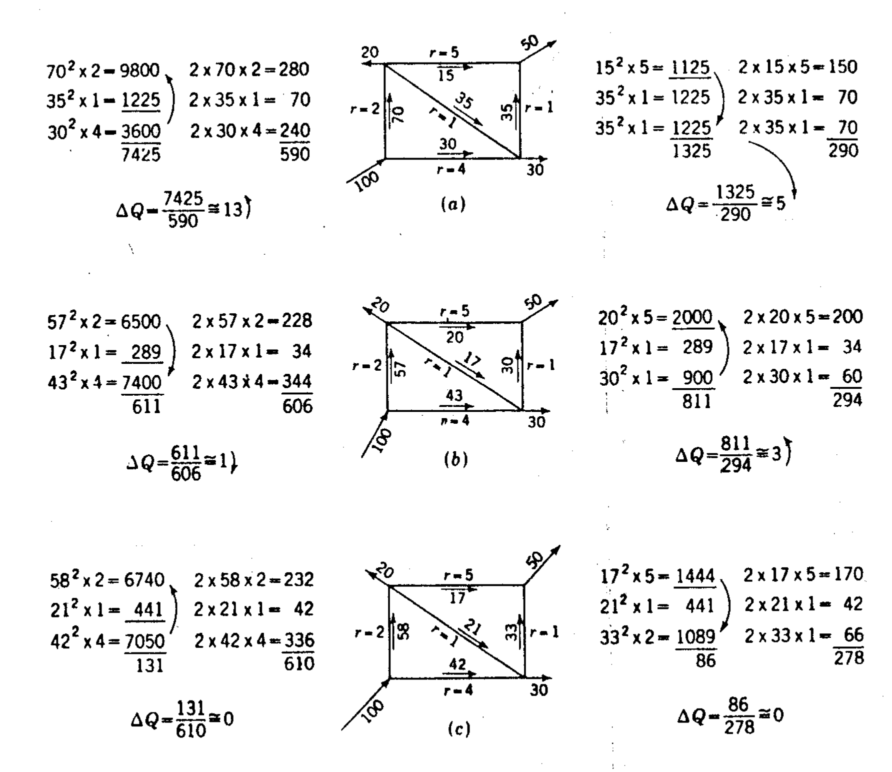



***Fig. 10.12*** *Solución de una distribución de caudales en una red sencilla.*

todas las tuberías del circuito. Despejando $\Delta Q$,

$$\Delta Q = \frac{\Sigma r Q_0^n}{\Sigma \left| r n Q_0^{n-1} \right|}$$

Cuando $\Delta Q$ se aplica a un circuito tiene el mismo sentido en todas las tuberías, es decir, se suma a los caudales que tienen dirección contraria a las agujas del reloj y se resta a los de la misma dirección que las agujas del reloj. Como $\Delta Q$ tiene dentro de sí el signo, el denominador del término correctivo es la suma de los valores absolutos de los términos.

Los valores de $r$ están en el numerador y en el denominador; por tanto, pueden usarse valores proporcionales a los valores reales de $r$. Análogamente, las distribuciones de los caudales pueden expresarse como un porcentaje de los caudales reales. Para encontrar una determinada pérdida de altura tienen que usarse los valores reales de $r$ y $Q$ después de que la verdadera distribución de caudales se haya encontrado.



*Ejemplo 10.9* Se desea saber la distribución de caudales a través de la red de la Fig. 10.12, para los caudales de entrada y salida dados. Para simplificar, se ha dado a $n$ el valor 2,0.

La distribución supuesta se muestra en el diagrama $a$. En la parte superior izquierda se calculan los términos $\Sigma r Q^n$ para el circuito inferior. Los términos correspondientes a caudales con el mismo sentido de las agujas del reloj se escriben en primer lugar y se separan con una raya de los de sentido contrario; una flecha trazada a la derecha, hacia los términos mayores, muestra la dirección de la corrección $\Delta Q$. Próximo al diagrama, a la izquierda, está el cálculo de $\Sigma \left| n r Q^{n-1} \right|$. El diagrama $b$ da la distribución después de que ambos circuitos han sido corregidos una vez. El diagrama $c$ muestra los valores correctos de la distribución con aproximación del 1 por 100, lo que es una precisión mayor que la que pueden dar las ecuaciones exponenciales usadas para calcular las pérdidas de altura.

## 10.7 Conductos de sección no circular

Hasta ahora en este capítulo solamente se han considerado tuberías circulares. Para secciones no circulares puede aplicarse la fórmula de Darcy-Weisbach apareciendo el radio hidráulico $R$ en lugar del diámetro $D$. El concepto del *radio hidráulico R* permite tratar las secciones no circulares de forma análoga a las circulares. El radio hidráulico se define como el cociente del área de la sección por el *perímetro mojado*. Por tanto, para una sección circular,

$$R = \frac{\text{área}}{\text{perímetro}} = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4} \tag{10.7.1}$$

y el diámetro es equivalente a $4R$. Si el diámetro se remplaza por $4R$ en la fórmula de Darcy-Weisbach, en el número de Reynolds y en la rugosidad relativa,

$$h_f = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g} \qquad \mathbf{R} = \frac{V 4 R \rho}{\mu} \qquad \frac{\epsilon}{D} = \frac{\epsilon}{4R} \tag{10.7.2}$$

pueden tratarse las secciones no circulares de manera análoga a las circulares. El diagrama de Moody se aplica como anteriormente. Las hipótesis establecidas para llegar a las Ecs. (10.7.2) no cabe esperar que sirvan para secciones de formas raras, pero sirven, desde luego, para secciones cuadradas, ovales, triangulares y parecidas.

*Ejemplo 10.10* Determinar qué pérdida de altura en centímetros de agua es necesaria para que un caudal de 300 m³/min de aire a 15° C y 1,1 kg/cm² pase a tra-

vés de una tubería de hierro galvanizado de sección rectangular de 0,6 × 0,3 m, y de 60 m de longitud.

$$R = \frac{0,6 \times 0,3}{1,8} = 0,1 \text{ m} \qquad \frac{\epsilon}{4R} = \frac{0,0152}{4 \times 10} = 0,00038$$

$$V = \frac{300}{60 \times 0,6 \times 0,3} = 27,78 \text{ m/seg} \qquad V4[R(\text{cm})] = 27,78 \times 4 \times 10 = 1.111$$

$f = 0,017$

Por tanto,

$$h_f = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} = \frac{0,017 \times 60}{4 \times 0,1}\frac{27,78^2}{19,6} = 100,2 \text{ m}$$

El peso específico del aire es $\gamma = 1,222 \times 1,1/1,033 = 1,30$ kg/m³. En centímetros de agua, la pérdida de altura es

$$\frac{1,30 \times 100,2}{1000} \times 100 = 13,02 \text{ cm}$$

## 10.8 Envejecimiento de las tuberías

El diagrama de Moody, usando los valores de la rugosidad absoluta que se dan en el recuadro inferior izquierdo, sirve para tuberías nuevas y limpias. Con el uso las tuberías se hacen más rugosas debido a la corrosión, a las incrustaciones y al depósito de materiales en sus paredes. La velocidad a la que varía el coeficiente de rozamiento con el tiempo depende del fluido que se transporta. Colebrook y White† han encontrado que la rugosidad absoluta aumenta linealmente con el tiempo:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha t \tag{10.8.1}$$

siendo $\epsilon_0$ la rugosidad absoluta de la superficie nueva. Se necesita hacer experiencias para determinar $\alpha$.

*Ejemplo 10.11* Después de 12 años de servicio de una tubería de acero forjado de 500 mm de diámetro tiene una caída de presión de 0,35 kg/cm² en 1000 m cuando conduce un caudal de 0,196 m³/seg de agua de 15° C. Estimar la pérdida para 1000 m y un caudal de 0,3 m³/seg de agua después de 20 años de servicio.

† C. F. Colebrook y C. M. White, The Reduction of Carrying Capacity of Pipes with Age, *J. Inst. Civil Engrs. London*, 1937.



Del diagrama de Moody se deduce que cuando está nueva $\epsilon_0 = 0,0046$ cm. A los 12 años:

$$V = \frac{0,196 \times 4}{\pi \times 0,5^2} = 1 \text{ m/seg} \qquad h_f = \frac{0,35 \times 10^4}{10^3} = 3,5 \text{ m}$$

y

$$f = \frac{h_f}{(L/D)V^2/2g} = \frac{3,5}{(1000/0,5)(1/19,6)} = 0,034$$

y del diagrama de Moody $\epsilon/D = 0,007$, $\epsilon = 0,007 \times 0,5 = 0,0035$. Calculando $\alpha$ a partir de la Ec. (10.8.1),

$$\alpha = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{t} = \frac{0,0035 - 0,000046}{12} = 0,000288 \text{ m/año}$$

Después de 20 años de servicio,

$$\epsilon = 0,000046 + 20 \times 0,000288 = 0,006 \text{ m}$$

Para 0,3 m³/seg, $V = 1,53$ m/seg, $VD$ (cm) $= 76,5$, $\epsilon/D = 0,012$, $f = 0,04$, e

$$\Delta p = 0,04\frac{1000}{0,5}\frac{1,53^2}{19,6}10^3 = 9550 \text{ kg/m}^2 = 0,955 \text{ kg/cm}^2 \text{ en 1000 m}$$

## Problemas

**10.1** Dibujar las líneas de altura piezométricas y de alturas totales para la Figura 10.13. $H = 7,2$ m.

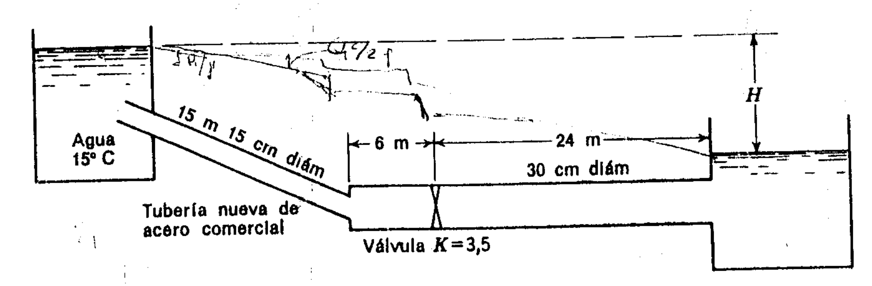



*Fig. 10.13*

**10.2** Calcular el valor de $K$ para la válvula de la Fig. 10.13 de forma que el caudal desaguado en el Prob. 10.1 se reduzca a la mitad. Dibujar esquemáticamente las líneas de altura o energía total y la de altura piezométrica.

***10.3*** Calcular el caudal del sistema de la Fig. 10.14. Dibujar las líneas de alturas piezométricas y de alturas totales.

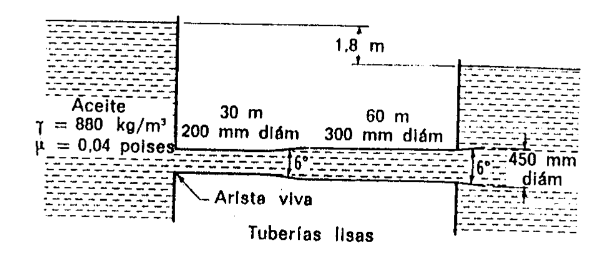



***Fig. 10.14***

***10.4*** ¿Qué carga se necesita en la Fig. 10.14 para que el caudal sea de 280 l/seg?

***10.5*** Calcular el caudal del sifón de la Fig. 10.15 sin el difusor cónico. $H = 1,2$ m.

***10.6*** Calcular el caudal en el sifón de la Fig. 10.15 para $H = 2,4$ m. ¿Qué valor tiene la mínima presión en el sistema?

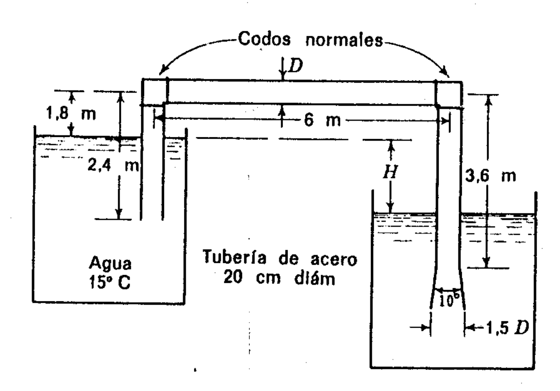



***Fig. 10.15***

***10.7*** Hallar el caudal del sifón de la Fig. 10.16. ¿Cuál es la presión en $A$? Calcular la presión mínima en el sistema.

***10.8*** Despreciando las pérdidas menores, aparte las de la válvula, dibujar la línea de alturas piezométricas de la Fig. 10.17. La válvula esférica tiene un coeficiente de pérdida $K = 4,5$.

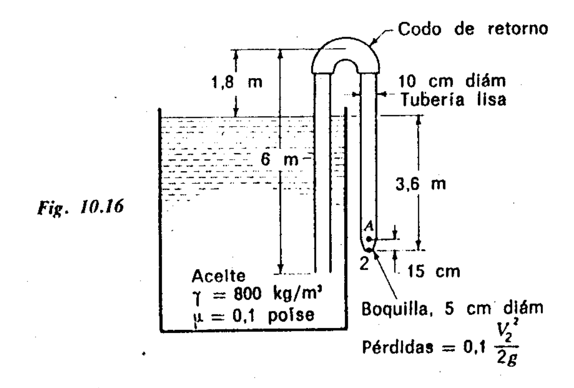
***10.9*** ¿Cuál es la altura máxima del punto $A$ (Fig. 10.17) para que no haya cavitación? La altura barométrica es 760 mm de mercurio.

***10.10*** Dos depósitos están conectados mediante tres tuberías de acero comercial unidas en serie, $L_1 = 300$ m, $D_1 = 20$ cm; $L_2 = 360$ m, $D_2 = 30$ cm; $L_3 = 1.200$ m, $D_3 = 45$ cm. Para $Q = 90$ l/seg de agua a 21° C, determinar la diferencia de cotas entre los dos depósitos.

***10.11*** Resolver el Prob. 10.10 por el método de las longitudes equivalentes.



***Fig. 10.16***




***10.12*** En el Prob. 10.10, para una diferencia de cotas de 9 m, determinar el caudal determinando los coeficientes de rozamiento.

***10.13*** Para una diferencia de altura de 12 m en el Prob. 10.10, determinar el caudal por el método de las longitudes equivalentes.

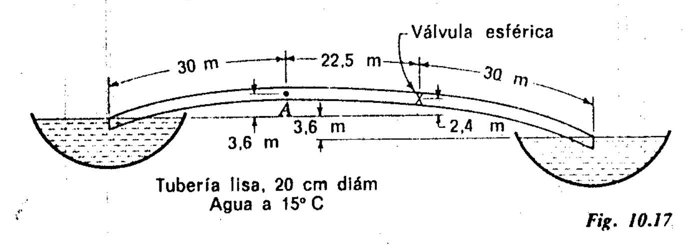



***Fig. 10.17***

***10.14*** ¿Cuál ha de ser el diámetro de una tubería lisa para transportar 380 l/min de queroseno, a 32° C, 150 m con una altura de carga de 5 m? Existe una válvula y otras pérdidas menores con un coeficiente $K$ global igual a 7,6.

***10.15*** Se conduce aire a presión atmosférica y 15° C a través de dos tuberías horizontales ($\epsilon = 0,018$ m) en serie. La primera tubería es de 120 m de longitud y de 600 mm de diámetro; la segunda, de 30 m de longitud y de 900 mm de diámetro. Estimar la longitud equivalente de una tubería lisa de 450 mm de diámetro. Despreciar las pérdidas menores.

***10.16*** ¿Qué caída de presión, medida en centímetros de agua, se producirá en el Prob. 10.15 para un caudal de 170 m³/min? Incluir las pérdidas debidas al ensanchamiento brusco.

***10.17*** Entre dos depósitos están conectadas en paralelo dos tuberías: $L_1 = 2.400$ m, $D_1 = 120$ cm, $f_1 = 0,026$; $L_2 = 2.400$ m, $D_2 = 105$ cm, $\epsilon_2 = 0,0009$ m. Determinar el caudal de agua a 21° C que pasa entre los dos depósitos para una diferencia de alturas de los niveles de agua de 3,6 m.

***1.18*** Para un caudal de 4,5 m³/seg en el sistema del Prob. 10.17, determinar la diferencia de cotas entre las superficies libres de los dos depósitos.

***10.19*** Están conectadas en paralelo tres tuberías lisas: $L_1 = 12$ m, $D_1 = 13$ mm, $L_2 = 18$ m, $D_2 = 26$ mm, $L_3 = 15$ m, $D_3 = 18$ mm. Para un flujo total de aceite de $\gamma = 880$ kg/m³, $\mu = 0,65$ poise, de 115 l/min, ¿cuál es la caída de la línea de alturas piezométricas entre las uniones?

*10.20* Determinar el caudal que circula por el sistema de la Fig. 10.18 para $L = 600$ m, $D = 45$ cm, $\epsilon = 0{,}00045$ m y $H = 7{,}5$ m. La bomba $A$ tiene las características dadas en la figura.

*10.21* Determinar el caudal en el sistema de la Fig. 10.18 para $L = 1.200$ m, $D = 60$ cm de tubería lisa, $H = 12$ m con las características de la bomba $B$.

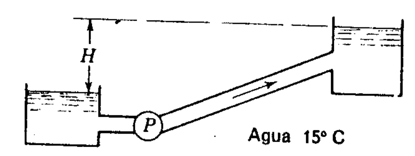
*10.22* Construir una tabla de altura-caudal-rendimiento para las bombas $A$ y $B$ (Fig. 10.18) conectadas en serie.

*10.23* Construir una tabla de altura-caudal-rendimiento para las bombas $A$ y $B$ (Fig. 10.18) conectadas en paralelo.

*10.24* Determinar el caudal a través del sistema de la Fig. 10.18, para las bombas $A$ y $B$ colocadas en serie; 1500 m de tubería nueva de fundición de 30 cm de diámetro, y $H = 30$ m.

*10.25* Determinar la potencia necesaria para mover las bombas $A$ y $B$ del Problema 10.24.

*10.26* Determinar el caudal que circula por el sistema de la Fig. 10.18 por las bombas $A$ y $B$ dispuestas en paralelo; 1500 m de tubería de acero de 45 cm de diámetro, y $H = 9$ m.




Bomba $A$

| $H_m$ | $Q_{l/seg}$ | e % |
|---|---|---|
| 21 | 0 | 0 |
| 18 | 56,6 | 59 |
| 16,5 | 72,5 | 70 |
| 15 | 85,8 | 76 |
| 13,5 | 97,8 | 78 |
| 12 | 108,2 | 76,3 |
| 10,5 | 116,0 | 72 |
| 9 | 124,0 | 65 |
| 7,5 | 129,8 | 56,5 |
| 6 | 133,9 | 42 |

Bomba $B$

| $H_m$ | $Q_{l/seg}$ | e % |
|---|---|---|
| 24 | 0 | 0 |
| 21 | 73,6 | 54 |
| 18 | 111,5 | 70 |
| 15 | 140,2 | 80 |
| 12 | 161,2 | 73 |
| 9 | 173,7 | 60 |
| 6 | 176,5 | 40 |

*Fig. 10.18*

*10.27* Determinar la potencia necesaria para mover las bombas del Problema 10.26.

*10.28* En la Fig. 10.19, para $H = 12$ m, encontrar el caudal que circula por cada una de las tuberías. $\mu = 0{,}08$ poises; $\gamma = 961$ kg/m³.

*10.29* Hallar $H$ en la Fig. 10.19 para un caudal de 30 l/seg, $\mu = 0{,}05$ poise, $\rho = 90$ UTM/m³.

*10.30* Encontrar la longitud equivalente de tubería nueva de fundición de



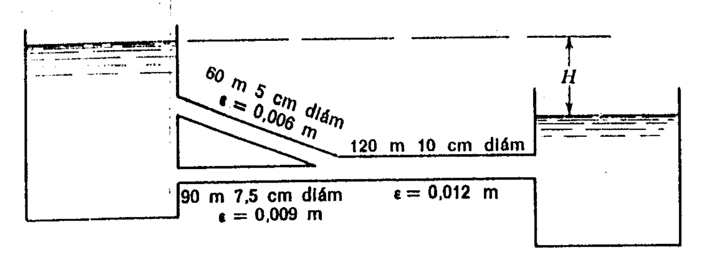



*Fig. 10.19*

30 cm de diámetro que remplace al sistema de la Fig. 10.20. Para $H = 9$ m, ¿cuál es el caudal?

*10.31* Calcular el caudal en las tuberías del sistema de la Fig. 10.20, si por la tubería de 20 cm la velocidad es 1 m/seg, así como la altura $H$ necesaria.

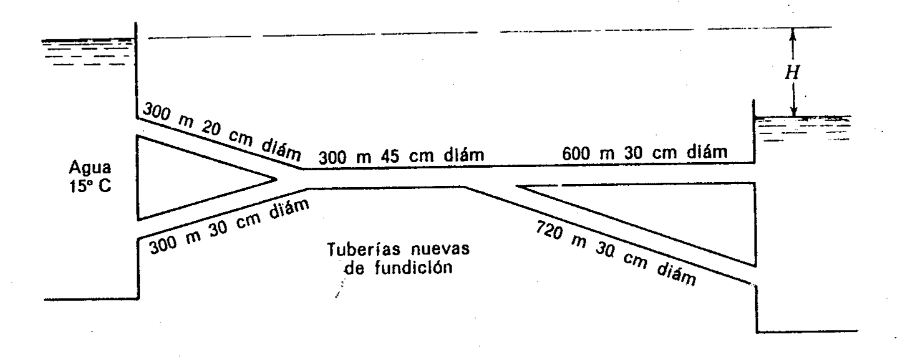



*Fig. 10.20*

*10.32* Determinar el caudal que circula a través del sistema de la Fig. 10.21, cuando se quite la bomba.

*10.33* Si el caudal $Q$ hacia el nudo $J$ vale 85 l/seg en la Fig. 10.21, calcular los caudales hacia $B$ y $A$ y la altura piezométrica en $J$.

*10.34* En la Fig. 10.21 la bomba está transfiriendo al fluido 10 CV (hacia $J$). Encontrar $Q_A$ y $Q_B$.

*10.35* Con la bomba $A$ de la Fig. 10.18 en el sistema de la Fig. 10.21 hallar $Q_A$, $Q_B$ y la altura en $J$ de la línea de alturas piezométricas.

*10.36* Con la bomba $B$ de la Fig. 10.18 en el sistema de la Fig. 10.21, determinar el caudal que circula hacia $B$ y la cota de la línea de alturas piezométricas en $J$.

*10.37* Para un caudal de 30 l/seg hacia $B$ en la Fig. 10.21, ¿qué altura produce la bomba? Para un rendimiento de la bomba de 0,70, ¿qué potencia se necesita?

*10.38* Encontrar el caudal a través del sistema de la Fig. 10.22, cuando no existe ninguna bomba.

*10.39* Con las bombas $A$ y $B$ de la Fig. 10.18 colocadas en paralelo en el sistema

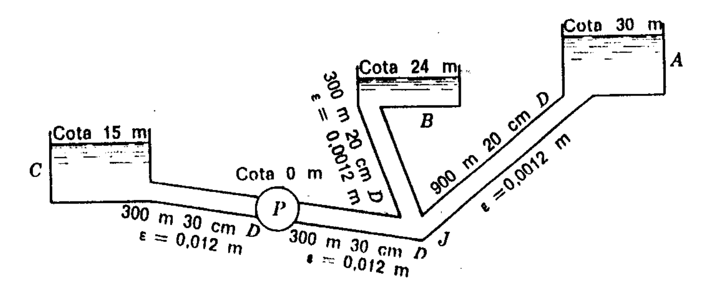



*Fig. 10.21*

de la Fig. 10.22, hallar el caudal hacia $B$, $C$ y $D$ y la altura de la línea de alturas piezométricas en $J_1$ y $J_2$.

***10.40*** Calcular el caudal a través de cada una de las tuberías de la red mostrada en la Fig. 10.23. $n = 2$.

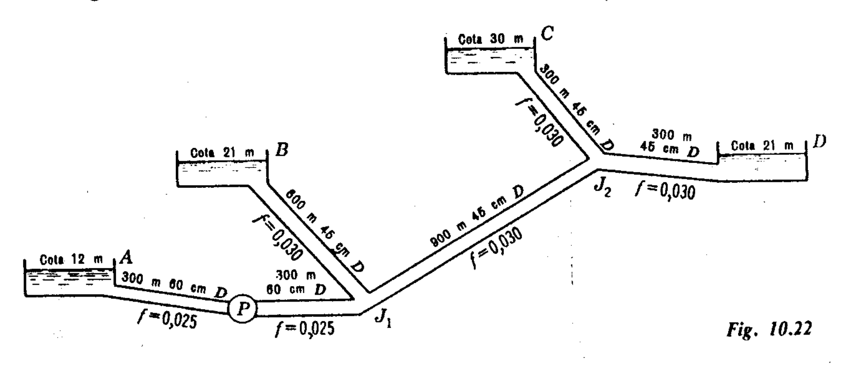
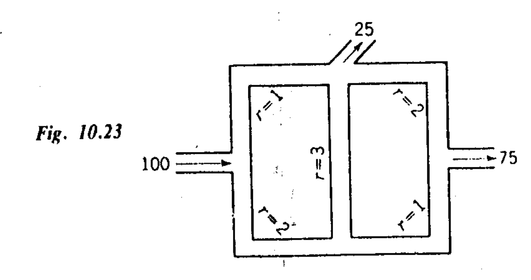



*Fig. 10.22*

***10.41*** Determinar el caudal a través de cada una de las tuberías de la Fig. 10.24. $n = 2$.

***10.42*** Encontrar la distribución a través de la red de la Fig. 10.23, para $n = 1$.

*Fig. 10.23*

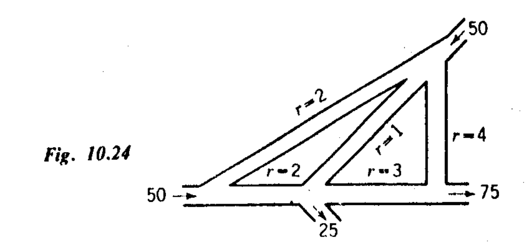



***10.43*** Encontrar la distribución a través de la red de la Fig. 10.24, para $n = 1$.

***10.44*** Determinar la pendiente de la línea de alturas piezométricas para un flujo de aire atmosférico a 27° C a través de un conducto de sección rectangular de 45 por 15 cm de hierro galvanizado. $V = 9$ m/seg.



*Fig. 10.24*




***10.45*** ¿Qué dimensiones tendrá un conducto cuadrado para que transporte 300 l/seg de agua a 15° C con una pendiente de la línea de alturas piezométricas de 0,001? $\epsilon = 0{,}0001$.

***10.46*** Calcular el caudal de aceite, densidad relativa 0,85, $\mu = 0{,}04$ poises, que circula a través de 100 m de un conducto de chapa metálica de sección rectangular de 5 por 10 cm, cuando la pérdida de carga es de 2 m. $\epsilon = 0{,}0015$ cm.

***10.47*** Un conducto de sección recta un triángulo equilátero de lado 30 cm lleva 180 l/seg de agua a 15° C. $\epsilon = 0{,}001$ m. Calcular la pendiente de la línea de alturas piezométricas.

***10.48*** Una tubería nueva de fundición de 60 cm de diámetro, por la que circula agua, tiene una rugosidad absoluta doble al final de 5 años de servicio. Calcular la pérdida de carga, por 1000 m de tubería, para un caudal de 450 l/seg, cuando la tubería lleva funcionando 25 años.

***10.49*** Una tubería nueva de 45 cm de diámetro tiene un $f$ de 0,020 cuando lleva agua a 15° C y a 1,5 m/seg. A los 10 años $f = 0{,}029$ para $V = 0{,}9$ m/seg. Hallar $f$ para $V = 1{,}2$ m/seg al cabo de 20 años.

***10.50*** La línea de alturas piezométricas

(*a*) está siempre por encima de la línea de alturas totales;
(*b*) está siempre por encima de una conducción cerrada;
(*c*) cae siempre hacia aguas abajo en la dirección de la corriente;
(*d*) dista la altura de velocidad por debajo de la línea de alturas totales;
(*e*) sube en la dirección de la corriente cuando la tubería está inclinada en sentido descendente hacia aguas abajo.

***10.51*** Para calcular el caudal en los problemas de tuberías en serie se utiliza la ecuación de la energía junto con la de continuidad para obtener una expresión que contiene $V^2/2g$ y $f_1, f_2$, etc. El siguiente paso consiste en suponer un valor de

(*a*) $Q$ (*b*) $V$ (*c*) **R** (*d*) $f_1, f_2, \ldots$ (*e*) ninguna de las magnitudes anteriores.

***10.52*** Un sistema de tuberías se dice que es equivalente a otro sistema cuando las dos siguientes cantidades son en ambas iguales:

(*a*) $h, Q$ (*b*) $L, Q$ (*c*) $L, D$ (*d*) $f, D$ (*e*) $V, D$

***10.53*** En los problemas de tuberías en paralelo:

(*a*) las pérdidas de altura a través de cada tubería se suman para obtener las pérdidas de energía total;

(*b*) el caudal es el mismo a través de las diversas tuberías;
(*c*) la pérdida de altura es la misma a través de cada tubería;
(*d*) puede obtenerse directamente el caudal a través de cada tubería cuando se conoce el caudal total;
(*e*) no es necesario ensayar soluciones.

*10.54* Los problemas de tuberías ramificadas se resuelven

(*a*) analíticamente utilizando tantas ecuaciones como incógnitas;
(*b*) por el método de Hardy Cross de corrección de los caudales supuestos;
(*c*) por longitudes equivalentes;
(*d*) suponiendo una distribución que satisface a la ecuación de continuidad y calculando a continuación la corrección;
(*e*) suponiendo una altura piezométrica en el nudo y haciendo ensayos para que se satisfaga la ecuación de continuidad.

*10.55* En las redes de tuberías

(*a*) la pérdida de altura alrededor de cada circuito elemental debe ser nula;
(*b*) la pérdida de energía por unidad de tiempo en todos los circuitos debe ser la misma;
(*c*) se supone una altura piezométrica en cada nudo;
(*d*) los circuitos elementales se sustituyen por tuberías equivalentes;
(*e*) se suponen coeficientes de rozamiento en cada tubería.

*10.56* Las siguientes cantidades se calculan usando $4R$ en lugar del diámetro en los casos de secciones no circulares:

(*a*) velocidad, rugosidad relativa;
(*b*) velocidad, pérdida de carga;
(*c*) número de Reynolds, rugosidad relativa, pérdida de altura;
(*d*) velocidad, número de Reynolds, coeficiente de rozamiento;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*10.57* La experiencia demuestra que en el envejecimiento de las tuberías

(*a*) el coeficiente de rozamiento aumenta linealmente con el tiempo;
(*b*) la tubería se hace más lisa con el uso;
(*c*) la rugosidad absoluta aumenta linealmente con el tiempo;
(*d*) ninguna tendencia apreciable puede encontrarse;
(*e*) la rugosidad absoluta disminuye con el tiempo.

# 11

# *Flujo permanente en canales abiertos*

En este capítulo se han seleccionado para su estudio varios asuntos relacionados con el flujo en canales abiertos. Ya se han tratado antes de ahora el flujo permanente y uniforme en la Sec. 5.9, la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento al resalto hidráulico en la Sec. 3.12 y los vertederos en la Sec. 8.6. En este capítulo se empieza por clasificar el flujo en canales abiertos, se estudia después la *forma* óptima de la sección de un canal, a continuación el resalto hidráulico y su utilización en los cuencos protectores, seguido de los conceptos de energía específica y profundidad crítica que son de utilidad para el estudio del régimen gradualmente variable. Se estudian también los perfiles de la superficie libre del agua que se clasifican y se relacionan con las secciones de control del canal, las transiciones con una especial aplicación al procedimiento de aforo por la profundidad crítica.

La mecánica del flujo en canales abiertos es más complicada que la del flujo en conductos cerrados, debido a la existencia de una superficie libre. La línea de alturas piezométricas coincide con la superficie libre y, en general, su posición es desconocida.

Para que se dé el flujo laminar, la sección debe ser extremadamente pequeña, la velocidad muy pequeña o la viscosidad cinemática extremadamente grande. Un ejemplo de flujo laminar es el de una delgada capa de fluido que fluye por un plano inclinado o vertical. Este caso se estudia siguiendo los métodos desarrollados en el Cap. 5 (ver Prob. 5.10). El flujo en la tubería tiene un número de Reynolds crítico más bajo, de 2000, y este mismo valor se puede aplicar a un canal abierto cuando se sustituye el diámetro $D$ por $4R$. $R$ es el radio hidráulico, que se define como el área de la sección recta del canal dividida por el perímetro mojado. En el margen del número de Reynolds, basado en la sustitución de $D$ por $R$, $\mathbf{R} = VR/\nu < 500$ para flujo laminar, $500 < \mathbf{R} < 2000$ para flujo *de transición* y que puede ser laminar o turbulento y $\mathbf{R} > 2000$ para flujo generalmente turbulento.

En canales abiertos el líquido que fluye es generalmente agua y el flujo es turbulento. Los métodos de análisis del flujo en canales abiertos no están tan desarrollados como los del flujo en conductos cerrados.

Las fórmulas que se utilizan suponen que la turbulencia es completa y que la pérdida de energía es proporcional al cuadrado de la velocidad. Aunque en la práctica todas las experiencias en canales abiertos se han hecho con agua, las fórmulas pueden utilizarse con bastante aproximación para otros líquidos de pequeña viscosidad. En este capítulo nos referimos exclusivamente al flujo turbulento.

## *11.1 Clasificación de flujo*

El agua fluye por canales abiertos de una gran variedad de formas, desde el agua que corre por la superficie de un campo arado en un día de fuerte lluvia, hasta el caso del agua que corre por un canal prismático a profundidad constante. El flujo puede clasificarse en permanente y no permanente o variable, uniforme y no uniforme. El *flujo permanente y uniforme* se presenta en canales inclinados, muy largos, de sección recta constante, en aquellas regiones donde se ha alcanzado la «velocidad final», es decir, donde la pérdida de energía debida al flujo turbulento es exactamente proporcionada por la reducción de la energía potencial debida a la disminución uniforme de altura de la solera del canal. La profundidad del flujo permanente y uniforme se llama *profundidad normal*. En flujo permanente y uniforme el caudal y la profundidad son constantes en todas partes a lo largo de la longitud del canal. Varias fórmulas se utilizan para determinar la relación entre la velocidad media, la forma de la sección recta, su tamaño y rugosidad y la pendiente o inclinación del fondo o solera del canal (Sección 5.9).

El *flujo permanente y no uniforme* se presenta en cualquier canal irregular en el que el caudal no varía con el tiempo; también se presenta en canales regulares cuando la profundidad de la corriente y, por consiguiente, la velocidad media, varía de una sección recta a otra. En el caso de un cambio gradual en la profundidad o en la sección, llamado *flujo gradualmente no uniforme*, existen métodos, por integración numérica o de cálculo tramo a tramo, para calcular la profundidad de la corriente para caudal, dimensiones y rugosidad del canal conocidas y unas condiciones dadas en una cierta sección recta. En aquellas zonas de un canal donde se producen cambios pronunciados en la velocidad y en la profundidad en una corta distancia, como en una transición de una sección transversal a otra, se hacen con frecuencia estudios recurriendo a modelos semejantes. El *resalto hidráulico* es un ejemplo de flujo permanente y no uniforme que se estudia en las Secciones 3.12 y 11.4.

El *flujo uniforme y variable* raramente se presenta en canales abiertos. El *flujo no uniforme y variable* es muy frecuente, pero es extremadamente difícil de analizar. El movimiento de las olas es un ejemplo de este tipo de flujo, cuyo análisis es complejo cuando se considera el rozamiento. Las *ondas* positivas y negativas, en un canal rectangular, se estudian en las Secs. 12.9 y 12.10 despreciando los efectos del rozamiento.



El flujo se clasifica también en *tranquilo* (o *lento*) y *rápido*. Cuando el flujo tiene lugar a pequeñas velocidades de tal forma que una pequeña perturbación puede desplazarse hacia aguas arriba y así cambiar las condiciones de aguas arriba, se dice que es tranquilo† (o lento) ($\mathbf{F} < 1$). Las condiciones de aguas arriba vienen afectadas por las condiciones de aguas abajo y el flujo es controlado por las condiciones de aguas abajo. Cuando el flujo tiene lugar a tan alta velocidad que una pequeña perturbación, tal como una onda elemental, es arrastrada hacia aguas abajo, el flujo se considera como *torrencial o rápido* ($\mathbf{F} > 1$). Los pequeños cambios en las condiciones de aguas abajo no producen ninguna variación en las condiciones de aguas arriba; por consiguiente, el flujo está controlado por las condiciones de aguas arriba. Cuando el flujo es tal que su velocidad es exactamente igual a la velocidad de una onda elemental, se dice que es crítico ($\mathbf{F} = 1$).

### *Distribución de velocidades*

La velocidad del líquido en contacto con una pared sólida debe ser cero, y en el flujo en canales abiertos la velocidad generalmente aumenta con la distancia a la pared. La velocidad máxima no se presenta en la superficie libre, sino por debajo de la superficie libre a una distancia de 0,05 a 0,25 de la profundidad. La velocidad media a lo largo de una línea vertical se determina a veces midiendo la velocidad a 0,6 de la profundidad, pero un método más conveniente consiste en tomar la media de las velocidades a 0,2 y 0,8 de la profundidad, según las medidas del Departamento de Investigaciones Geológicas de los Estados Unidos (U. S. Geological Survey).

## *11.2 Sección hidráulica óptima de un canal*

Para un caudal, una pendiente y un coeficiente de rugosidad dados, algunas formas de secciones son mejores que otras. En general, cuando se construye un canal, la excavación, y posiblemente la alineación, se deben amortizar. Basándose en la fórmula de Manning se demuestra que cuando el área de la sección recta es un mínimo, el perímetro mojado también es un mínimo, por tanto, la excavación y la alineación tienden a su valor mínimo para iguales dimensiones del canal. Para un tipo de sección, se llama *sección hidráulica óptima* la que tiene el menor perímetro mojado, o su equivalente, la menor área. La fórmula de Manning es

$$Q = \frac{0{,}823}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \tag{11.2.1}$$

† Ver la Sec. 4.4 para la definición y el estudio del número de Froude F.

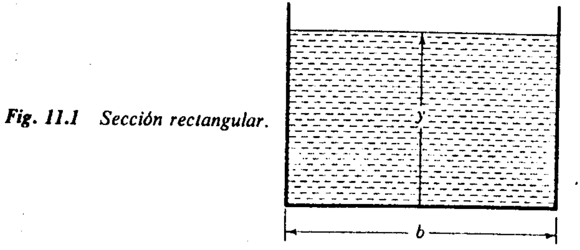



*Fig. 11.1* Sección rectangular.

siendo $Q$ el caudal ($m^3$/seg), $A$ la sección del flujo ($m^2$), $R$ (área dividida por el perímetro mojado $P$) el radio hidráulico (m), $S$ la pendiente de la línea de alturas totales y $n$ el coeficiente de rugosidad de Manning (Tabla 5.2, Sec. 5.9). Con $Q$, $n$ y $S$ conocidos, la Ec. (11.2.1) puede escribirse:

$$A = cP^{2/5} \tag{11.2.2}$$

en la cual $c$ es conocido. Esta ecuación demuestra que $P$ es un mínimo cuando $A$ es un mínimo. Para encontrar la sección hidráulica óptima para un canal *rectangular* (Fig. 11.1) $P = b + 2y$ y $A = by$. Por tanto,

$$A = (P - 2y)y = cP^{2/5}$$

eliminando $b$. El valor de $y$ que hace $P$ mínimo se encuentra derivando respecto a $y$:

$$\left(\frac{dP}{dy} - 2\right)y + P - 2y = \frac{2}{5}cP^{-3/5}\frac{dP}{dy}$$

Haciendo $dP/dy = 0$, $P = 4y$, y como $P = b + 2y$,

$$b = 2y \tag{11.2.3}$$

Es decir, la profundidad es la mitad de la anchura de la solera, con independencia del tamaño de la sección rectangular.

Para encontrar la sección *trapezoidal* hidráulica óptima (Fig. 11.2) $A = by + my^2$, $P = b + 2y\sqrt{1 + m^2}$. Eliminando $b$ y $A$ entre estas ecuaciones y la Ec. (11.2.2)

$$A = by + my^2 = (P - 2y\sqrt{1 + m^2})y + my^2 = cP^{2/5} \tag{11.2.4}$$

Haciendo $m$ constante y derivando respecto a $y$, e igualando $\partial P/\partial y$ a cero, resulta:

$$P = 4y\sqrt{1 + m^2} - 2my \tag{11.2.5}$$



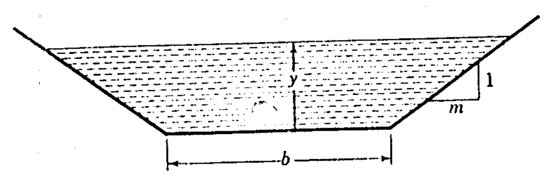



*Fig. 11.2* Sección trapezoidal.

Haciendo ahora $y$ constante, derivando la Ec. (11.2.4) con respecto a $m$, e igualando $\partial P/\partial m$ a cero, se obtiene:

$$\frac{2m}{\sqrt{1 + m^2}} = 1$$

Despejando $m$:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

y sustituyendo $m$ en la Ec. (11.2.5):

$$P = 2\sqrt{3}\,y \qquad b = 2\frac{\sqrt{3}}{3}y \qquad A = \sqrt{3}\,y^2 \tag{11.2.6}$$

lo cual demuestra que $b = P/3$ y, por consiguiente, que los lados inclinados tienen la misma longitud que la solera. Como arc tg $m = 30°$, la sección óptima es la semihexagonal. Para secciones trapezoidales con un cierto $m$ (máxima pendiente para la cual la tierra húmeda no se desmorona) la Ec. (11.2.5) debe utilizarse para encontrar la relación entre el ancho de la solera y la profundidad.

La sección hidráulica óptima de todas las posibles secciones rectas de canales abiertos es el semicírculo

***Ejemplo 11.1*** Determinar las dimensiones de la sección más económica de un canal trapezoidal de ladrillo que ha de conducir 200 $m^3$/seg con una pendiente de la solera de 0,0004.

De la Ec. (11.2.6),

$$R = \frac{A}{P} = \frac{y}{2}$$

y sustituyendo en la Ec. (11.2.1),

$$200 = \frac{0{,}823}{0{,}013}\sqrt{3}\,y^2\left(\frac{y}{2}\right)^{2/3}\sqrt{0{,}0004}$$

de donde

$$y^{8/3} = 144{,}7 \qquad y = 6{,}46 \text{ m}$$

y de la Ec. (11.2.6), $b = 7{,}46$ m.

### 11.3 Flujo permanente uniforme en un aliviadero de crecida

Un problema práctico de canales abiertos de cierta importancia es el cálculo del caudal en las márgenes previstas para las riadas (Fig. 11.3). En general, las márgenes son mucho más rugosas que el lecho del río, y su profundidad (y radio hidráulico) es mucho menor. La pendiente de la línea de alturas totales debe ser la misma para ambas partes. Se determina separadamente el caudal para cada parte, utilizando la línea de trazos de la Fig. 11.3 como línea de separación de las dos secciones (pero no como contorno sólido), y entonces se suman los caudales para determinar la capacidad total del sistema.

Como ambas secciones tienen la misma pendiente, el caudal se puede expresar de la forma

$$Q_1 = K_1\sqrt{S} \qquad Q_2 = K_2\sqrt{S}$$

o sea

$$Q = (K_1 + K_2)\sqrt{S} \tag{11.3.1}$$

donde el valor de $K$ es

$$K = \frac{0{,}823}{n} AR^{2/3}$$

a partir de la fórmula de Manning y es solo función de la profundidad para un canal dado con rugosidad fija. Calculando $K_1$ y $K_2$ para alturas distintas de la superficie de agua, se puede tomar su suma y representarla en función de la altura. De este gráfico es fácil determinar la pendiente de la línea de alturas totales para una profundidad y un caudal dados por la Ec. (11.3.1).

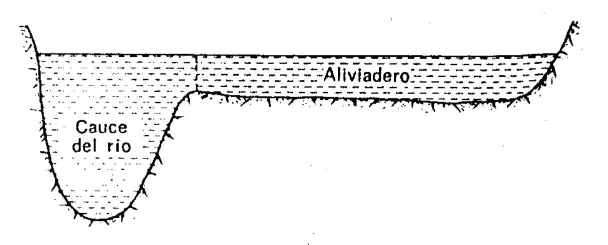



*Fig. 11.3 Sección recta de un aliviadero de crecida.*



### 11.4 Resalto hidráulico. Cuencos protectores

Las relaciones entre las variables $V_1$, $y_1$, $V_2$, $y_2$ de un resalto hidráulico en un canal rectangular horizontal se han deducido en la Sec. 3.12. Otra forma de determinar las profundidades conjugadas para un caudal dado es el método de la $F + M$. La ecuación de la cantidad de movimiento aplicada al cuerpo libre líquido entre las secciones 1 y 2 (Fig. 11.4) es, para anchura unidad ($V_1y_1 = V_2y_2 = q$),

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \rho q(V_2 - V_1) = \rho V_2^2 y_2 - \rho V_1^2 y_1$$

Y ordenando convenientemente,

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} + \rho V_1^2 y_1 = \frac{\gamma y_2^2}{2} + \rho V_2^2 y_2 \tag{11.4.1}$$

o sea:

$$F_1 + M_1 = F_2 + M_2 \tag{11.4.2}$$

en la que $F$ es la fuerza hidrostática en la sección y $M$ la cantidad de movimiento que por segundo atraviesa la sección. La expresión $F + M$ para un caudal dado por unidad de ancho $q$ es

$$F + M = \frac{\gamma y^2}{2} + \frac{\rho q^2}{y} \tag{11.4.3}$$

que se puede llevar a un gráfico tomando $F + M$ como abscisa e $y$ como ordenada (Fig. 11.5) para el caudal $q = 1$ (m³/seg)m. Cualquier línea vertical corta a la curva en dos puntos que tienen el mismo valor de $F + M$; por consiguiente, éstos dan profundidades conjugadas. El valor de $y$ que hace $F + M$ mínimo [se obtiene derivando la Ec. (11.4.3) con respecto a $y$ e igualando la derivada a cero] es

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{11.4.4}$$

El resalto se presenta siempre pasando de una profundidad menor que este valor a una profundidad mayor. Esta profundidad se llama profundidad *crítica*, y según se verá en la sección siguiente es la profundidad de energía mínima. Es decir, el resalto se presenta siempre pasando el flujo de rápido a tranquilo. El hecho de que en el resalto haya una pérdida de energía mecánica elimina cualquier posibilidad de que se pueda pasar bruscamente de la profundidad conjugada más alta a la más baja.

Las profundidades conjugadas están ligadas directamente a los números

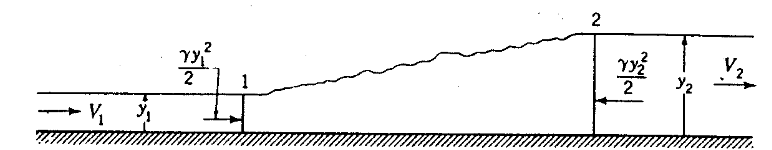



*Fig. 11.4 Resalto hidráulico en un canal rectangular horizontal.*

de Froude de antes y después del resalto:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{V_1^2}{gy_1} \qquad \mathbf{F}_2 = \frac{V_2^2}{gy_2} \tag{11.4.5}$$

Por la ecuación de continuidad,

$$V_1^2 y_1^2 = g\mathbf{F}_1 y_1^3 = V_2^2 y_2^2 = \mathbf{F}_2 y_2^3$$

o sea:

$$\mathbf{F}_1 y_1^3 = \mathbf{F}_2 y_2^3 \tag{11.4.6}$$

De la Ec. (11.4.1):

$$y_1^2\left(1 + 2\frac{V_1^2}{gy_1}\right) = y_2^2\left(1 + 2\frac{V_2^2}{gy_2}\right)$$

Y sustituyendo las Ecs. (11.4.5) y (11.4.6),

$$(1 + 2\mathbf{F}_1)\mathbf{F}_1^{-2/3} = (1 + 2\mathbf{F}_2)\mathbf{F}_2^{-2/3} \tag{11.4.7}$$

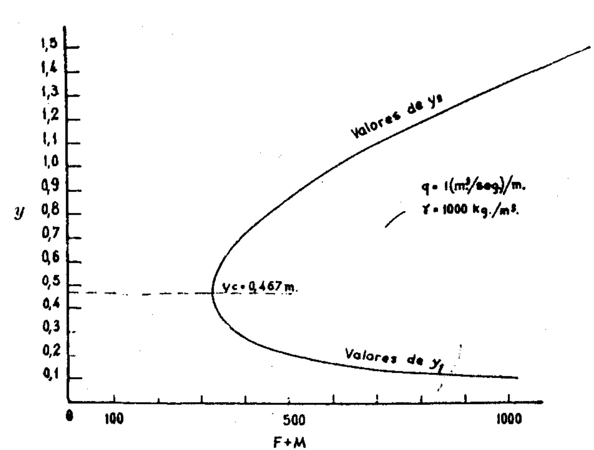



*Fig. 11.5 Curva F + M para un resalto hidráulico.*



El valor de $\mathbf{F}_2$ en función de $\mathbf{F}_1$ se obtiene por la ecuación del resalto hidráulico (3.12.20):

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + 2\frac{V_1^2 y_1}{g}}$$

o sea:

$$2\frac{y_2}{y_1} = -1 + \sqrt{1 + 8\frac{V_1^2}{gy_1}}$$

Utilizando las Ecs. (11.4.5) y (11.4.6)

$$\mathbf{F}_2 = \frac{8\mathbf{F}_1}{(\sqrt{1 + 8\mathbf{F}_1} - 1)^3} \tag{11.4.8}$$

El número de Froude antes del resalto es siempre mayor que la unidad, y después del resalto es siempre menor que la unidad.

### *Cuencos protectores*

Un cuenco protector es una estructura para disipar la energía útil del flujo que se sitúa al pie de una presa de aliviadero (azud), o a la salida de una tubería o canal de una presa. En la mayoría de las instalaciones existentes, el resalto se aloja dentro del cuenco protector, y sirve para disipar la energía. Este estudio se limita a canales rectangulares con soleras horizontales, aunque en algunos casos se usan soleras inclinadas para ahorrar excavaciones. En un amplio y documentado trabajo† realizado por personal del Bureau of Reclamation, de los Estados Unidos, se han clasificado los resaltos hidráulicos desde el punto de vista de la disipación de la energía en función del número de Froude $\mathbf{F}_1(V_1^2/gy_1)$ a la entrada del canal como sigue:

De $\mathbf{F}_1 = 1$ a 3. Ondas estacionarias. Tan solo hay una pequeña diferencia entre las profundidades conjugadas. Cerca de $\mathbf{F}_1 = 3$ se desarrollan una serie de remolinos en rodillo.

De $\mathbf{F}_1 = 3$ a 6. Prerresalto. La superficie del agua es totalmente lisa, la velocidad es perfectamente uniforme y la pérdida de energía es baja. No se necesitan dados si se ha previsto una longitud conveniente para la solera.

De $\mathbf{F}_1 = 6$ a 20. Transición. Acción oscilante del chorro desde el fondo del cuenco hasta la superficie. Cada oscilación produce una gran

† *Hydraulic Lab. Rept.* n.° Hyd-399, Research Study on Stilling Basins, Energy Dissipators, and Associated Appurtenances, progress report II, U. S. Bur. Reclamation, Denver, 1 junio 1955. En este informe se definía el número de Froude como $V/\sqrt{gy}$.

onda de periodo irregular que puede desplazarse hacia aguas abajo varios kilómetros y que deteriora las orillas de tierra y escolleras. Siempre que sea posible es conveniente evitar este intervalo de números de Froude en el proyecto de los cuencos protectores.

De $\mathbf{F}_1 = 20$ a 80. Intervalo de resaltos buenos. El resalto está equilibrado y su acción es la deseada, siendo la absorción de energía del 45 al 70 por 100. Se utilizan dados y soleras dentadas para reducir la longitud del canal.

De $\mathbf{F}_1 = 80$ en adelante. Resalto de buen rendimiento pero revuelto. La disipación de energía alcanza 85 por 100. Otros tipos de cuencos protectores pueden ser más económicos.

Dados protectores se usan frecuentemente a la entrada del cuenco para ondular la corriente fluida. Se sitúan regularmente espaciados con hendiduras alrededor, iguales a la anchura del dado. Soleras con muretes triangulares o dentados se emplean frecuentemente en el extremo de aguas abajo del cuenco para ayudar a mantener el resalto dentro del cuenco, permitiendo que éste pueda ser más corto.

El cuenco debe ser recubierto con hormigón de la mejor calidad para prevenir los peligros de la erosión y de la cavitación. No pueden consentirse irregularidades en la solera o en las paredes del cuenco protector. La longitud del resalto, alrededor de $6y_2$, debe estar dentro del cuenco revestido, con buena escollera aguas abajo, si el material es fácilmente erosionable.

***Ejemplo 11.2*** Un resalto hidráulico se presenta aguas abajo de una compuerta de riego de 15 m de anchura. Antes del resalto la profundidad es de 1,5 m y la velocidad de 20 m/seg. Determinar: (***a***) los números de Froude antes y después del resalto; (***b***) la profundidad y la velocidad después del resalto, y (***c***) la potencia disipada por el resalto.

$$(a)\quad \mathbf{F}_1 = \frac{V_1^2}{gy_1} = \frac{20^2}{9{,}8 \times 1{,}5} = 27{,}2$$

Por la Ec. (11.4.8):

$$\mathbf{F}_2 = \frac{8 \times 27{,}2}{(\sqrt{1 + 8 \times 27{,}2} - 1)^3} = 0{,}0828$$

$$(b)\quad \mathbf{F}_2 = \frac{V_2^2}{gy_2} = 0{,}0828 \qquad V_2y_2 = 20 \times 1{,}5 = 30$$

entonces,

$$V_2^3 = 30 \times 9{,}8 \times 0{,}0828 = 24{,}34$$

y $V_2 = 2{,}9$ m/seg, $y_2 = 10{,}3$ m.



(*c*) Por la Ec. (3.12.21), la pérdida en el resalto, $h_j$, vale:

$$h_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} = \frac{(10{,}3 - 1{,}5)^3}{4 \times 1{,}5 \times 10{,}3} = 11 \text{ kgm/kg}$$

La potencia disipada vale:

$$\text{Potencia} = \frac{Q\gamma h_j}{75} = \frac{30 \times 15 \times 1.000 \times 11}{75} = 66.000 \text{ CV}$$

### *11.5 Energía específica, profundidad crítica*

La energía por unidad de peso, $E$, tomando como origen de alturas la solera del canal, se llama *energía específica*. Esta magnitud se usa en el estudio del flujo en canales abiertos, habiendo sido introducida por Bakhmeteff en 1911. Gráficamente se toma vertical y hacia arriba desde la solera del canal:

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{11.5.1}$$

En la Fig. 11.6 se ha representado la línea de energía específica en un caso particular. En un canal rectangular si $q$ es el caudal por unidad de anchura, será $Vy = q$,

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \tag{11.5.2}$$

Es interesante observar que la energía específica varía con la profundidad para un caudal constante (Fig. 11.7). Para pequeños valores de $y$ la curva se hace tangente al eje $E$ en el infinito, mientras que para grandes valores de $y$ la altura de velocidad es despreciable y la curva se aproxima a la línea de 45°, $E = y$, asintóticamente. La energía específica tiene un valor mínimo por debajo del cual un $q$ dado no se puede presentar. El valor de $y$ que hace $E$ mínimo se obtiene igualando a cero la

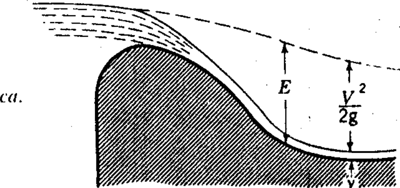



***Fig. 11.6*** *Ejemplo de energía específica.*

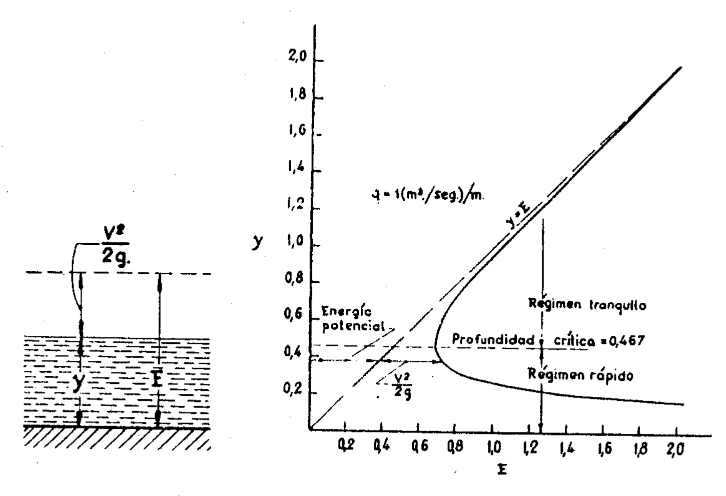



*Fig. 11.7 Energía específica necesaria para un caudal dado, a distintas profundidades.*

derivada $dE/dy$, calculada de la Ec. (11.5.2), haciendo $q$ constante:

$$\frac{dE}{dy} = 0 = 1 - \frac{q^2}{gy^3}$$

o sea:

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{11.5.3}$$

La profundidad de mínima energía, $y_c$, se llama *profundidad crítica*. Eliminando $q^2$ entre las Ecs. (11.5.2) y (11.5.3),

$$E_{min} = \tfrac{3}{2}y_c \tag{11.5.4}$$

que demuestra que la profundidad crítica es dos tercios de la energía específica. Eliminando $E$ entre las Ecs. (11.5.1) y (11.5.4),

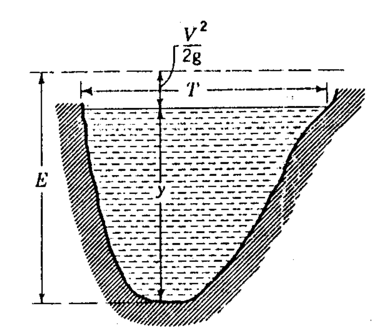
$$V_c = \sqrt{gy_c} \tag{11.5.5}$$

La velocidad del flujo en las condiciones críticas $V_c$ es $\sqrt{gy_c}$, que ya se ha usado en la Sec. 8.6 para el caso de vertedero de pared gruesa. Otro método de llegar a las condiciones críticas es determinando el máximo caudal $q$ que se puede obtener con una energía específica dada. Las fórmulas resultantes son las mismas Ecs. (11.5.3) a (11.5.5).

Para secciones rectas no rectangulares, como se ilustra en la Fig. 11.8,



*Fig. 11.8 Energía específica para una sección no rectangular.*




la ecuación de la energía específica toma la forma

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{11.5.6}$$

siendo $A$ el área de la sección recta. Para encontrar la profundidad crítica,

$$\frac{dE}{dy} = 0 = 1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy}$$

Según se deduce de la Fig. 11.8, la relación entre $dA$ y $dy$ se puede expresar por

$$dA = T\,dy$$

siendo $T$ la anchura de la sección recta en la superficie líquida. Con esta relación,

$$\frac{Q^2}{gA_c^3}T_c = 1 \tag{11.5.7}$$

La profundidad crítica debe satisfacer esta ecuación. Eliminando $Q$ entre las Ecs. (11.5.6) y (11.5.7)

$$E = y_c + \frac{A_c}{2T_c} \tag{11.5.8}$$

Esta ecuación demuestra que la energía mínima se presenta cuando la altura de velocidad es un medio de la profundidad media $A/T$. La Ec. (11.5.7) puede resolverse por aproximaciones sucesivas en el caso de secciones irregulares, llevando a un gráfico

$$f(y) = \frac{Q^2T}{gA^3}$$

La profundidad crítica se presenta para aquel valor de $y$ que hace $f(y) = 1$.

*Ejemplo 11.3* Determinar la profundidad crítica para un caudal de 8 m³/seg en un canal trapezoidal de ancho de solera 2 m y lados inclinados con $m = 1/2$.

$$A = 2y + \frac{y^2}{2} \qquad T = 2 + y$$

Por consiguiente,

$$f(y) = \frac{8^2(2 + y)}{9{,}8(2y + y^2/2)^3} = \frac{65{,}3(2 + y)}{(2y + 0{,}5y^2)^3}$$

Por aproximaciones:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 1$ | 3 | 2 | 2,5 | 2,1 | 2,12 | 2,11 |
| $f(y) = 3{,}08$ | 0,28 | 1,28 | 0,49 | 1,02 | 0,98 | 1,005 |

La profundidad crítica es 2,11 m.

En el flujo uniforme en un canal abierto la línea de altura total desciende manteniéndose paralela a la solera del canal, lo que demuestra que existe una disminución constante de energía total. La energía específica, sin embargo, permanece constante a lo largo del canal, puesto que $y + V^2/2g$ no cambia. En flujo no uniforme, la línea de altura total desciende siempre, es decir, la energía total disminuye, la energía específica puede aumentar o disminuir, según sea la pendiente de la solera del canal, el caudal, la profundidad de la corriente, la forma de la sección y la rugosidad de las paredes del canal. En la Fig. 11.6, la energía específica aumenta en la zona con solera de pendiente pronunciada y disminuye en la zona con solera horizontal.

Las relaciones de la energía específica y de la profundidad crítica son esenciales para el estudio del flujo gradualmente no uniforme y en la determinación de las secciones de control del flujo en canales abiertos.

Comparando las Figs. 11.5 y 11.7, que han sido ambas trazadas para $q = 1$ (m³/seg)/m, es fácil encontrar la pérdida de energía en el resalto hidráulico. Tomando dos valores de $y$ sobre una línea vertical en la curva de cantidad de movimiento y llevando gráficamente estos puntos a la curva de energía específica, se encuentra que el resalto pasa siempre a una profundidad de menor energía.

## 11.6 Flujo gradualmente no uniforme

El flujo gradualmente no uniforme es un flujo permanente y no uniforme de una clase especial. La profundidad, área, rugosidad, pendiente de la solera y radio hidráulico cambian muy lentamente (si varían algo) a



lo largo del canal. Se hace la hipótesis de que la pérdida de energía por unidad de longitud en una sección dada viene dada por la fórmula de Manning para el mismo caudal y profundidad, sin considerar las variaciones de la profundidad. Despejando en la Ec. (11.2.1) la pérdida de energía por unidad de longitud del canal, se obtiene:

$$S = -\frac{\Delta E}{\Delta L} = \frac{n^2Q^2}{2{,}22A^2R^{4/3}} \tag{11.6.1}$$

siendo $S$ la pendiente de la línea de alturas totales, o más exactamente, el seno del ángulo que la línea de alturas totales forma con la horizontal. En el flujo gradualmente no uniforme, las pendientes de las líneas de alturas totales, piezométricas y de la solera son diferentes. Los cálculos del flujo gradualmente no uniforme pueden hacerse por el *método de tramo a tramo* o por el de *integración numérica*. Los canales horizontales de gran anchura se estudian como un caso especial que puede integrarse numéricamente.

### *Método de cálculo tramo a tramo*

Aplicando la ecuación de la energía entre dos secciones separadas por una distancia finita, $\Delta L$, Fig. 11.9, incluyendo el término relativo a las pérdidas:

$$\frac{V_1^2}{2g} + S_0\,\Delta L + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + S\,\Delta L \tag{11.6.2}$$

Y despejando la longitud del tramo,

$$\Delta L = \frac{(V_1^2 - V_2^2)/2g + y_1 - y_2}{S - S_0} \tag{11.6.3}$$

Si se conocen las condiciones en una sección, por ejemplo, en la sección 1, y quiere calcularse la profundidad $y_2$ a una distancia $\Delta L$ de la sección 1, se necesita hacer ensayos. El procedimiento es el siguiente:

*Fig. 11.9 Flujo gradualmente no uniforme.*

1. Se supone una profundidad $y_2$; entonces se calculan $A_2$, $V_2$;
2. Para el $y_2$ supuesto y con el $y_1$ dado, se calculan unos valores medios de $y$, $P$, $A$ para el tramo de longitud $\Delta L$ [para canales prismáticos $y = (y_1 + y_2)/2$ con $A$ y $R$ calculados para esta profundidad] y se calcula $S$;
3. Se sustituyen valores en la Ec. (11.6.3) para calcular $\Delta L$;
4. Si $\Delta L$ no es correcto, se supone un nuevo $y_2$ y se repite el procedimiento.

*Ejemplo 11.4* En la sección 1 de un canal de sección recta trapezoidal $b_1 = 12$ m, $m_1 = 2$, $y_1 = 6$ m, $V_1 = 1$ m/seg, y en la sección 2, 150 m aguas abajo, la solera está 0,05 m más alta que en la sección 1, $b_2 = 15$ m y $m_2 = 3$. $n = 0{,}030$. Determinar la profundidad del agua en la sección 2.

$$A_1 = b_1 y_1 + m_1 y_1^2 = 12 \times 6 + 2 \times 6^2 = 72 = 144 \text{ m}^2$$
$$P_1 = b_1 + 2y_1\sqrt{m_1^2 + 1} = 12 + 2 \times 6\sqrt{2^2 + 1} = 38{,}8 \text{ m}$$

$$S_0 = -\frac{0{,}05}{150} = -0{,}00033$$

$$Q = V_1 A_1 = 1 \times 144 = 144 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Como la solera tiene una pendiente adversa, es decir, se eleva en la dirección de aguas abajo, y como la sección 2 es más ancha que la 1, $y_2$ es probablemente menor que $y_1$ para que $\Delta L$ sea positivo. Suponiendo $y_2 = 5{,}95$ m, entonces

$$A_2 = 5{,}95 \times 15 + 3 \times 5{,}95^2 = 195{,}3 \text{ m}^2$$

y

$$P_2 = 15 + 2 \times 5{,}95\sqrt{10} = 52{,}6 \text{ m}$$

El área media es $A = 169{,}65$ y el perímetro mojado medio es $P = 45{,}7$, que se utilizan para encontrar el radio hidráulico medio para el tramo, $R = 3{,}71$. Entonces,

$$S = \frac{n^2 Q^2}{0{,}677 A^2 R^{4/3}} = \left(\frac{0{,}03 \times 144}{169{,}65}\right)^2 \frac{1}{0{,}677 \times 3{,}71^{4/3}} = 0{,}000167$$

y

$$V_2 = \frac{144}{195{,}3} = 0{,}737$$

sustituyendo en la Ec. (11.6.3),

$$\Delta L = \frac{(1 - 0{,}737^2)/19{,}6 + 6 - 5{,}95}{0{,}000167 + 0{,}00033} = 147 \text{ m}$$

El valor de $y_2$ debe ser ligeramente menor, es decir, aproximadamente $y_2 = 5{,}94$ m.



*Método de integración numérica*

Un procedimiento más satisfactorio, particularmente para el flujo a través de canales que tienen una sección de forma constante y pendiente de solera constante, se obtiene planteando una ecuación diferencial con $L$ e $y$, procediendo a continuación a su integración. Considerando $\Delta L$ como un infinitésimo en la Fig. 11.9, la variación de altura total por unidad de longitud es igual a la pérdida de energía por unidad de longitud $-\Delta E/\Delta L$ dada por la Ec. (11.6.1), es decir:

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{V^2}{2g} + z_0 - S_0 L + y\right) = -\frac{n^2 Q^2}{2{,}22 A^2 R^{4/3}} \qquad (11.6.4)$$

siendo $z_0 - S_0 L$ la elevación de la solera del canal en la distancia $L$, y $z_0$ la elevación de la solera en $L = 0$. $L$ se mide como positivo en la dirección de aguas abajo. Derivando,

$$-\frac{V}{g}\frac{dV}{dL} + S_0 - \frac{dy}{dL} = \frac{n^2 Q^2}{2{,}22 A^2 R^{4/3}} \qquad (11.6.5)$$

Utilizando la ecuación de continuidad $VA = Q$ para eliminar $V$,

$$\frac{dV}{dL} A + V\frac{dA}{dL} = 0$$

Poniendo $dA = T\,dy$, en la que $T$ es la anchura de la sección en la superficie libre,

$$\frac{dV}{dL} = -\frac{VT}{A}\frac{dy}{dL} = -\frac{QT}{A^2}\frac{dy}{dL}$$

sustituyendo $V$ en la Ec. (11.6.5),

$$\frac{Q^2}{gA^3} T\frac{dy}{dL} + S_0 - \frac{dy}{dL} = \frac{n^2 Q^2}{2{,}22 A^2 R^{4/3}}$$

y despejando $dL$,

$$dL = \frac{1 - Q^2 T/gA^3}{S_0 - n^2 Q^2/2{,}22 A^2 R^{4/3}} dy \qquad (11.6.6)$$

Integrando,

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1 - Q^2 T/gA^3}{S_0 - n^2 Q^2/2{,}22 A^2 R^{4/3}} dy \qquad (11.6.7)$$

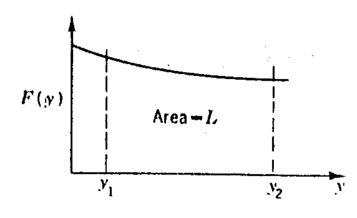



*Fig. 11.10 Integración numérica de la ecuación del flujo gradualmente no uniforme.*

en la cual $L$ es la distancia entre las dos secciones que tienen profundidades $y_1$ e $y_2$.

Cuando el numerador de la función integral es cero, el flujo es crítico, no hay cambios en $L$ al variar $y$ (despreciando la curvatura del flujo y la distribución de presiones no hidrostática en esa sección). Este caso no es de variación gradual de la profundidad y, por consiguiente, las anteriores ecuaciones no son exactas cuando las profundidades están próximas a su valor crítico. Cuando el denominador de la función a integrar es cero, el flujo se hace uniforme, no habiendo variación de la profundidad a lo largo del canal. El flujo está a su *profundidad normal.*

Para un canal de sección recta fija, siendo $n$ y $S_0$ constantes, la función a integrar es únicamente función de $y$.

$$F(y) = \frac{1 - Q^2T/gA^3}{S_0 - n^2Q^2/2{,}22A^2R^{4/3}}$$

y la ecuación puede integrarse numéricamente llevando a un gráfico $F(y)$ como ordenada e $y$ como abscisa. El área por debajo de la curva (Fig. 11.10) entre dos valores de $y$ es la longitud $L$ entre las secciones, puesto que

$$L = \int_{y_1}^{y_2} F(y)\, dy$$

tiene exactamente la misma forma que la integral $\int y\, dx$.

***Ejemplo 11.5*** Un canal trapezoidal $b = 3$ m, $m = 1$, $n = 0{,}012$, $S_0 = 0{,}001$, conduce un caudal de 28 m³/seg. Si la profundidad es de 3 m en la sección 1, determinar el perfil superficial del agua en los siguientes 500 m aguas abajo.

Para determinar si la profundidad aumenta o disminuye, se calcula la pendiente de la línea de altura total en la sección 1, Ec. (11.6.1):

$$A = by + my^2 = 3 \times 3 + 1 \times 3^2 = 18 \text{ m}^2$$
$$P = b + 2y\sqrt{m^2 + 1} = 11{,}48 \text{ m}$$

y

$$R = \frac{A}{P} = \frac{18}{11{,}48} = 1{,}57 \text{ m}$$

Entonces,

$$S = \frac{1}{0{,}677}\left(\frac{0{,}012 \times 28}{18}\right)^2 \frac{1}{(1{,}57)^{4/3}} = 0{,}000282$$




La profundidad es mayor que la crítica y $S < S_0$, por consiguiente, la energía específica aumenta, lo que puede conseguirse únicamente si aumenta la profundidad aguas abajo. Sustituyendo en la Ec. (11.6.7):

$$L = \int_3^y \frac{1 - 80T/A^3}{0{,}011 - 0{,}1665/A^2R^{4/3}}\, dy$$

En la siguiente tabla se dan los valores para el cálculo numérico de la integral:

| *y* | *A* | *P* | *R* | *T* | *Núm.* | $10^3$ × *Den.* | *F(y)* | *L* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 18 | 11,48 | 1,57 | 9,0 | 0,8765 | 7,18 | 1220 | 0 |
| 3,1 | 18,91 | 11,77 | 1,60 | 9,2 | 0,9812 | 7,51 | 1185 | 120,25 |
| 3,2 | 19,84 | 12,05 | 1,64 | 9,4 | 0,9038 | 7,81 | 1155 | 237,25 |
| 3,3 | 20,79 | 12,34 | 1,68 | 9,6 | 0,9143 | 8,07 | 1130 | 351,50 |
| 3,4 | 21,76 | 12,62 | 1,72 | 9,8 | 0,9238 | 8,29 | 1115 | 463,75 |
| 3,5 | 22,75 | 12,90 | 1,76 | 10,0 | 0,9320 | 8,47 | 1100 | 575,00 |

La integral puede calcularse dibujando la curva $F(y)$ y tomando el área situada por debajo, entre $y = 3$ y los siguientes valores de $y$. Como $F(y)$ no varía mucho en este ejemplo, puede utilizarse el valor medio de $F(y)$ para cada tramo, y, multiplicando por $\Delta y$, se obtiene la longitud del tramo. Entre $y = 3{,}1$ e $y = 3{,}1$,

$$\frac{1.220 + 1.185}{2} \times 0{,}1 = 120{,}25$$

y entre $y = 3{,}1$ e $y = 3{,}2$

$$\frac{1.185 + 1.154}{2} \times 0{,}1 = 116{,}9$$

y así sucesivamente. Como se conocen cinco puntos de la superficie del agua, se puede dibujar ésta aproximadamente.

### *Canales horizontales de gran anchura*

En los canales de gran anchura, el radio hidráulico es igual a la profundidad; y en los canales de solera horizontal $S_0 = 0$; por consiguiente, la Ec. (11.6.7) puede simplificarse. La anchura puede considerarse igual a la unidad, es decir, $T = 1$, $Q = q$ y $A = y$, $R = y$; así, pues,

$$L = -\int_{y_1}^{y} \frac{1 - q^2/gy^3}{n^2q^2/2{,}22y^{10/3}}\, dy \qquad (11.6.8)$$

y, después de integrar,

$$L = -\frac{0{,}512}{n^2q^2}\,(y^{13/3} - y_1^{13/3}) + \frac{0{,}0517}{n^2}\,(y^{4/3} - y_1^{4/3}) \qquad (11.6.9)$$

*Ejemplo 11.6* Después de contraerse bajo una compuerta el agua fluye en un ancho canal de solera horizontal con una velocidad de 10 m/seg y una profundidad de 0,5 m. Encontrar la ecuación del perfil de la superficie del agua. $n = 0{,}012$.

Por la Ec. (11.6.9) remplazando $L$ por $x$ como distancia desde la sección 1 donde $y_1 = 0{,}5$,

$$x = -\frac{0{,}1562}{(0{,}012 \times 5)^2}(y^{13/3} - 0{,}5^{13/3}) + \frac{0{,}0518}{0{,}012^2}(y^{4/3} - 0{,}5^{4/3})$$

$$= -140{,}8 - 43{,}4y^{13/3} + 360y^{4/3}$$

La profundidad crítica vale [Ec. (11.5.3)]

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left[\frac{5^2}{9{,}8}\right]^{1/3} = 1{,}37 \text{ m}$$

La profundidad debe aumentar hacia aguas abajo puesto que la energía específica disminuye y la profundidad debe tender hacia el valor crítico, que es el de energía mínima. La ecuación no sirve cerca de la profundidad crítica a causa de las aceleraciones verticales que se han despreciado en la deducción de las ecuaciones del flujo gradualmente no uniforme. Si se alcanza la profundidad crítica antes del final del canal, el flujo a alta velocidad aguas abajo de la compuerta se inunda por el agua del remanso. Entonces se debe comenzar el cálculo con la profundidad crítica en el extremo de aguas abajo del canal. Se puede producir un resalto como se estudió en la Sección 11.9.

Los diversos tipos de perfiles superficiales del agua que se obtienen en flujo gradualmente no uniforme se estudian en la Sección 11.8.

## 11.7 Cálculo mediante un calculador del flujo gradualmente variado

En la sección anterior se presentaron los métodos de tramo a tramo y el de integración numérica. Para secciones prismáticas es conveniente utilizar un calculador digital para evitarse los molestos cálculos de integración numérica. El Apéndice E.2 ilustra el uso de la regla de Simpson mediante un calculador. Con el ejemplo siguiente se aclara el empleo del calculador para un problema de flujo gradualmente variado.

*Ejemplo 11.7* Un canal trapezoidal en el que $B = 8$ ft, $M = 0{,}8$, tiene dos pendientes. La parte de aguas arriba tiene 2000 ft de largo, $S_0 = 0{,}04$, y la porción



```
         COMPUTATIONS FOR WATER SURFACE PROFILES IN A TRAPEZOIDAL
         CANNEL WITH ONE SLOPE CHANGE
         INTERNAL FUNCTION T.(YY)=B+2.*M*YY
         INTERNAL FUNCTION A.(YY)=(B+M*YY)*YY
         INTERNAL FUNCTION P.(YY)=B+2.*YY*SQRT.(M*M+1.)
         INTERNAL FUNCTION YNORM.(YY,SS)=1.-.*Q*N*N*P.(YY).P.1.333/
2         (2.22*SS*A.(YY).P.3.333)
         INTERNAL FUNCTION LEN.(YY,SS)=(1.-Q*Q*T.(YY)/(32.2*A.(YY)
2         .P.3))/(SS*YNORM.(YY,SS))
         INTEGER K,J
         DIMENSION (SO,YN)(2),(Y,L,EN)(200)
START    READ DATA
         PRINT RESULTS YR1,YR2,N,B,M,SO(1),SO(2),L1,L2
         CRITICAL DEPTH AND DISCHARGE DETERMINATION
         BB=3.*B-4.*M*YR1
         YC=(-BB+SQRT.(BB*BB+40.*M*B*YR1))/(10.*M)
         Q=SQRT.((A.(YC).P.3*32.2)/T.(YC))
         DETERMINATION OF NORMAL DEPTH
         THROUGH DEPTH ,FOR J=1,1,J.G.2
         UP=100.
         DN=0.
         THROUGH DEPTH,FOR K=1,1,K.G.10
         YN(J)=(UP+DN)/2.
```

*Fig. 11.11 Programa del computador para la solución del Ejemplo 11.7.*

```
              WHENEVER YNORM.(YN(J),SO(J)).G.Q.
              UP=YN(J)
              OTHERWISE
              DN=YN(J)
DEPTH         END OF CONDITIONAL
              PRINT RESULTS Q,YC,YN(1),YNORM.(YN(1),SO(1)),YN(2),YNORM.(YN
           2  (2),SO(2))
              WHENEVER YN(1).G.YC,TRANSFER TO START
               DETERMINATION OF PROFILES AND F+M
              L=0.
              DY=(YN(1)-YC)/80.
              THROUGH A1,FOR J=0,1,J.G.40.OR.L(J).GE.(L1-.01)
              Y(J)=YC+J*DY*2.
              L(J+1)=L(J)+(LEN.(Y(J),SO(1))+4.*LEN.(Y(J)+DY,SO(1))+LEN.(Y(J
           2  )+2.*DY,SO(1)))*DY/3.
              WHENEVER L(J+1).G.L1
              YJ     =Y(J)+2.*DY-2.*DY*(L(J+1)-L1)/(L(J+1)-L(J))
              L(J+1)=L1
              END OF CONDITIONAL
```



```
              WHENEVER J.E.40
              L(41)=L1
              YJ=YN(1)
A1            END OF CONDITIONAL
              THROUGH A2,FOR K=J,1,Y(K-1)-DY.G.YC
              Y(K)=YJ-DY*2.*(K-J)
              L(K+1)=L(K)-(LEN.(Y(K),SO(2))+4.*LEN.(Y(K)+DY,SO(2))+LEN.(Y(K
           2  )+2.*DY,SO(2)))*DY/3.
A2            FM(K)=62.4*(Y(K)*Y(K)*(2.*B+T.(Y(K)))/6.+Q*Q/(32.2*A.(Y(K))))
              L(K)=L1+L2
              Y(K)=YR2
              DY=(YN(2)-YC2)/80.
              THROUGH A3,FOR J=K  ,1,L(J).L.L1
              L(J+1)=L(J)+(LEN.(Y(J),SO(2))+4.*LEN.(Y(J)+DY,SO(2))+LEN.(Y(J
           2  )+2.*DY,SO(2)))*DY/3.
              FM(J)=62.4*(Y(J)*Y(J)*(2.*B+T.(Y(J)))/6.+Q*Q/(32.2*A.(Y(J))))
A3            Y(J+1)=Y(J)+2.*DY
              PRINT COMMENT $                                     DEPTH
           2        LENGTH                        FORCE + MOMENTUM$
              THROUGH A4,FOR K=0,1,K.G.J
              WHENEVER FM(K).L..1
              PRINT FORMAT$1H ,2F28.3*$,Y(K),L(K)
              OTHERWISE
              PRINT FORMAT$1H ,3F28.3*$,Y(K),L(K),FM(K)
A4            END OF CONDITIONAL
              TRANSFER TO START
              END OF PROGRAM
```

*Fig. 11.11 (Continuación.)*

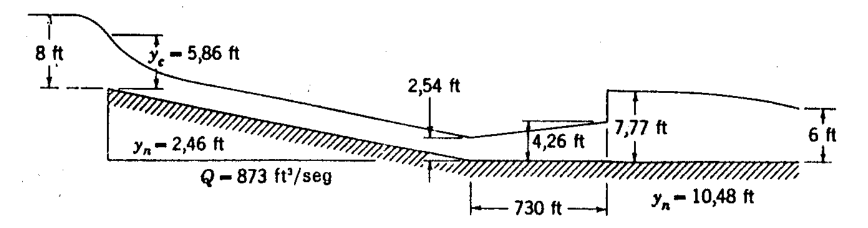



*Fig. 11.12 Solución del Ejemplo 11.7, obtenida del computador.*

aguas abajo, 1800 ft de largo con $S_0$ = 0,0002, $n$ = 0,012. En el extremo de aguas arriba hay un depósito que tiene un nivel 8 ft por encima del fondo del canal, y en el extremo aguas abajo del sistema la profundidad del agua es 6 ft. Despreciando pérdidas en la entrada del sistema, determinar (*a*) el caudal, la profundidad crítica y las profundidades normales; (*b*) el dato $F + M$ para la situación de un posible resalto, y (*c*) los perfiles de la superficie de agua a través del sistema, incluyendo la situación del resalto.

La profundidad crítica se produce en la entrada del sistema, por tanto se pueden hallar el caudal y la profundidad crítica aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie del depósito y el extremo aguas arriba del canal. Las profundidades normales se hallan usando el método de bisección para resolver la fórmula de Manning. Se emplea la regla de Simpson para calcular el perfil de la superficie de agua. El programa del calculador, que utiliza varias funciones internas de una proposición (Fig. 11.11), resuelve toda la información necesaria para este problema. Con su respuesta se ha preparado la Fig. 11.12, que da la solución del problema. En la Sec. 11.9 se estudia la situación del resalto hidráulico.

## 11.8 Clasificación de los perfiles superficiales

El estudio de la Ec. (11.6.7) revela la existencia de muchos tipos de perfiles superficiales cada uno de los cuales tiene unas características definidas. La pendiente de la solera se clasifica en *adversa*, *horizontal*, *suave*, *crítica* y *pronunciada*; en general, el flujo puede estar por encima de la profundidad normal o por debajo, y también puede estar por encima o por debajo de la profundidad crítica.

Los diversos perfiles se han representado en la Fig. 11.13; en los párrafos siguientes se estudian cada uno de ellos, en el supuesto de que el canal sea muy ancho y $R = y$.

### *Perfiles de pendientes adversas*

Cuando la solera del canal sube en la dirección del flujo, los perfiles superficiales que resultan son llamados adversos. No hay profundidad normal, pero el flujo puede estar por debajo o por encima de la profundidad crítica. En este caso, $S_0$ es negativo. Cuando la profundidad está



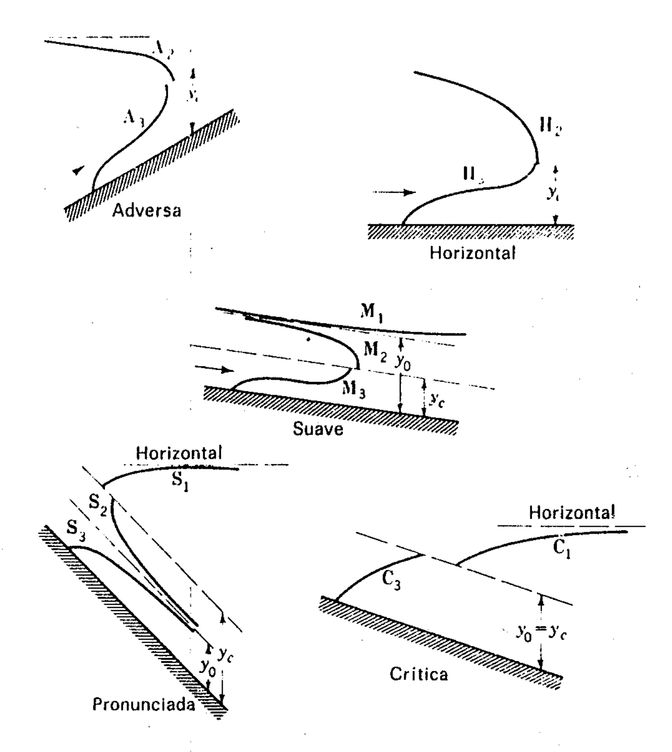



*Fig. 11.13 Perfiles superficiales típicos.*

por debajo de la crítica, el numerador es negativo y la Ec. (11.6.6) tiene la forma

$$dL = \frac{1 - C_1/y^3}{S_0 - C_2/y^{10/3}} dy$$

Aquí $F(y)$ es positivo y la profundidad aumenta en la dirección de aguas abajo. Esta curva, designada por $\mathbf{A}_3$, se representa en la Fig. 11.13. Para profundidades mayores que la crítica, el numerador es positivo y $F(y)$ es negativo, es decir, la profundidad disminuye en la dirección de aguas abajo. Para $y$ muy grande, $dL/dy = 1/S_0$, que es una asíntota horizontal de la curva. Para $y = y_c$, $dL/dy$ es 0, y la curva es perpendicular a la línea de profundidad crítica. Esta curva se designa por $\mathbf{A}_2$.

### *Perfiles de pendiente horizontal*

Para un canal horizontal $S_0 = 0$, la profundidad normal es infinita y el flujo puede estar por debajo o por encima de la profundidad crítica.

La ecuación toma la forma

$$dL = -Cy^{1/3}(y^3 - C_1)\,dy$$

Para $y$ menor que la crítica, $dL/dy$ es positivo y la profundidad aumenta en la dirección de aguas abajo. Se designa por $\mathbf{H}_3$. Para $y$ mayor que la crítica (curva $\mathbf{H}_2$), $dL/dy$ es negativa, y la profundidad disminuye hacia aguas abajo. Estas ecuaciones pueden integrarse analíticamente en el caso de canales muy anchos.

*Perfiles de pendiente suave*

La pendiente se dice que es suave cuando el flujo normal es tranquilo, es decir, cuando la profundidad normal $y_0$ es mayor que la crítica. Tres perfiles pueden presentarse, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ para profundidad por encima de la normal, por debajo de la normal y por encima de la crítica, y por debajo de la crítica respectivamente. Para la curva $\mathbf{M}_1$, $dL/dy$ es positivo y tiende a $1/S_0$ para $y$ muy grande; por consiguiente, la curva $\mathbf{M}_1$ tiene una asíntota horizontal hacia aguas abajo. Como el denominador tiende a cero cuando $y$ tiende a $y_0$, la profundidad normal es una asíntota en el extremo de aguas arriba de la curva. Para la curva $\mathbf{M}_2$, $dL/dy$ es negativo, con la profundidad normal como asíntota aguas arriba, y $dL/dy = 0$ a la profundidad crítica. La curva $\mathbf{M}_3$ incrementa su profundidad aguas abajo, como se ve en la figura.

*Perfiles de pendiente crítica*

Cuando las profundidades normal y crítica son iguales, los perfiles que resultan se designan por $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_3$, según que la profundidad esté por encima o por debajo de la crítica respectivamente. La ecuación tiene la forma

$$dL = \frac{1}{S_0}\frac{1 - b/y^3}{1 - b_1/y^{10/3}}\,dy$$

con numerador y denominador positivos para $\mathbf{C}_1$ y negativos para $\mathbf{C}_3$. Por esto la profundidad aumenta hacia aguas abajo para ambos. Para un valor grande de $y$, $dL/dy$ tiende a $1/S_0$; por consiguiente, son asintóticos a una línea horizontal. El valor de $dL/dy$ en la profundidad crítica es $0{,}9/S_0$; por consiguiente, la curva $\mathbf{C}_1$ es convexa hacia arriba. La curva $\mathbf{C}_3$ es también convexa hacia arriba, como se representa en la figura.



*Perfiles de pendiente pronunciada*

Cuando el flujo normal en un canal es rápido (la profundidad normal es menor que la crítica), los perfiles que resultan $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ se denominan perfiles pronunciados: $\mathbf{S}_1$ está por encima de las profundidades normal y crítica, $\mathbf{S}_2$ entre la normal y la crítica, y $\mathbf{S}_3$ por debajo de la normal. Para la curva $\mathbf{S}_1$ tanto el numerador como el denominador son positivos y la profundidad aumenta hacia aguas abajo aproximándose a una asíntota horizontal. Para la curva $\mathbf{S}_2$ el numerador es negativo y el denominador positivo, pero aproximándose a cero para $y = y_0$. La curva se aproxima a la profundidad normal asintóticamente. La curva $\mathbf{S}_3$ tiene $dL/dy$ positivo, pues tanto el numerador como el denominador son negativos. Su forma está representada en la Fig. 11.13.

Debe notarse que un canal dado puede clasificarse como suave para un caudal, crítico para otro caudal y pronunciado para un tercero, puesto que las profundidades normal y crítica dependen de los diferentes valores del caudal. La utilización de los diversos tipos de perfiles superficiales se estudiarán en la sección siguiente.

## 11.9 Secciones de control

Un pequeño cambio en las condiciones de la corriente aguas abajo no puede propagarse hacia aguas arriba cuando la profundidad es la crítica o menor que la crítica; por consiguiente, las condiciones de aguas abajo no controlan el flujo. Todas las corrientes en régimen rápido son controladas por las condiciones de aguas arriba y los cálculos de los perfiles superficiales deben comenzar por el extremo de aguas arriba del canal.

Las corrientes en régimen tranquilo están influidas por las pequeñas variaciones en las condiciones de aguas abajo, y, por tanto, son contro-

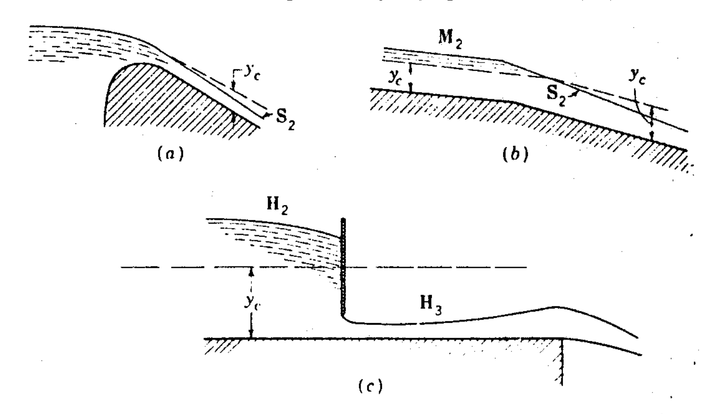



*Fig. 11.14 Secciones de control de un canal.*

ladas por ellas. Los cálculos relativos a regímenes tranquilos han de iniciarse en el extremo de aguas abajo del tramo considerado y continuados hacia aguas arriba.

Las secciones de control se sitúan a la entrada o salida de los canales, así como en los cambios de pendiente de la solera de los canales, bajo ciertas condiciones. Una compuerta en un canal puede controlar tanto la porción de aguas arriba como la de aguas abajo. Tres secciones de control se ilustran en la Fig. 11.14. En *a* la corriente pasa por las condiciones críticas a la entrada del canal y la profundidad puede calcularse allí para un caudal dado. La pendiente del canal es pronunciada; por lo cual los cálculos se prosiguen hacia aguas abajo. En *b*, un cambio en la pendiente del canal de suave a pronunciada, hace que la corriente pase por las condiciones críticas cerca del cambio de pendiente. Los cálculos continúan hacia aguas arriba y aguas abajo de la sección de control, en el cambio de pendiente. En *c*, una compuerta en un canal horizontal provoca un control para aguas arriba y aguas abajo de ella. Las diversas curvas se han designado de acuerdo con la clasificación hecha en la Figura 11.13.

El resalto hidráulico se produce siempre que las condiciones requeridas por la ecuación de la cantidad de movimiento se cumplen. En la Figura 11.15, una corriente líquida sale por debajo de una compuerta en régimen rápido a lo largo de un canal horizontal. Si el canal fuese suficientemente corto, la corriente saldría con un perfil, hasta el extremo del canal, según la curva $\mathbf{H}_3$. Con un canal suficientemente largo, el resalto aparece y el perfil que resulta se compone de dos trazos de curva $\mathbf{H}_3$ y $\mathbf{H}_2$, con el resalto entre ellas. Al calcular estos perfiles para un caudal dado se comienza por el perfil relativo a la curva $\mathbf{H}_3$, comenzando en la compuerta (debe conocerse el coeficiente de contracción) y continuando hacia aguas abajo, siendo evidente que se llegará a la profundidad crítica antes de que se alcance el extremo del canal. Después se calcula la curva $\mathbf{H}_2$ comenzando por la profundidad crítica en el extremo del canal y continuando hacia aguas arriba. Las profundidades conjugadas de las $\mathbf{H}_3$ se calculan y se señalan en la figura. La intersección de la curva de profundidades conjugadas con la curva $\mathbf{H}_2$ localiza la posición del resalto. El canal puede ser tan largo que la curva $\mathbf{H}_2$ esté siempre por encima de la profundidad conjugada de $\mathbf{H}_3$, produciéndose entonces un «resalto sumergido», extendiéndose $\mathbf{H}_2$ hasta la compuerta.

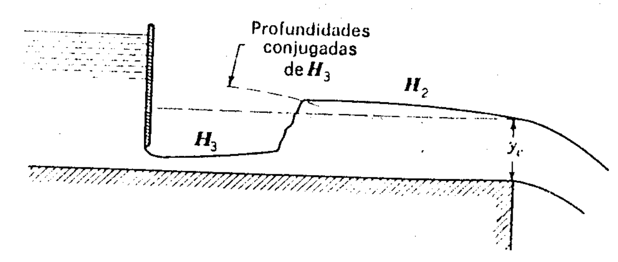



*Fig. 11.15 Resalto hidráulico entre dos secciones de control.*



Todos los esquemas se han hecho con una escala vertical realzada ya que los canales usuales tienen pequeñas pendientes de solera.

## 11.10 Transiciones

En las entradas a los canales y en los cambios de sección recta y de pendiente de solera, la estructura que conduce al líquido desde la sección de aguas arriba hasta la nueva sección se llama transición. Su objeto es variar la forma de corriente y el perfil superficial de tal manera que se obtenga una pérdida de energía mínima. Una transición en régimen tranquilo de un canal rectangular a un canal trapezoidal se ilustra en la Figura 11.16. Aplicando la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2,

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z + E_1 \qquad (11.10.1)$$

En general, las secciones y profundidades se determinan por otras consideraciones y $z$ debe determinarse para una supuesta pérdida de energía $E_1$. Con un buen proyecto, es decir, con paredes ligeramente cónicas, y soleras de no muy bruscas variaciones en el área de la sección, las pérdidas pueden mantenerse en las proximidades de un décimo de la diferencia de las alturas de velocidad en el caso de flujo acelerado y en las proximidades de los tres décimos de la diferencia de las alturas de velocidad para flujos retardados. Para corrientes en régimen rápido se necesita, para proyectar transiciones†, el conocimiento de la mecánica de las ondas.

***Ejemplo 11.8*** En la Fig. 11.16 un caudal de 10 m³/seg fluye a través de la transición; la sección rectangular mide 2,5 m de ancha e $y_1 = 2,5$ m. La sección trapezoidal es de 1,8 m de anchura en el fondo con lados inclinados de pendiente 1 : 1 e $y_2 = 2,2$ m. Determinar la elevación $z$ de la solera en la transición.

$$V_1 = \frac{10}{2,5^2} = 1,6 \text{ m/seg} \qquad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{1,6^2}{19,6} = 0,131 \qquad A_2 = 8,8 \text{ m}^2$$

$$V_2 = \frac{10}{8,8} = 1,14 \text{ m/seg} \qquad \frac{V_2^2}{2g} = \frac{1,14^2}{19,6} = 0,066$$

$$E_1 = 0,3\left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}\right) = 0,019$$

† A. T. Ippen, Channel Transitions and Controls, en «Engineering Hydraulics», ed. por H. Rouse, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1950.

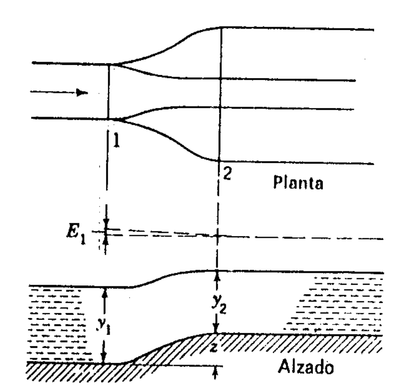



*Fig. 11.16 Transición de un canal rectangular a trapezoidal para flujo tranquilo.*

Sustituyendo en la Ec. (11.10.1)

$$z = 0{,}131 + 2{,}5 - 0{,}066 - 2{,}2 - 0{,}019 = 0{,}346 \text{ m}$$

*El procedimiento de aforo por la profundidad crítica*† es un excelente medio para medir el caudal en un canal abierto. Las relaciones que se obtienen a continuación para la determinación del caudal se refieren al caso de un canal rectangular de anchura constante (Fig. 11.17), con una elevación en la solera en un tramo del canal de una longitud de aproximadamente $3y_c$. La elevación de la solera es tal que sobre ella se tiene una sección de control con velocidad crítica. Midiendo únicamente la profundidad de aguas arriba $y_1$, el caudal por metro de anchura se puede determinar con gran precisión. Aplicando la ecuación de la energía entre las secciones 1 y la sección crítica (su exacta localización carece de importancia), incluyendo el término relativo a la pérdida en la transición, resulta:

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = z + y_c + \frac{V_c^2}{2g} + \frac{1}{10}\left(\frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right)$$

Como

$$y_c + \frac{V_c^2}{2g} = E_c \qquad \frac{V_c^2}{2g} = \frac{E_c}{3}$$

siendo $E_c$ la energía específica en la sección de profundidad crítica,

$$y_1 + 1{,}1\frac{V_1^2}{2g} = z + 1{,}033E_c \tag{11.10.2}$$

† H. W. King y E. F. Brater, «Handbook of Hydraulics», 5.ª ed., págs. 8-14 a 8-16, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963.



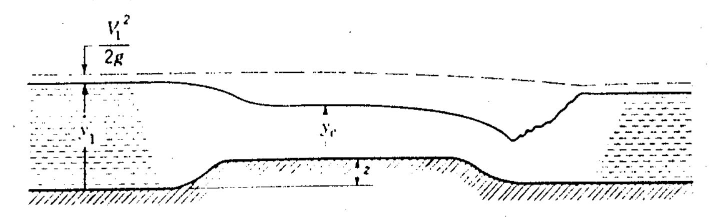



*Fig. 11.17 Aforo por profundidad crítica.*

Por la Ec. (11.5.3)

$$y_c = \frac{2}{3}E_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

de donde

$$q = 3{,}087E_c^{3/2} \tag{11.10.3}$$

Eliminando $E_c$ entre las Ecs. (11.10.2) y (11.10.3) y despejando $q$ en la ecuación resultante,

$$q = 2{,}94\left(y_1 - z + 1{,}1\frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2}$$

Como $q = V_1y_1$ puede eliminarse $V_1$,

$$q = 2{,}94\left(y_1 - z + \frac{0{,}0171}{y_1^2}q^2\right)^{3/2} \tag{11.10.4}$$

La ecuación se resuelve por sucesivas aproximaciones. Como se conocen $y_1$ y $z$, y el término del segundo miembro que contiene $q$ es muy pequeño, puede, en una primera aproximación, despreciarse para calcular un primer valor de $q$. Un valor un poco mayor que éste se sustituye en el segundo miembro y se calcula un nuevo valor de $q$. Cuando el valor de $q$ que se sustituye en el segundo miembro y el que se obtiene después de realizar las operaciones son iguales, la ecuación está resuelta. Una vez que $z$ y la anchura del canal se conocen puede prepararse una tabla que dé $Q$ para cualquier valor de $y_1$. La experiencia ha probado que se obtiene una aproximación del 2 al 3 por 100.

Cuando el régimen es tranquilo, el resalto se presenta aguas abajo del aforo, y cuando es rápido, aguas arriba del mismo.

***Ejemplo 11.9*** En un aforo por profundidad crítica de 2 m de ancho con $z = 0{,}25$ m, se mide una profundidad $y_1 = 0{,}75$ m. Calcular el caudal.

Por la Ec. (11.10.4) se obtiene como primera aproximación:

$$q = 1{,}62(0{,}75 - 0{,}25)^{3/2} = 1{,}62 \times 0{,}5^{3/2} = 0{,}75$$

Como segunda aproximación, tomando $q = 0{,}60$,

$$q = 1{,}62(0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}6^2)^{3/2} = 1{,}62 \times 0{,}536^{3/2} = 0{,}635$$

y como tercera aproximación, 0,65:

$$q = 1{,}62(0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}65^2)^{3/2} = 1{,}62 \times 0{,}542^{3/2} = 0{,}647$$

Entonces,

$$Q = 2 \times 0{,}65 = 1{,}30 \text{ m}^3/\text{seg}$$

## Problemas

*11.1* Demostrar que para que se pueda asegurar que hay flujo laminar en una superficie inclinada, el caudal por unidad de ancho no puede ser mayor que $500\nu$. (Ver el Problema 5.10.)

*11.2* Calcular la profundidad de un flujo laminar de agua a 21° C, que desciende por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, para el valor crítico inferior del número de Reynolds. (Véase Problema 5.10.)

*11.3* Calcular la profundidad de flujo turbulento con $\mathbf{R} = VR/\nu = 500$ para el flujo de agua a 21° C por una superficie inclinada un ángulo $\theta$ de 30° con la horizontal. Utilizar la fórmula de Manning. $n = 0{,}01$, $S = \text{sen } \theta$.

*11.4* Un canal rectangular ha de transportar 1.100 l/seg con una pendiente de 0,009. Si el canal se recubre con chapas de hierro galvanizado, $n = 0{,}011$, ¿cuál es el número mínimo de metros cuadrados de metal necesarios por cada 100 m de canal? Despreciar la chapa saliente por encima de la superficie libre.

*11.5* Un canal trapezoidal con pendientes laterales 2 a 1 (2 en horizontal y 1 en vertical) transporta 18 m³/seg con una pendiente en el fondo de 0,0009. Determinar el fondo, ancho, profundidad y velocidad para la sección hidráulica óptima. $n = 0{,}025$.

*11.6* Un canal de sección trapezoidal hecho de ladrillo, con una anchura en el fondo de 1,8 m y con una pendiente de la solera de 0,001, debe transportar 17 m³/seg. ¿Qué valor tendrán la pendiente de los lados y la profundidad del canal para utilizar el número mínimo de ladrillos?

*11.7* ¿Qué radio ha de tener un canal semicircular de metal con arrugas para transportar 2.700 l/seg con una pérdida de altura de 1,25 m en 1 km? ¿Se puede hallar otra sección recta que necesite menos perímetro?

*11.8* Determinar la sección hidráulica trapezoidal óptima para transportar 85 m³/seg con una pendiente de la solera igual a 0,001. La superficie es de hormigón liso.

*11.9* Calcular el caudal a través del canal y el aliviadero de la Fig. 11.18 para flujo permanente uniforme con $S = 0{,}0009$ e $y = 2{,}50$ m.



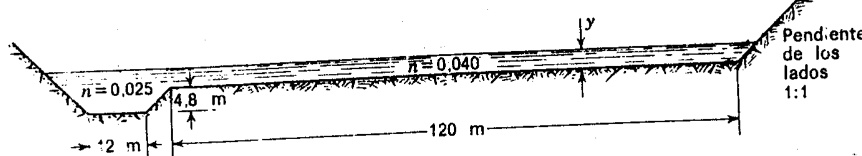



*Fig. 11.18*

*11.10* Para un caudal de 200 m³/seg en la sección de la Fig. 11.18, cuando la profundidad sobre la zona inundada es de 1,20 m, calcular el gradiente de energía.

*11.11* Para un flujo de 750 m³/seg a través de la sección de la Fig. 11.18 hallar la profundidad del flujo en el lateral inundado cuando la pendiente de la línea de alturas totales es 0,0004.

*11.12* Dibujar una curva $F + M$ para 7 (m³/seg)/m de ancho.

*11.13* Dibujar la curva de energía específica para 7 (m³/seg)/m de ancho en el mismo diagrama que el Problema 11.12.

*11.14* Preparar un diagrama de la Ec. (11.4.7).

*11.15* Para $q = 10$ (m³/seg)/m y $\mathbf{F}_1 = 12$, determinar $v_1$, $y_1$ y la profundidad conjugada $y_2$.

*11.16* Determinar las dos profundidades compatibles con la altura específica de 2 m para un caudal por unidad de anchura de 3 (m³/seg)/m.

*11.17* ¿Cuál es la profundidad crítica para un caudal de $q = 2$ (m³/seg)/m de ancho?

*11.18* ¿Cuál es la profundidad crítica para un caudal de 300 l/seg a través de la sección de la Figura 5.46?

*11.19* Determinar la profundidad crítica para un caudal de 10 m³/seg a través de un canal trapezoidal de ancho de solera 2 m y laterales de pendiente 1:1.

*11.20* Un canal rectangular de hormigón en bruto, de 4 m de anchura, tiene una pendiente de 0,0009. Por una de las secciones circulan 18 m³/seg con una profundidad de 2,3 m. Utilizando el método de diferencias finitas y mediante un solo incremento, calcular la profundidad 350 m aguas abajo.

*11.21* Resolver el Prob. 11.20, tomando dos tramos iguales. ¿Cuál es la clasificación de este perfil superficial?

*11.22* Una compuerta de gran anchura (Fig. 11.19) deja pasar agua hacia un canal rectangular. Considerando en la sección $O$ una distribución hidrostática de presiones, calcular la profundidad de la sección $O$ y el caudal por metro de anchura, cuando $y = 1{,}0$ m.

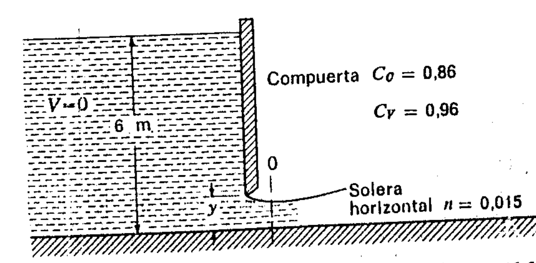



*Fig. 11.19*

*11.23* Si la profundidad en la sección *O* de la Fig. 11.19 es 0,6 m y el caudal por metro de anchura es de 6,1 $m^3$/seg, calcular el perfil de la superficie libre aguas abajo de la compuerta.

*11.24* Dibujar la curva de profundidades conjugadas para el perfil superficial del Problema 11.23.

*11.25* Si el canal muy ancho de la Fig. 11.19 se extiende aguas abajo en una longitud de 600 m y tiene entonces una caída rápida, calcular el perfil de la corriente aguas arriba del extremo del canal para un caudal por metro de anchura $q = 6,1$ ($m^3$/seg)/m, integrando la ecuación del flujo gradualmente no uniforme.

*11.26* Usando los resultados de los Probs. 11.24 y 11.25, determinar la posición del resalto hidráulico en el canal.

*11.27* En la Fig. 11.20, la profundidad aguas abajo de la compuerta es de 0,6 m y la velocidad es de 12 m/seg. Suponiendo que el canal es muy ancho, calcular la profundidad en el extremo de aguas abajo de la pendiente adversa.

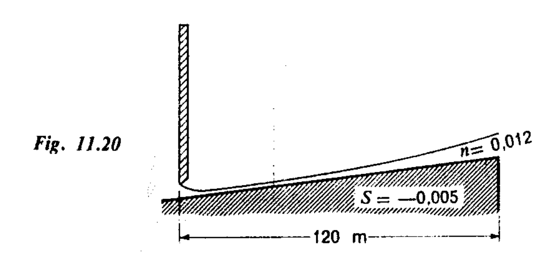



*Fig. 11.20*

*11.28* Dibujar (sin hacer cálculos) y clasificar todos los perfiles superficiales que pueden obtenerse en la Fig. 11.21 al variar $z_1$, $z_2$ y las longitudes de los canales, para $z_2 < z_1$ y con el canal inclinado de pendiente pronunciada.

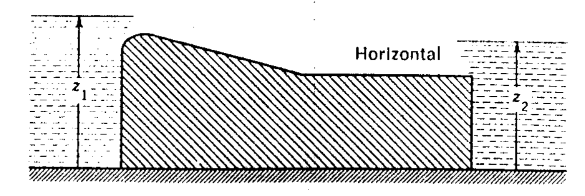



*Fig. 11.21*

*11.29* En la Fig. 11.21, determinar las posibles combinaciones de las secciones de control para los diversos valores de $z_1$, $z_2$ y las diversas longitudes del canal, siendo $z_1 > z_2$, y con el canal inclinado de pendiente siempre pronunciada.

*11.30* Dibujar los diversos perfiles superficiales y las secciones de control de la Fig. 11.21, obtenidas haciendo variar la longitud del canal siendo $z_2 > z_1$.

*11.31* Mostrar un ejemplo de canal que sea de pendiente suave para un caudal y pronunciada para otro. ¿Qué caudal se necesita para que sea crítico?

*11.32* Dibujar las diversas combinaciones de perfiles superficiales que se pueden obtener con el canal cuyo perfil es el de la Fig. 11.22 para los diversos valores de $z_1$, $z_2$.



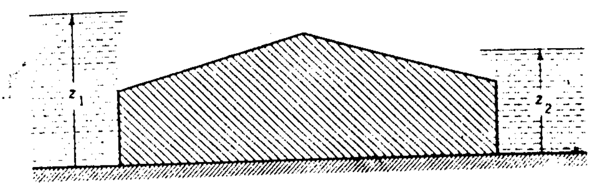



*Fig. 11.22*

*11.33* Diseñar una transición para una sección trapezoidal de 2,4 m de ancho de solera y laterales de pendiente 1:1, profundidad 1,2 m, hasta una sección rectangular de 1,8 m de anchura y 1,8 m de profundidad, para un caudal de 7 $m^3$/seg. La transición ha de ser de 6 m de longitud y la pérdida de $\frac{1}{10}$ de la diferencia de las alturas de velocidad. Indicar el perfil de la solera y no hacer ningún cambio brusco en las áreas de las secciones transversales.

*11.34* Una transición entre un canal rectangular, de 2,4 m de anchura y 1,8 m de profundidad, y un canal trapezoidal, de 3,6 m de anchura en el fondo, pendiente de los lados de 2 a 1, y profundidad 1,2 m, tiene una pérdida de cuatro décimos de la diferencia entre las alturas de velocidad. El caudal es de 6 $m^3$/seg. Determinar la diferencia entre las cotas de las soleras de los dos canales.

*11.35* En un aforo por profundidad crítica de 6 m de ancho la altura de la solera es de 0,6 m. Para una profundidad aguas arriba de 1,06 m determinar el caudal a través del aforo.

*11.36* Una corriente, que tiene una velocidad 6 m/seg y un número de Froude de 10, se aproxima a un aforador por profundidad crítica. ¿Cuál es el mínimo incremento de cota que debe elevarse la solera?

*11.37* En un canal abierto

(*a*) la línea de alturas piezométricas es siempre paralela a la línea de altura total;
(*b*) la línea de altura total coincide con la superficie libre;
(*c*) las líneas de alturas piezométricas y totales coinciden;
(*d*) la línea de alturas piezométricas no puede jamás elevarse;
(*e*) la línea de alturas piezométricas y la superficie libre coinciden.

*11.38* El flujo gradualmente no uniforme es

(*a*) flujo uniforme y permanente;
(*b*) flujo no uniforme y permanente;
(*c*) flujo uniforme y no permanente;
(*d*) flujo no uniforme y no permanente;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*11.39* El flujo tranquilo debe presentarse siempre

(*a*) por encima de la profundidad normal;
(*b*) por debajo de la profundidad normal;
(*c*) por encima de la profundidad crítica;

(*d*) por debajo de la profundidad crítica;
(*e*) en las pendientes adversas.

***11.40*** El flujo rápido no puede presentarse jamás

(*a*) inmediatamente después de un resalto hidráulico;
(*b*) en un canal de pendiente suave;
(*c*) en un canal de pendiente adversa;
(*d*) en un canal horizontal;
(*e*) en un canal de pendiente pronunciada.

***11.41*** El flujo con profundidad crítica se presenta cuando

(*a*) las variaciones en la resistencia aguas arriba alteran las condiciones de aguas abajo;
(*b*) la energía específica es máxima para un caudal dado;
(*c*) cualquier cambio en la profundidad requiere más energía específica;
(*d*) las profundidades crítica y normal coinciden en el canal;
(*e*) la velocidad está dada por $\sqrt{2gy}$.

***11.42*** La sección rectangular óptima desde el punto de vista hidráulico se presenta cuando ($b$ = anchura de la solera, $y$ = profundidad)

(*a*) $y = 2b$ (*b*) $y = b$ (*c*) $y = b/2$ (*d*) $y = b^2$
(*e*) $y = b/5$

***11.43*** La sección hidráulica óptima se define como

(*a*) la sección más económica;
(*b*) la sección de mínimo coeficiente de rugosidad;
(*c*) la sección que tiene el área máxima para un caudal dado;
(*d*) la que tiene el mínimo perímetro;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***11.44*** El resalto hidráulico se presenta siempre desde

(*a*) una curva $\mathbf{M_3}$ hasta una curva $\mathbf{M_1}$;
(*b*) una curva $\mathbf{H_3}$ hasta una curva $\mathbf{H_2}$;
(*c*) una curva $\mathbf{S_3}$ hasta una curva $\mathbf{S_1}$;
(*d*) por debajo de la profundidad normal hasta por encima de dicha profundidad;
(*e*) por debajo de la profundidad crítica hasta por encima de dicha profundidad.

***11.45*** La profundidad crítica en un canal rectangular está expresada por

(*a*) $\sqrt{Vy}$ (*b*) $\sqrt{2gy}$ (*c*) $\sqrt{gy}$ (*d*) $\sqrt{q/g}$
(*e*) $(q^2/g)^{1/3}$

***11.46*** La profundidad crítica en un canal no rectangular está expresada por

(*a*) $Q^2T/gA^3 = 1$ (*b*) $QT^2/gA^2 = 1$ (*c*) $Q^2A^3/gT^2 = 1$
(*d*) $Q^2/gA^3 = 1$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***11.47*** La energía específica para una corriente de $V = 2{,}41$ m/seg, $y = 0{,}6$ m, es, en kgm/kg,



(*a*) 0,9 (*b*) 1,2 (*c*) 1,81 (*d*) 3,01 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***11.48*** La energía específica mínima posible para una corriente es de 0,7425 kgm/kg. El caudal por metro de anchura, en (m³/seg)/m, es

(*a*) 0,40 (*b*) 1,12 (*c*) 1,58 (*d*) 2,06 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***11.49*** El perfil superficial que se forma aguas abajo de la compuerta de la Figura 11.23 se clasifica como

(*a*) $\mathbf{H_1}$ (*b*) $\mathbf{H_2}$ (*c*) $\mathbf{H_3}$ (*d*) $\mathbf{A_2}$ (*e*) $\mathbf{A_3}$

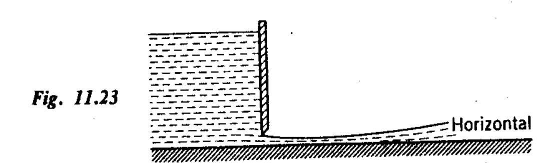


***Fig. 11.23***

***11.50*** El número de perfiles superficiales que puedan presentarse para cualquier variación de $z_1$, $z_2$ y longitud del canal en la Fig. 11.24, es ($z_1 \neq z_2$)

(*a*) 2 (*b*) 3 (*c*) 4 (*d*) 5 (*e*) 6

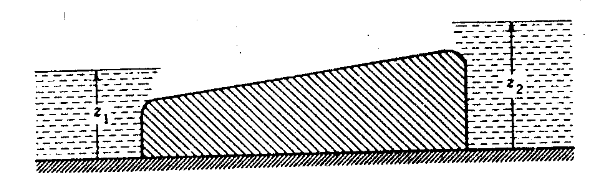


***Fig. 11.24***

***11.51*** La pérdida a través de una transición divergente es, aproximadamente,

(*a*) $0{,}1\,\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$ (*b*) $0{,}1\,\dfrac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$ (*c*) $0{,}3\,\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$

(*d*) $0{,}3\,\dfrac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$ (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

***11.52*** En un aforo por profundidad crítica

(*a*) se mide la profundidad en la sección crítica;
(*b*) es siempre precedido por un resalto hidráulico;
(*c*) debe tener flujo en régimen tranquilo inmediatamente aguas arriba;
(*d*) tiene siempre un resalto hidráulico aguas abajo;
(*e*) tiene siempre un resalto hidráulico asociado a él.

### Referencias

Bakhmeteff, B. A.: «Hydraulics of Open Channels», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1932.
Chow, V. T.: «Open-channel Hydraulics», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.
Hinds, J.: The Hydraulic Design of Flume and Siphon Transitions, *Trans. ASCE*, vol. 92, 1928.
Keulegan, G. H.: Laws of Turbulent Flow in Open Channels, Research Paper 1151, *J. Res. Nat. Bur. Std.*, vol. 21, 1938.
Kindsvater, C. E.: The Hydraulic Jump in Sloping Channels, *Trans. ASCE*, vol. 109, 1944.
Woodward, S. M., y C. J. Posey: «The Hydraulics of Steady Flow in Open Channels», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1941.

# 12

# Flujo no permanente

Hasta aquí, prácticamente la totalidad de los tipos de flujo examinados han sido casos de flujo permanente o reducibles a él. Al compás que avanza la tecnología, y se construyen equipos mayores o se emplean velocidades más altas, los problemas de las perturbaciones hidráulicas transitorias se hacen cada vez más importantes. Dichas perturbaciones hidráulicas transitorias no solo dan lugar a altas presiones peligrosas, sino también producen ruidos excesivos, fatiga, corrosión debida a cavitación y el rompimiento del control normal de los circuitos. Debido al periodo inherente de determinados sistemas de tuberías, se pueden presentar vibraciones resonantes que pueden ser destructivas.

El análisis de la perturbación hidráulica transitoria trata de las presiones y las velocidades que resultan del cambio desde un estado permanente a otro permanente, por ejemplo, al ajustar una válvula en un sistema de tuberías o al poner en marcha o detener una bomba.

El análisis del flujo no permanente es mucho más complejo que el del flujo permanente. Aparece otra variable independiente, el tiempo, y las ecuaciones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en vez de ecuaciones diferenciales ordinarias. El calculador digital está indicado de una manera idónea para la solución de dichos problemas debido a su capacidad de almacenamiento y a su posibilidad de operar a muy altas velocidades de cálculo. Este capítulo consta de dos partes: la primera se refiere a fenómenos transitorios en circuitos cerrados y la segunda al flujo no permanente en canales abiertos.

En primer lugar se estudia la oscilación en un tubo en U, seguida de su aplicación en tuberías y depósitos, el uso de las chimeneas de equilibrio y el establecimiento del flujo en un sistema. A continuación se desarrollan las ecuaciones para los casos de variaciones más bruscas de velocidad que requieren la consideración de la compresibilidad del líquido y de la elasticidad de la pared de la tubería (normalmente llamado golpe de ariete). Los casos de canales abiertos son las olas de impulsión positivas y negativas en un canal prismático sin rozamiento con cambios de la compuerta instantáneos, el caso más general de regulación de inunda-

ciones a través de un canal prismático con rozamiento, y el flujo sobre superficies planas inclinadas debido a la lluvia.

### *Flujo en conductos cerrados*

En general, los casos de flujo no permanente son mucho más difíciles de analizar que los de flujo permanente. Se emplean la ecuación del movimiento o la ecuación lineal de la cantidad de movimiento no permanente, y la ecuación de continuidad no permanente toma formas especiales. Con términos de resistencia no lineal para rozamiento y otros efectos, las ecuaciones diferenciales se resuelven frecuentemente por métodos numéricos, y normalmente mediante un calculador digital.

## *12.1 Oscilación de un líquido en un tubo en U*

Hay tres casos interesantes de las oscilaciones de un líquido en un tubo en U simple: (1) líquido sin rozamiento, (2) resistencia laminar y (3) resistencia turbulenta.

### *Líquido sin rozamiento*

Para el caso sin rozamiento, se puede aplicar la ecuación de Euler del movimiento en forma no permanente [Ec. (3.6.3)]. Es

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad (3.6.3)$$

Considerando las secciones 1 y 2 (Fig. 12.1) e integrando la ecuación entre 1 y 2, para flujo incompresible

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + v_2^2 - v_1^2 + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0 \qquad (12.1.1)$$

Pero $p_1 = p_2$ y $v_1 = v_2$; además $\partial v/\partial t$ es independiente de $s$, por tanto,

$$g(z_2 - z_1) = -L\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (12.1.2)$$

donde $L$ es la longitud de la columna de líquido. Cambiando la referencia de altura a la posición de equilibrio a través de los meniscos,



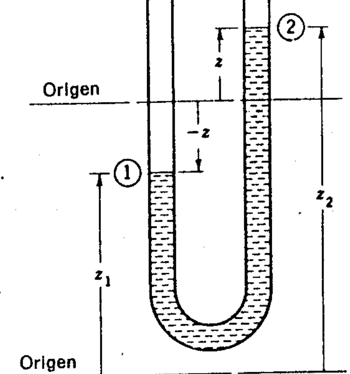



*Fig. 12.1 Oscilación de un líquido en un tubo en U.*

$g(z_2 - z_1) = 2gz$; ya que $v$ es solo función de $t$, $\partial v/\partial t$ se puede escribir $dv/dt$, o $d^2z/dt^2$,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{2g}{L}z \qquad (12.1.3)$$

La solución general de esta ecuación es

$$z = C_1 \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes de integración arbitrarias. Se comprueba fácilmente la solución derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial. Para calcular las constantes, si $z = Z$ y $dz/dt = 0$ cuando $t = 0$, entonces $C_1 = Z$ y $C_2 = 0$, o sea

$$z = Z \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t \qquad (12.1.4)$$

Esta ecuación define un movimiento armónico simple para el menisco, con un periodo para la oscilación completa igual a $2\pi\sqrt{L/2g}$. La velocidad de la columna puede obtenerse derivando $z$ con respecto a $t$.

***Ejemplo 12.1*** Una columna de un líquido sin rozamiento de 1,225 m de longitud tiene una velocidad de 1 m/seg cuando $z$ = 0,25 m. Encontrar: (*a*) el máximo valor de $z$, (*b*) la máxima velocidad y (*c*) el periodo.

(*a*) Derivando la Ec. (12.1.4) y sustituyendo $L$ por su valor, resulta:

$$\frac{dz}{dt} = -4Z \operatorname{sen} 4t$$

Si $t_1$ es el tiempo cuando $z = 0{,}25$ y $dz/dt = 1$,

$$1 = Z \cos 4t_1$$
$$-4 = -4Z \operatorname{sen} 4t_1$$

Dividiendo la segunda por la primera ecuación,

$$\operatorname{tg} 4t_1 = 1$$

o sea $4t_1 = 0{,}785$ radianes, $t_1 = 0{,}196$ seg, sen $4t_1 = 0{,}707$ y cos $4t_1 = 0{,}707$. Entonces $Z = 0{,}25/\cos 4t_1 = 0{,}25/0{,}707 = 0{,}354$ m es el máximo valor de $z$.

(*b*) La velocidad máxima se presenta cuando sen $4t = 1$, o sea $4Z = 4 \times 0{,}354 = 1{,}416$ m/seg.

(*c*) El periodo vale

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} = 1{,}571 \text{ seg}$$

*Resistencia laminar*

Cuando una tensión cortante $\tau_0$ en la pared del tubo resiste el movimiento de la columna de líquido, se puede introducir en la ecuación de Euler del movimiento a lo largo de una línea de corriente (Fig. 3.8). La resistencia en la longitud $\delta s$ es $\tau_0 \pi D \delta s$. Dividiendo por la masa de la partícula $\rho A \delta s$, da $4\tau_0/D$, y la Ec. (12.1.1) se convierte en

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \qquad (12.1.5)$$

Esta ecuación sirve para resistencia laminar o turbulenta. Se hace la hipótesis de que la resistencia al rozamiento en el flujo no permanente es la misma que para el flujo permanente a la misma velocidad. A partir de la ecuación de Poiseuille, la ecuación de la tensión cortante en la pared de un tubo es

$$\tau_0 = \frac{8\mu v}{D} \qquad (12.1.6)$$

Haciendo la sustitución de $\tau_0$ en la Ec. (12.1.5) e integrando como antes respecto a $s$,

$$g(z_2 - z_1) + L\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{32\nu v}{D^2} = 0$$



Haciendo $2gz = g(z_2 - z_1)$, cambiando a derivadas totales y sustituyendo $v$ por $dz/dt$,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{32\nu}{D^2}\frac{dz}{dt} + \frac{2g}{L}z = 0 \qquad (12.1.7)$$

En efecto, se supone que la columna tiene la velocidad media $dz/dt$ en cualquier sección recta.

Sustituyendo

$$z = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}$$

se puede demostrar que la anterior es la solución general de la Ec. (12.1.7), siempre que se verifique:

$$a^2 + \frac{32\nu}{D^2}a + \frac{2g}{L} = 0$$

y

$$b^2 + \frac{32\nu}{D^2}b + \frac{2g}{L} = 0$$

siendo $C_1$ y $C_2$ constantes arbitrarias de integración que se determinan cuando se conocen los valores de $z$ y de $dz/dt$ para un instante dado. Puesto que las ecuaciones que determinan $a$ y $b$ son idénticas, para que estos valores sean distintos se tomarán signos contrarios antes del radical en las soluciones de la ecuación de segundo grado, o sea:

$$a = -\frac{16\nu}{D^2} + \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}}$$

y

$$b = -\frac{16\nu}{D^2} - \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}}$$

Para simplificar las fórmulas se hace:

$$m = \frac{16\nu}{D^2} \qquad n = \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}}$$

y entonces resulta:

$$z = C_1 e^{-mt+nt} + C_2 e^{-mt-nt}$$

Cuando se parte de la condición de que para $t = 0$, $z = 0$, $dz/dt = V_0$, entonces por sustitución $C_1 = -C_2$, y

$$z = C_1 e^{-mt}(e^{nt} - e^{-nt}) \qquad (12.1.8)$$

Como

$$\frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} = \text{Sh } nt$$

la Ec. (12.1.8) se convierte en

$$z = 2C_1 e^{-mt} \text{ Sh } nt$$

Derivando con respecto a $t$,

$$\frac{dz}{dt} = 2C_1(-me^{-mt} \text{ Sh } nt + ne^{-mt} \text{ Ch } nt)$$

y poniendo $dz/dt = V_0$ para $t = 0$,

$$V_0 = 2C_1 n$$

puesto que Sh 0 = 0 y Ch 0 = 1. Entonces,

$$z = \frac{V_0}{n} e^{-mt} \text{ Sh } nt \qquad (12.1.9)$$

Esta ecuación da el desplazamiento $z$ de uno de los meniscos de la columna en función del tiempo, estando inicialmente el menisco en $z = 0$ cuando $t = 0$, y elevándose con velocidad $V_0$.

Pueden considerarse dos casos principales†. Cuando

$$\frac{16\nu}{D^2} > \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$n$ es un número real y la viscosidad es tan grande que el movimiento se amortigua en una parte del ciclo sin que $z$ llegue a hacerse negativo, Fi-

† Un tercer caso, para $16\nu/D^2 = \sqrt{2g/L}$, debe tratarse por separado lo que conduce a $z = V_0 t e^{-mt}$. La oscilación resultante da lugar únicamente a un ciclo y constituye el caso límite de $16\nu/D^2 > \sqrt{2g/L}$.



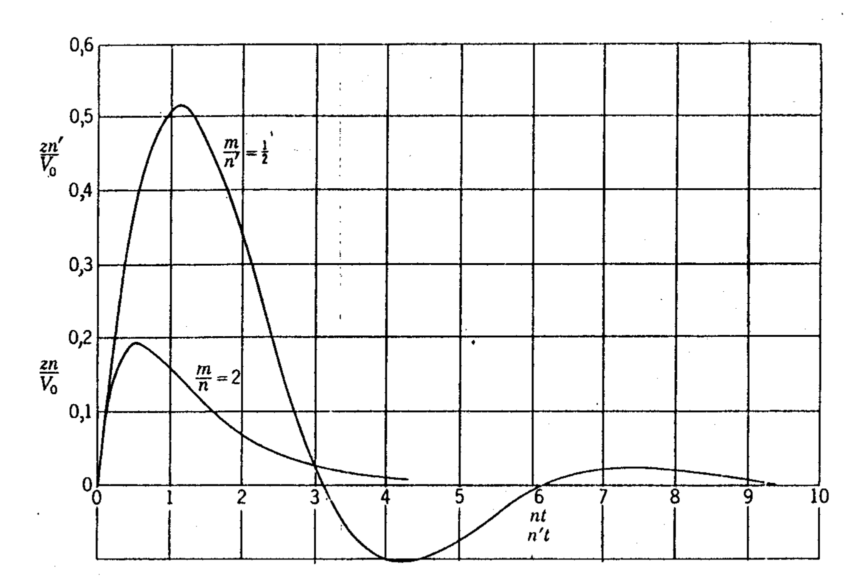



*Fig. 12.2 Posición del menisco como una función del tiempo para la oscilación de un líquido en un tubo en U con resistencia laminar.*

gura 12.2 ($m/n = 2$). El tiempo $t_0$ en que $z$ alcanza su valor máximo se encuentra derivando la Ec. (12.1.9) con respecto a $t$ e igualando a cero,

$$\frac{dz}{dt} = 0 = \frac{V_0}{n}(-me^{-mt} \text{ Sh } nt + ne^{-mt} \text{ Ch } nt)$$

de donde

$$\text{Tgh } nt_0 = \frac{n}{m} \qquad (12.1.10)$$

La sustitución de este valor de $t$ en la Ec. (12.1.9) conduce al máximo desplazamiento $Z$:

$$Z = \frac{V_0}{\sqrt{m^2 - n^2}}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{m/2n} = V_0\sqrt{\frac{L}{2g}}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{m/2n} \qquad (12.1.11)$$

En el segundo caso, cuando

$$\frac{16\nu}{D^2} < \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

resulta una expresión negativa dentro del radical

$$n = \sqrt{-1\left[\frac{2g}{L} - \left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2\right]} = i\sqrt{\frac{2g}{L} - \left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2} = in'$$

siendo $i = \sqrt{-1}$ y $n'$ un número real. Sustituyendo $n$ por $in'$ en la Ecuación (12.1.9) se obtiene la función real

$$z = \frac{V_0}{in'} e^{-mt} \text{ Sh } in't = \frac{V_0}{n'} e^{-mt} \text{sen } n't \qquad (12.1.12)$$

ya que

$$\text{sen } n't = \frac{1}{i} \text{ Sh } in't$$

El movimiento resultante es una oscilación alrededor de $z = 0$ con amplitud decreciente como muestra la Fig. 12.2 para el caso $m/n' = \frac{1}{2}$. El tiempo $t_0$ de desplazamiento máximo o mínimo se obtiene de la Ecuación (12.1.12) haciendo $dz/dt = 0$, resultando

$$\text{tg } n't_0 = \frac{n'}{m} \qquad (12.1.13)$$

Existe un número infinito de valores de $t_0$ que satisfacen a esta expresión, que corresponden a todas las posiciones de máximo o mínimo del menisco. Sustituyendo $t_0$ en la Ec. (12.1.12)

$$Z = \frac{V_0}{\sqrt{n'^2 + m^2}} e^{-m/n \text{ arc tg } (n'/m)}$$

$$= V_0 \sqrt{\frac{L}{2g}} e^{-m/n \text{ arc tg } (n'/m)} \qquad (12.1.14)$$

*Ejemplo 12.2* Un tubo en U de 25 mm de diámetro contiene aceite, $\nu = 1 \times 10^{-5}$ m²/seg, y tiene una longitud de columna de 3 m. Aplicando aire a presión a una de las ramas del tubo se provoca una diferencia de nivel de 400 mm. Suprimiendo la presión del aire súbitamente, la columna de aceite oscila libremente. Encontrar la velocidad máxima, el máximo número de Reynolds y la ecuación de la posición de uno de los meniscos $z$ en función del tiempo.

Se supone que el régimen es laminar y bajo esta hipótesis se calcula el número de Reynolds. Las constantes $m$ y $n$ valen

$$m = \frac{16\nu}{D^2} = \frac{16 \times 10^{-5}}{25^2 \times 10^{-6}} = 0{,}256$$

$$n = \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}} = \sqrt{0{,}256 - \frac{19{,}6}{3}} = \sqrt{-1}\sqrt{6{,}468} = i2{,}543$$



o sea

$n' = 2{,}543$

Las Ecs. (12.1.12), (12.1.13) y (12.1.14) se aplican a este caso, pues el líquido oscilará por encima y por debajo de la posición $z = 0$. La oscilación comienza en la posición de máxima elongación, es decir, $Z = 0{,}2$ m. Usando la Ec. (12.1.14) se determina la velocidad (ficticia) para $z = 0$ en el instante $t_0$ antes del máximo:

$$V_0 = Z \sqrt{\frac{2g}{L}} e^{(m/n' \text{arc tg } n'/m)} = 0{,}2 \sqrt{\frac{19{,}6}{3}} e^{0{,}256/2{,}543 \text{ arc tg } 2{,}543/0{,}256} = 0{,}594 \text{ m/seg}$$

y

$$\text{tg } n't_0 = \frac{n'}{m} \qquad t_0 = \frac{1}{2{,}543} \text{ arc tg } \frac{2{,}543}{0{,}256} = 0{,}578 \text{ seg}$$

Sustituyendo en la Ec. (12.1.12)

$$z = 0{,}233\, e^{-0{,}256(t+0{,}578)} \text{ sen } 2{,}543(t + 0{,}578) + 0{,}594\, e^{-0{,}256(t+0{,}578)} \cos 2{,}543(t + 0{,}578)$$

siendo $z = Z$ para $t = 0$. La velocidad máxima (real) se presenta para $t > 0$. Derivando con respecto a $t$ para obtener la expresión de la velocidad,

$$V = \frac{dz}{dt} = -0{,}0597\, e^{-0{,}256(t+0{,}578)} \text{ sen } 2{,}543(t + 0{,}578) + 0{,}594\, e^{-0{,}256(t+0{,}578)} \cos 2{,}543(t + 0{,}578)$$

Derivando de nuevo con respecto a $t$ e igualando a cero para obtener el máximo de $V$, resulta:

$$\text{tg } 2{,}543(t + 0{,}578) = -0{,}211$$

La solución del segundo cuadrante producirá el máximo deseado, $t = 0{,}574$ seg. Sustituyendo este tiempo en la expresión de $V$ se obtiene $V = 0{,}440$ m/seg. El correspondiente número de Reynolds es

$$\mathbf{R} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0{,}440 \times 0{,}025}{1 \times 10^{-5}} = 1.100$$

por consiguiente, la hipótesis de resistencia laminar está justificada.

### *Resistencia turbulenta*

En la mayoría de los casos prácticos de oscilaciones u ondas, en sistemas de tuberías, la resistencia es turbulenta. En tuberías y túneles grandes el número de Reynolds es grande excepto en aquellos periodos de tiempo en que la velocidad es próxima a cero. Se hace la hipótesis de que la resistencia del fluido es proporcional al cuadrado de la velocidad media (siendo $f$ constante). Esto se aproxima a las condiciones reales,

pero conduce a una resistencia demasiado pequeña para movimientos lentos, en los que la resistencia es casi despreciable. Las ecuaciones se deducen para $f$ constante para oscilaciones dentro de un tubo en U sencillo. Después se extiende este caso a las oscilaciones de un líquido dentro de una tubería que conecta dos depósitos, teniendo en cuenta las pérdidas menores. Nuevamente se hace la hipótesis de que la resistencia en régimen variable es igual a la del régimen permanente a la misma velocidad.

Utilizando la Ec. (5.10.2) para sustituir $\tau_0$ en la Ec. (12.1.5),

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{fv^2}{2D} = 0 \qquad (12.1.15)$$

Integrando entre la sección 1 y la sección 2 (Fig. 12.1) y simplificando

$$\frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D}v\,|v| + \frac{2g}{L}z = 0 \qquad (12.1.16)$$

Se necesita el signo del valor absoluto en el término de la velocidad de modo que la resistencia sea opuesta a la velocidad. Poniendo $v = dz/dt$,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f}{2D}\frac{dz}{dt}\left|\frac{dz}{dt}\right| + \frac{2g}{L}z = 0 \qquad (12.1.17)$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal y no se puede integrar dos veces respecto a $z$. Se resuelve fácilmente por los métodos de Runge-Kutta (Apéndice E) con el calculador digital cuando se conocen las condiciones iniciales: $t = t_0$, $z = z_0$, $dz/dt = z_0$. Sin embargo, se puede aprender mucho de la Ec. (12.1.17), restringiendo el movimiento a la dirección $-z$; por tanto,

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{f}{2D}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{2g}{L}z = 0 \qquad (12.1.18)$$

La ecuación puede integrarse una vez† dando

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{4gD^2}{f^2L}\left(1 + \frac{fz}{D}\right) + Ce^{fz/D} \qquad (12.1.19)$$

† Sustituyendo

$$p\ \frac{dz}{dt} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dt} = p\frac{dp}{dz}$$

entonces

$$p\frac{dp}{dz} - \frac{f}{2D}p^2 \times \frac{2gz}{L} = 0$$

Se puede hacer diferencial exacta esta ecuación multiplicando por el factor integrante $e^{-fz/D}$. Para el método detallado ver Earl D. Rainville, «Elementary Differential Equations», 3.ª ed., The Macmillan Company, Nueva York, 1964.



siendo $C$ la constante de integración. Se calcula la constante teniendo en cuenta que $z = z_m$ para $dz/dt = 0$

$$C = -\frac{4gD^2}{f^2L}\left(1 + \frac{fz_m}{D}\right)e^{-fz_m/D}$$

y

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{4gD^2}{f^2L}\left[1 + \frac{fz}{D} - \left(1 + \frac{fz_m}{D}\right)e^{f(z-z_m)/D}\right] \qquad (12.1.20)$$

Aunque esta ecuación no puede integrarse de nuevo, la integración numérica, en casos particulares, conduce a la expresión de $z$ en función de $t$. La ecuación, no obstante, puede utilizarse para determinar la magnitud de las oscilaciones sucesivas. En los instantes de $z$ máximo o mínimo, es decir, $z_m$ y $z_{m+1}$, respectivamente, $dz/dt = 0$ y la Ec. (12.1.20) se simplifica

$$\left(1 + \frac{fz_m}{D}\right)\exp\left(-\frac{fz_m}{D}\right) = \left(1 + \frac{fz_{m+1}}{D}\right)\exp\left(-\frac{fz_{m+1}}{D}\right) \qquad (12.1.21)$$

Como la ecuación original, Ec. (12.1.18), sirve únicamente para $z$ decreciente, $z_m$ debe ser positivo y $z_{m+1}$ negativo. Para hallar $z_{m+2}$ debe considerarse el otro menisco y debe ponerse $z_{m+1}$, que es positivo, en el miembro de la izquierda de la ecuación para determinar $z_{m+2}$, que saldrá negativo, en vez de $z_{m+1}$, en el miembro de la derecha de la ecuación.

***Ejemplo 12.3*** Un tubo en U de 0,6 m de diámetro con $f = 0{,}03$ tiene una oscilación máxima (Fig. 12.1) de $z_m = 6$ m. Determinar la posición más baja de la superficie y la siguiente más alta.

De la Ec. (12.1.21)

$$\left(1 + \frac{0{,}03 \times 6}{0{,}6}\right)e^{(-0{,}03\times 6)/0{,}6} = \left(1 + \frac{0{,}03}{0{,}6}z_{m+1}\right)e^{(-0{,}03/0{,}6z_{m+1})}$$

o sea,

$$(1 + 0{,}05z_{m+1})e^{(-0{,}05z_{m+1})} = 0{,}963$$

que se satisface para $z_{m+1} = -5{,}1$ m. Utilizando $z_m = 5{,}1$ en la Ec. (12.1.21),

$$(1 + 0{,}05z_{m+1})e^{(-0{,}05z_{m+1})} = \left(1 + \frac{0{,}03 \times 5{,}1}{0{,}6}\right)e^{(-0{,}05\times 5{,}1)} = 0{,}972$$

que se satisface para $z_{m+1} = -4{,}5$ m. Por consiguiente, el mínimo de la superficie del agua es $z = -5{,}1$ m, y el máximo más próximo es $z = 4{,}5$ m.

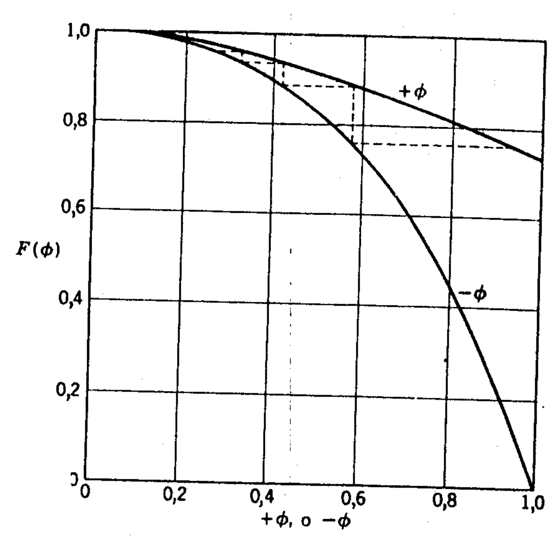



*Fig. 12.3* Solución gráfica de $F(\phi) = (1 + \phi)e^{-\phi}$.

La Ec. (12.1.21) puede resolverse gráficamente: si $\phi = fz/D$, entonces

$$F(\phi) = (1 + \phi)e^{-\phi} \tag{12.1.22}$$

la cual se ha representado gráficamente en la Fig. 12.3 tomando $F(\phi)$ como ordenada y $+\phi$ o $-\phi$ como abscisas positivas. Valores sucesivos de $\phi$ se han calculado según se indica con la línea de puntos escalonada.

Aunque $z$ no puede hallarse como función de $t$ por la Ec. (12.1.20), $V$ es una función dada de $z$, ya que $V = dz/dt$. El valor $z'$ de $z$ que hace máxima la velocidad se encuentra igualando a cero $dV^2/dz$, es decir,

$$\frac{dV^2}{dz} = 0 = \frac{f}{D} - \left(1 + \frac{fz_m}{D}\right) \exp\left(\frac{f(z' - z_m)}{D}\right)\frac{f}{D}$$

y despejando $z'$

$$z' = z_m - \frac{D}{f}\ln\left(1 + \frac{fz_m}{D}\right)$$

y sustituyendo en la Ec. (12.1.20) resulta la velocidad máxima

$$V_m^2 = \frac{4gD^2}{f^2L}\left[\frac{fz_m}{D} - \ln\left(1 + \frac{fz_m}{D}\right)\right] \tag{12.1.23}$$



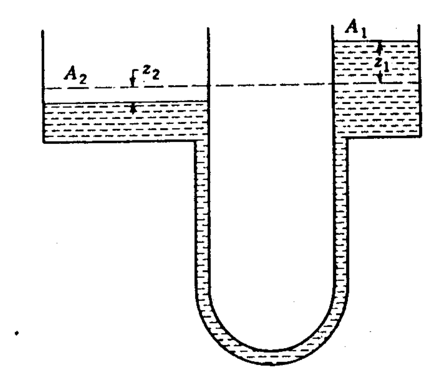



*Fig. 12.4* Oscilación de dos depósitos.

*Oscilación de dos depósitos*

La ecuación de la oscilación de dos depósitos conectados por una tubería es la misma que la oscilación de un tubo en U excepto los valores de los términos constantes. Si $z_1$ y $z_2$ representan los desplazamientos de la superficie de los depósitos desde sus posiciones de equilibrio (Figura 12.4) y si $z$ representa el desplazamiento de una partícula de agua dentro de la tubería de conexión desde su posición de equilibrio,

$$zA = z_1A_1 = z_2A_2$$

siendo $A_1$ y $A_2$ las áreas de los depósitos, supuestas constantes en esta deducción. Haciendo intervenir las pérdidas menores mediante la longitud equivalente $L_e$, la ecuación del movimiento es

$$-\gamma A(z_1 + z_2) + \frac{\gamma A f L_e}{2gD}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{\gamma A L}{g}\frac{d^2z}{dt^2}$$

para $z$ disminuyendo. Simplificando

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{f}{2D}\frac{L_e}{L}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{gA}{L}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)z = 0 \tag{12.1.24}$$

comparando con la Ec. (12.1.18) se ve que $f$ está remplazada por $fL_e/L$ y $2g/L$ por $gA(1/A_1 + 1/A_2)/L$. En la Ec. (12.1.22)

$$\phi = f\frac{L_e}{L}\frac{z}{D}$$

***Ejemplo 12.4*** En la Fig. 12.4 se abre una válvula bruscamente en la tubería cuando $z_1 = 12$ m, $L = 600$ m, $A_1 = 20$ m², $A_2 = 30$ m², $D = 1$ m, $f = 0{,}024$ y las pérdidas menores valen $3{,}50\ V^2/2g$. Determinar las elevaciones máxima y mínima de la superficie libre del depósito $A_1$ en la oscilación que se origina como consecuencia del cierre brusco.

La longitud equivalente debida a las pérdidas menores vale

$$\frac{KD}{f} = \frac{3{,}5 \times 1}{0{,}024} = 146 \text{ m}$$

Por tanto, $L_e = 600 + 146 = 746$ m, y

$$z_m = \frac{z_1 A_1}{A} = \frac{12 \times 20}{\pi/4} = 306 \text{ m}$$

El correspondiente $\phi$ vale

$$\phi = f\frac{L_e}{L}\frac{z_m}{D} = 0{,}024 \times \frac{746}{600} \times \frac{306}{1} = 9{,}15$$

y

$$F(\phi) = (1 + \phi)e^{-\phi} = (1 + 9{,}15)e^{-9{,}15} = 0{,}00107$$

que se satisface para $\phi \cong -1{,}0$. Entonces,

$$F(\phi) = (1 + 1)e^{-1} = 0{,}736 = (1 + \phi)e^{-\phi}$$

que se satisface para $\phi = -0{,}593$. Los valores de $z_m$ son, para $\phi = -1$,

$$z_m = \frac{\phi L D}{f L_e} = \frac{-1 \times 600 \times 1}{0{,}024 \times 746} = -33{,}5$$

y para $\phi = 0{,}593$,

$$z_m = \frac{0{,}593 \times 600 \times 1}{0{,}024 \times 746} = 19{,}85$$

Los valores correspondientes de $z_1$ son:

$$z_1 = z_m \frac{A}{A_1} = -33{,}5 \times \frac{\pi/4}{20} = -1{,}315 \text{ m}$$

y

$$z_1 = 19{,}85 \times \frac{\pi/4}{20} = 0{,}780 \text{ m}$$

En este ejemplo debe notarse que las sucesivas oscilaciones son casi independientes del valor original de $z_1$, tanto más cuanto $z_1$ sea mayor que unos 6 m, aproximadamente.



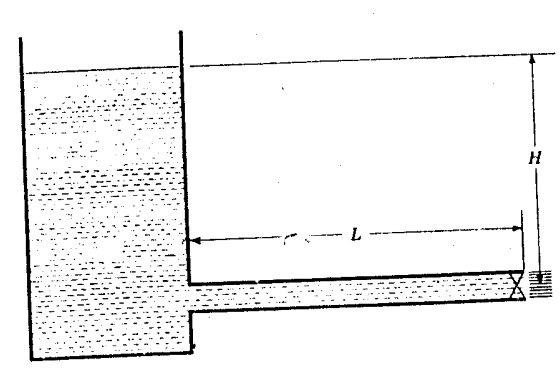



*Fig. 12.5* Notación para el establecimiento de una corriente.

## 12.2 Establecimiento de una corriente

El problema de la determinación del tiempo que tarda en establecerse una corriente en una tubería cuando se abre súbitamente una válvula se resuelve fácilmente cuando se tiene en cuenta el rozamiento y las pérdidas menores. Cuando se abre una válvula (Fig. 12.5), la altura $H$ se utiliza en acelerar la corriente en los primeros instantes, pero al aumentar la velocidad, la altura aceleradora se reduce por el rozamiento y por las pérdidas menores. Si $L_e$ es la longitud equivalente del sistema de tuberías, la velocidad final $V_0$ se obtiene aplicando la ecuación de la energía,

$$H = f\frac{L_e}{D}\frac{V_0^2}{2g} \qquad (12.2.1)$$

La ecuación de movimiento es

$$\gamma A \left(H - f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2g}\right) = \frac{\gamma A L}{g}\frac{dV}{dt}$$

Despejando $dt$ y agrupando convenientemente, y teniendo en cuenta la Ec. (12.2.1),

$$\int_0^t dt = \frac{LV_0^2}{gH}\int_0^V \frac{dV}{V_0^2 - V^2}$$

Después de integrar resulta

$$t = \frac{LV_0}{2gH}\ln\frac{V_0 + V}{V_0 - V} \qquad (12.2.2)$$

La velocidad $V$ tiende a $V_0$ asintóticamente, es decir, matemáticamente tiene que transcurrir un tiempo infinito para que $V$ alcance el valor $V_0$. Prácticamente para que $V$ alcance el valor 0,99 $V_0$, el tiempo que pasa es

$$t = \frac{LV_0}{gH}\frac{1}{2}\ln\frac{1{,}99}{0{,}01} = 2{,}646\frac{LV_0}{gH}$$

$V_0$ debe determinarse teniendo en cuenta las pérdidas menores, pero la Ec. (12.2.2) no contiene a $L_e$.

*Ejemplo 12.5* En la Fig. 12.5 las pérdidas menores son $16V^2/2g$, $f = 0{,}030$, $L = 3.000$ m, $D = 2{,}5$ m y $H = 18$ m. Determinar el tiempo que transcurre desde la apertura súbita de una válvula hasta que la velocidad alcanza un valor igual a 0,9 de la velocidad final.

$$L_e = 3.000 + \frac{16 \times 2{,}5}{0{,}03} = 4.333 \text{ m}$$

Por la Ec. (12.2.1)

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gHD}{fL_e}} = \sqrt{\frac{19{,}6 \times 18 \times 2{,}5}{0{,}03 \times 4.333}} = 2{,}61 \text{ m/seg}$$

Sustituyendo $V = 0{,}9\ V_0$ en la Ec. (12.2.2),

$$t = \frac{3.000 \times 2{,}61}{19{,}6 \times 18}\ln\frac{1{,}90}{0{,}10} = 65{,}4 \text{ seg}$$

### 12.3 Control de las olas

La oscilación de una corriente fluida en una tubería, cuando los efectos de la compresibilidad no son importantes, se denomina *ola*. En el caso en que se decelere rápidamente una corriente por el cierre del paso del líquido mediante una válvula, la compresibilidad del líquido y la elasticidad de las paredes de la tubería deben considerarse; este fenómeno, conocido con el nombre de *golpe de ariete*, se estudiará en las Secs. 12.4-12.8. Las oscilaciones en un tubo en U son casos especiales de olas. Uno de los medios de eliminar el golpe de ariete es permitir al líquido que oscile dentro de una cámara (Fig. 12.6). La válvula situada en el extremo de la tubería puede estar controlada por el regulador de una turbina que puede detener la corriente bruscamente si el generador eléctrico conectado a la turbina pierde su carga. Para hacer desaparecer rápidamente todas las cantidades de movimiento en el largo sistema de tuberías se necesitarían unas altas presiones que a su vez obligarían a una tubería muy costosa. Con una cámara de equilibrio tan cercana a la válvula como sea posible, aunque aparezcan olas entre el depósito y la cámara de equilibrio se evitará el que aparezcan altas presiones. Es todavía necesario proyectar la tubería entre la cámara de equilibrio y la válvula, de forma que resista el golpe de ariete.



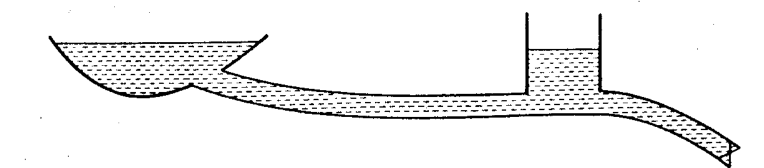


*Fig. 12.6 Chimenea de equilibrio en una tubería larga.*

Las cámaras de equilibrio pueden clasificarse en *sencillas*, de *orificio* y *diferenciales*. La cámara de equilibrio sencilla tiene una abertura igual a su sección, y debe ser del tamaño adecuado para que el líquido no rebose (a menos que se le provea de un vertedero) ni llegue a estar vacía para que no permita al aire entrar en la tubería. Su tamaño debe de ser tal que no entre en resonancia con el regulador que actúa sobre la válvula. El periodo de oscilación de una cámara sencilla es relativamente largo.

La cámara de equilibrio de orificio tiene una abertura restringida, es decir, un orificio de comunicación entre la tubería y la cámara, y, por consiguiente, permite cambios de presión más rápidos en la tubería que la cámara de equilibrio sencilla. Los cambios de presión permiten un ajuste más rápido del caudal a la nueva posición de la válvula y las pérdidas a través del orificio ayudan a disipar el exceso de energía que resulta del cierre de la válvula.

La cámara de equilibrio diferencial (Fig. 12.7) es, en definitiva, una combinación de una cámara de equilibrio de orificio y de otra sencilla de pequeña sección. En el caso de una apertura rápida de la válvula, una cantidad limitada de líquido pasa directamente desde la parte central hacia la cámara grande aumentando su cantidad de líquido. En caso de

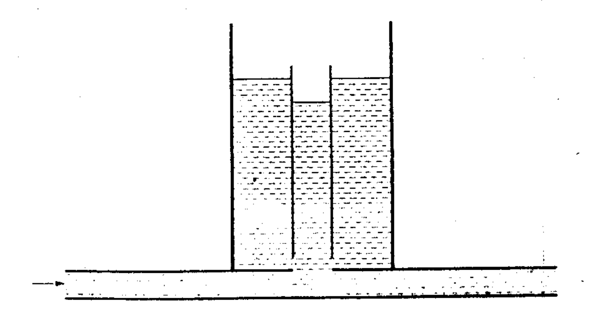


*Fig. 12.7 Chimenea de equilibrio diferencial.*

cierre rápido de la válvula, el depósito central está proyectado de tal forma que rebose dentro de la cámara que lo envuelve.

Cámaras de equilibrio trabajando con aire a presión se utilizan en algunos casos, como, por ejemplo, después de una bomba alternativa. Generalmente no son económicas para grandes tuberías.

El estudio detallado de las cámaras de equilibrio conduce a la integración numérica de la ecuación del movimiento para el líquido de la tubería tomando en consideración la velocidad de cierre de la válvula junto con la ecuación de continuidad. La elección de la cámara de equilibrio más conveniente para una situación dada se hace después de un estudio económico detallado del sistema de tuberías.

Otro medio de controlar las olas y el golpe de ariete es el de colocar una válvula de apertura rápida que se abre cuando la válvula de control se cierra. La válvula de apertura rápida tiene un cierre lento a una velocidad tal que no se producen presiones excesivas en la conducción. Esta válvula, sin embargo, produce una pérdida de líquido y no protege de las olas debidas a la apertura de una válvula o al comienzo del funcionamiento de una bomba.

Las secciones siguientes dedicadas al flujo en un conducto cerrado tienen en cuenta la compresibilidad del líquido y la elasticidad de las paredes de la tubería. Se pueden realizar los cálculos del golpe de ariete de varias maneras; se dan tres métodos: gráfico, método de las características y método analítico.

### 12.4 Descripción del fenómeno del golpe de ariete

El golpe de ariete puede presentarse aguas arriba o aguas abajo de una válvula en una tubería. Cuando se cierra bruscamente una válvula, la cantidad de movimiento de aguas arriba debe reducirse a cero muy rápidamente, lo que origina una gran presión en la válvula y causa una onda de alta presión que se mueve hacia aguas arriba de la válvula. En el lado de aguas abajo de la válvula, la cantidad de movimiento del líquido hace que éste continúe moviéndose hacia aguas abajo a menos que la presión estática sea suficientemente alta para hacerlo permanecer en reposo, en tanto la presión se reduce en la válvula. Generalmente, el fenómeno de cavitación se presenta aguas abajo. Eventualmente, el líquido llega al reposo y después es acelerado aguas arriba hacia la válvula condensando el vapor y permitiendo el impacto de la columna líquida contra la válvula. Esto desarrolla una onda de alta presión que se mueve hacia aguas abajo.

Antes de comenzar la deducción de las ecuaciones para la solución del golpe de ariete se da una descripción de la sucesión de hechos que se producen cuando se cierra súbitamente una válvula en el extremo aguas abajo de una tubería que viene de un depósito (Fig. 12.8). En este caso



se desprecia el rozamiento. En el instante en que se cierra la válvula ($t = 0$), el fluido más próximo a ella se comprime, se lleva al reposo, y la pared de la tubería se dilata (Fig. 12.8*a*). Tan pronto como se comprime la primera capa el proceso se repite a la siguiente. El fluido aguas arriba de la válvula sigue moviéndose hacia abajo con una velocidad sin disminuir hasta que se han comprimido capas sucesivas detrás de la válvula. La alta presión se mueve hacia arriba como una onda, dejando al pasar el fluido en reposo, comprimiéndole y ensanchando la tubería. Cuando la onda alcanza el extremo aguas arriba de la tubería ($t = L/a$ seg), todo el fluido está bajo la altura extra $h$, se ha perdido toda la cantidad de movimiento y toda la energía cinética se ha convertido en energía elástica.

Hay una situación de desequilibrio en el extremo de aguas arriba de la tubería (depósito) en el instante de la llegada de la onda de presión, ya que la presión en el depósito no ha cambiado. El fluido comienza a moverse hacia atrás empezando en el extremo de aguas arriba. Este flujo hace que la presión en la válvula vuelva al valor normal que tenía antes del cierre, la pared de la tubería vuelve a su tensión normal y el fluido tiene una velocidad $V_0$ dirigida hacia atrás. Este proceso de transformación sigue aguas abajo hacia la válvula a la velocidad del sonido $a$ en la tubería. En el instante $2L/a$ la onda llega a la válvula, las presiones vuel-

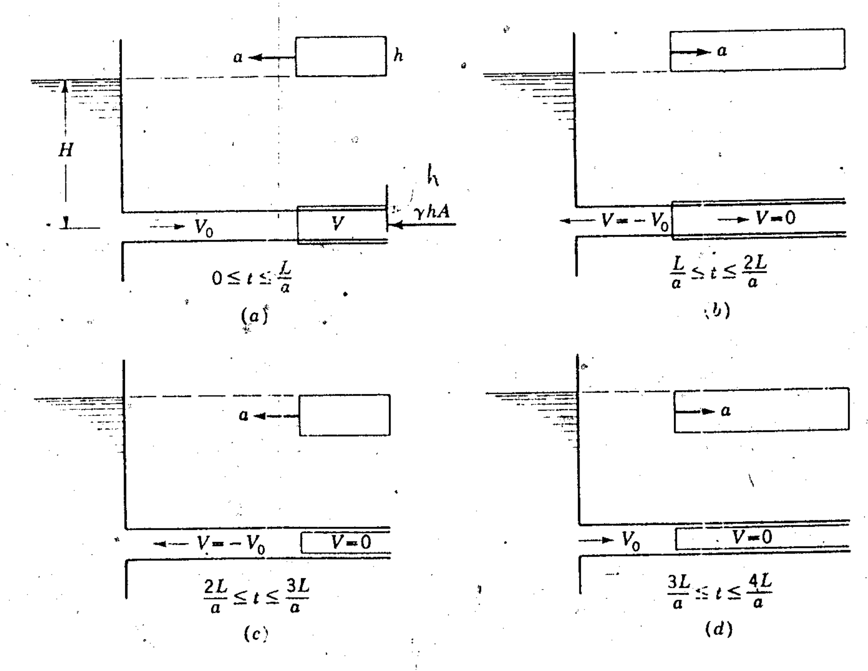



*Fig. 12.8 Secuencia de sucesos para un ciclo de cierre rápido de una válvula*

ven a ser normales a lo largo de la tubería y la velocidad es en todas partes $V_0$ en dirección hacia atrás.

Como la válvula está cerrada no hay flujo a través de ella y se desarrolla una baja presión $(-h)$ tal que el fluido es llevado al reposo. Esta onda de baja presión viaja hacia aguas arriba a la velocidad $a$ haciendo que el fluido llegue al reposo en todos los puntos, produciendo una expansión a causa de la más baja presión y permitiendo a las paredes de la tubería contraerse. (Si la presión estática en la tubería no es suficientemente alta para hacer que la presión esté por encima de la tensión del vapor, el líquido se vaporiza en parte y continúa moviéndose hacia atrás durante un largo periodo de tiempo.)

En el instante en que la onda de presión negativa llega al extremo de aguas arriba de la tubería, $3L/a$ seg después del cierre, el fluido está en reposo, pero uniformemente con una altura $-h$ menor que antes del cierre. Esto produce una situación de desequilibrio en el depósito y el fluido se mueve dentro de la tubería adquiriendo una velocidad $V_0$ hacia delante y haciendo volver al fluido a las condiciones normales mientras la onda progresa hacia aguas abajo a velocidad $a$. En el instante que esta onda llega a la válvula, las condiciones son exactamente las mismas que en el instante del cierre $4L/a$ seg antes.

Este proceso, por tanto, se repite cada $4L/a$ seg. La acción del rozamiento del fluido y de la imperfecta elasticidad del fluido y de la pared de la tubería, despreciada hasta ahora, hacen que se amortigüen las vibraciones y que el fluido llegue a alcanzar de forma permanente el equilibrio. El cierre de una válvula en menos de $2L/a$ se llama *cierre rápido*, *cierre lento* se refiere a tiempos de cierre mayores que $2L/a$.

La serie de sucesos que tienen lugar en una tubería pueden compararse con la rápida detención de un pesado tren cuando la máquina choca con un objeto inmóvil. El vagón que va detrás de la máquina comprime al muelle de unión con la máquina y se detiene ejerciendo una fuerza contra ésta; cada vagón, por orden, se mueve a su velocidad normal hasta que el anterior queda bruscamente en reposo. Cuando el furgón de cola llega a quedarse quieto, toda la energía que llevaba el tren está almacenada en los muelles de unión (despreciando las pérdidas). Como sobre el furgón no actúa fuerza alguna, empezará a moverse hacia atrás librando al vagón anterior de la fuerza del muelle, con lo que éste empezará a moverse hacia atrás, y así sucesivamente. Esta acción parece como una onda dirigida hacia la máquina, produciendo el movimiento de cada vagón hacia atrás con una velocidad igual a la de antes del choque. Si suponemos que la máquina ha quedado inmóvil, el vagón próximo a ella se detiene debido a que el muelle de unión entre éste y aquélla le impide continuar el movimiento, análogamente a lo que sucede con la onda de baja presión que se origina en el golpe de ariete. El proceso se repite vagón por vagón hasta que el tren se detiene de nuevo con todos los muelles de unión en tensión. El furgón es entonces atraído por la fuerza elástica del muelle que lo une al vagón anterior y empieza a moverse hacia adelante, siendo seguido a continuación por los otros vagones. Cuando esta onda alcanza la máquina, todos los vagones están en movimiento como antes del choque. Entonces se repite de nuevo el ciclo. El rozamiento actúa de tal manera que la energía se reduce a cero después de unos cuantos ciclos.



## 12.5 Ecuaciones diferenciales para el cálculo del golpe de ariete

Se aplican dos ecuaciones fundamentales de la mecánica a un segmento pequeño de fluido en una tubería para obtener las ecuaciones diferenciales para el flujo transitorio: el segundo principio de Newton del movimiento y la ecuación de continuidad. Las variables dependientes son la altura de la línea de alturas piezométricas $H$ por encima de un eje de referencia fijo y la velocidad media $V$ en una sección recta. Las variables independientes son la distancia $x$ a lo largo de la tubería medida desde el extremo aguas arriba y el tiempo $t$; por consiguiente, $H = H(x,t)$, $V = V(x,t)$. En esta deducción no se tiene en cuenta el efecto de la relación de Poisson. Para tuberías con juntas de expansión éstas no se consideran en la deducción. Se considera que el rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad.

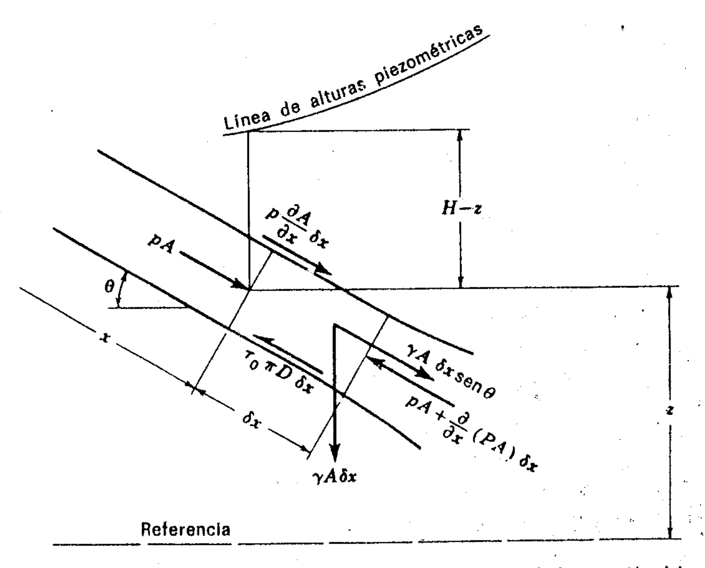



*Fig. 12.9 Diagrama de cuerpo libre para la deducción de la ecuación del movimiento.*

*Ecuación del movimiento*

El elemento de fluido entre dos planos paralelos separados $\delta x$, normales al eje de la tubería, se toma como cuerpo libre para la aplicación del segundo principio de Newton del movimiento en la dirección axial (Fig. 12.9). En forma de ecuación

$$pA - \left[pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\,\delta x\right] + p\frac{\partial A}{\partial x}\,\delta x + \gamma A\,\delta x \operatorname{sen}\theta - \tau_0 \pi D\,\delta x = \rho A\,\delta x\frac{dV}{dt}$$

Dividiendo por la masa del elemento $\rho A\,\delta x$ y simplificando,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\operatorname{sen}\theta - \frac{4\tau_0}{\rho D} = \frac{dV}{dt} \qquad (12.5.1)$$

Introduciendo la altura de la línea de alturas piezométricas, de $p = \rho g(H - z)$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cong \rho g\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad (12.5.2)$$

Pero

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{sen}\theta$$

y

$$g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4\tau_0}{\rho D} + \frac{dV}{dt} = 0 \qquad (12.5.3)$$

Para flujo turbulento permanente, $\tau_0 = \rho f V^2/8$ [Ec. (5.10.2)]. Se hace la hipótesis de que el coeficiente de rozamiento es el mismo que en flujo permanente. Por tanto, la ecuación del movimiento se convierte en

$$g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV^2}{2D} = 0 \qquad (12.5.4)$$

Como el rozamiento se debe oponer al movimiento, $V^2$ se escribe $V\,|\,V\,|$ para darle el signo adecuado. Desarrollando el término de la aceleración,

$$L_2 = g\frac{\partial H}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV\,|\,V\,|}{2D} = 0 \qquad (12.5.5)$$



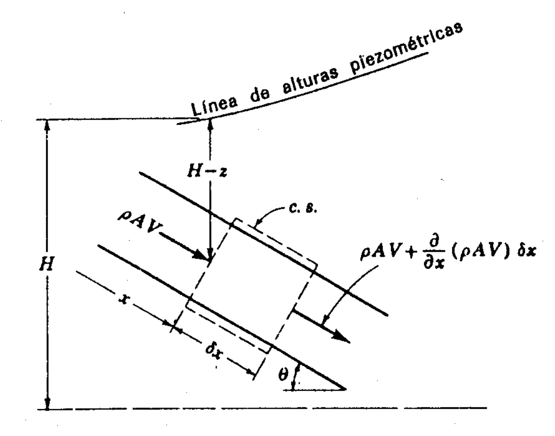



*Fig. 12.10 Volumen de control para la deducción de la ecuación de continuidad.*

Se representa la ecuación con $L_2$ para distinguirla de la ecuación de continuidad $L_1$ que se deduce a continuación.

*Ecuación de continuidad*

La ecuación de continuidad no permanente (3.5.5) se aplica al volumen de control de la Fig. 12.10,

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho A V)\,\delta x = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A\,\delta x) \qquad (12.5.6)$$

donde $\delta x$ no es una función de $t$. Desarrollando la ecuación y dividiendo por la masa $\rho A\,\delta x$,

$$\frac{V}{A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{V}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (12.5.7)$$

Los dos primeros términos son la derivada total† $(1/A)\,dA/dt$ y los dos siguientes la derivada total $(1/\rho)\,d\rho/dt$, luego

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (12.5.8)$$

El primer término se refiere a la elasticidad de la tubería y a su velocidad de deformación con la presión; el segundo tiene en cuenta la com-

† Ver el Apéndice B y las ecuaciones que siguen a la Ecuación (12.6.3).

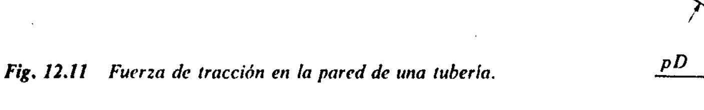



*Fig. 12.11* *Fuerza de tracción en la pared de una tubería.*

presibilidad del líquido. Para la elasticidad de la pared, la velocidad de variación de la fuerza de tracción por unidad de longitud (Fig. 12.11) es $(D/2)\,dp/dt$; al dividir por el espesor $t'$ de la pared da la velocidad de variación de la tensión $(D/2t')\,dp/dt$; al dividir por el módulo de elasticidad de Young del material de la pared se obtiene la velocidad de aumento de la deformación unitaria, $(D/2t'E)\,dp/dt$. Al multiplicar por el radio $D/2$ se obtiene la velocidad de alargamiento radial; por último, al multiplicar por el perímetro $\pi D$ se obtiene la velocidad de aumento del área:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{D}{2t'E}\frac{dp}{dt}\frac{D}{2}\pi D$$

y de aquí

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = \frac{D}{t'E}\frac{dp}{dt} \qquad (12.5.9)$$

De la definición del módulo volumétrico de elasticidad del fluido (Cap. 1),

$$K = -\frac{dp}{d\forall/\forall} = \frac{dp}{d\rho/\rho}$$

y la velocidad de variación de la densidad dividida por la densidad da

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dp}{dt} \qquad (12.5.10)$$

Utilizando las Ecs. (12.5.9) y (12.5.10), la Ec. (12.5.8) se convierte en

$$\frac{1}{K}\frac{dp}{dt}\left(1 + \frac{K}{E}\frac{D}{t'}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (12.5.11)$$

Es conveniente expresar las constantes de esta ecuación en la forma

$$a^2 = \frac{K/\rho}{1 + (K/E)(D/t')c_1} \qquad (12.5.12)$$



donde $c_1$ es la unidad para la tubería con juntas de expansión. Ahora la Ec. (12.5.11) se convierte en

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + a^2\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (12.5.13)$$

Ahora bien, como $p = \rho g(H - z)$ (Fig. 12.10),

$$\frac{dp}{dt} = V\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= V\rho g\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \rho g\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

La variación de $\rho$ respecto a $x$ o $t$ es mucho menor que la variación de $H$ respecto a $x$ o $t$, por tanto, se ha considerado que $\rho$ era constante en la ecuación anterior. Si la tubería está en reposo, $\partial z/\partial t = 0$ y $\partial z/\partial x = -\text{sen}\,\theta$; por tanto,

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = Vg\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen}\,\theta\right) + g\frac{\partial H}{\partial t}$$

y la Ec. (12.5.13) se convierte en

$$L_1 = \frac{a^2}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + V\,\text{sen}\,\theta = 0 \qquad (12.5.14)$$

que es la ecuación de continuidad para un líquido compresible en una tubería elástica. $L_1$ y $L_2$ proporcionan dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales en $V$ y $H$ en función de las variables independientes $x$ y $t$. No se conoce ninguna solución general de estas ecuaciones, pero se pueden resolver por el método de las características para una solución adecuada en diferencias finitas con el calculador digital. Después, eliminando términos de menor importancia se obtienen ecuaciones que se pueden resolver gráfica y aritméticamente.

## 12.6 El método de solución de las características

Las ecuaciones $L_1$ y $L_2$ de la sección anterior contienen dos incógnitas. Estas ecuaciones se pueden combinar con un multiplicador desconocido tal como $L = L_1 + \lambda L_2$. Un par de valores de $\lambda$ cualesquiera, reales y distintos, da un par de ecuaciones en $V$ y $H$ que contienen todo el significado físico de las ecuaciones originales $L_1$ y $L_2$ y pueden sustituirlas en una solución cualquiera. Puede suceder que resulte una gran simpli-

ficación si se encuentran dos valores particulares de $\lambda$. $L_1$ y $L_2$ se sustituyen en la ecuación de $L$ con cierto reagrupamiento.

$$L = \left[\frac{\partial H}{\partial x}(V + \lambda g) + \frac{\partial H}{\partial t}\right] + \lambda\left[\frac{\partial V}{\partial x}\left(V + \frac{a^2}{g\lambda}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\right] + V \operatorname{sen}\theta + \lambda\frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (12.6.1)$$

Esta expresión se ordena de modo que el primer término entre corchetes sea la derivada total $dH/dt$ si

$$\frac{dx}{dt} = V + \lambda g \quad (12.6.2)$$

y el segundo término entre corchetes sea $dV/dt$ si

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{a^2}{g\lambda} \quad (12.6.3)$$

ya que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

del cálculo. Las Ecs. (12.6.2) y (12.6.3) deben ser equivalentes,

$$V + \lambda g = V + \frac{a^2}{g\lambda} \quad (12.6.4)$$

Despejando $\lambda$,

$$\lambda = \pm\frac{a}{g} \quad (12.6.5)$$

Por tanto, se han hallado dos valores de $\lambda$ reales y distintos que convierten las dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias limitadas por las Ecs. (12.6.2) y (12.6.3).

Estas ecuaciones, sustituido $\lambda$, se convierten en

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dH}{dt} + \frac{a}{g}\frac{dV}{dt} + V \operatorname{sen}\theta + \frac{afV|V|}{2gD} = 0 \quad (12.6.6)\\ &\frac{dx}{dt} = V + a \quad (12.6.7)\end{aligned}\right\} C^+$$



$$\left.\begin{aligned} &\frac{dH}{dt} - \frac{a}{g}\frac{dV}{dt} + V \operatorname{sen}\theta - \frac{afV|V|}{2gD} = 0 \quad (12.6.8)\\ &\frac{dx}{dt} = V - a \quad (12.6.9)\end{aligned}\right\} C^-$$

Para entender el significado de estas cuatro ecuaciones, es conveniente considerar que la solución se obtiene en un diagrama $xt$ (Fig. 12.12). Consideremos que se conocen $V$ y $H$ en los dos puntos conocidos $R$ y $S$ de la figura. La curva denominada $C^+$ es un diagrama de la Ec. (12.6.7); la Ec. (12.6.6) solo es válida a lo largo de la característica $C^+$. La curva denominada $C^-$ es un diagrama de la Ec. (12.6.9); la Ec. (12.6.8) solo es válida a lo largo de la característica $C^-$. Cada ecuación, (12.6.6) y (12.6.8), contiene dos incógnitas para un punto conocido sobre su característica, pero en la intersección $P$ de $C^+$ y $C^-$ ambas ecuaciones se pueden resolver para dar $VP$ y $HP$. En este punto las Ecs. (12.6.7) y (12.6.9) también se pueden resolver para dar $x$ y $t$. Por consiguiente, se obtiene la solución a lo largo de las características, partiendo de condiciones conocidas y hallando nuevas intersecciones de manera que se hallen alturas y velocidades para tiempos posteriores.

En los cálculos del golpe de ariete en tuberías metálicas, objeto de este estudio, $V$ es muy pequeña comparada con $a$, y se puede eliminar de las Ecs. (12.6.7) y (12.6.9). Ahora las líneas características son rectas de pendientes $\pm a$. $a$ es la velocidad con que se transmite a lo largo de la tubería la onda de presión. Se considera que la tubería está construida con $N$ tramos iguales (Fig. 12.13) y $H$ y $V$ se conocen inicialmente en cada una de las secciones en que se ha dividido la tubería. Entonces se puede obtener la solución del problema del golpe de ariete en las intersecciones de las líneas características, como se indica por los puntos gruesos. Se ha de tener en cuenta que la solución se obtiene solo sobre una región limitada, a menos que se dé algún dato, en $x = 0$ y $x = L$, de alguna condición externa como función del tiempo. (Ver «Condiciones de contorno».)

En la malla de la Fig. 12.13 se ve que el intervalo de tiempo de cálculo es $\Delta t = \Delta x/a$. Utilizando el reticulado, $x$ y $t$ se conocen en cada inter-

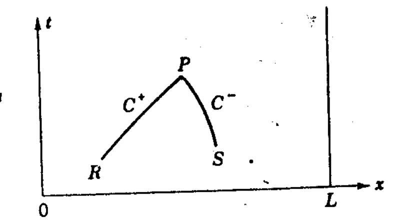



*Fig. 12.12 Diagrama xt de las características a lo largo de las que se obtiene la solución.*

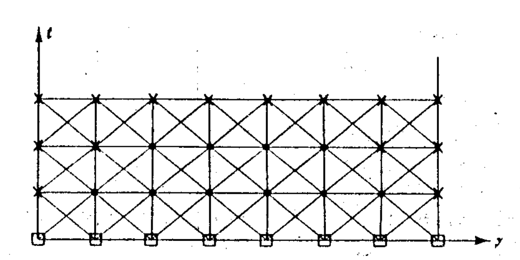



*Fig. 12.13 Red rectangular para la solución de las ecuaciones características.*

sección y no hace falta considerar más las Ecs. (12.6.7) y (12.6.9). Escribiendo las Ecs. (12.6.6) y (12.6.8) en notación de diferencias finitas (Fig. 12.14); para la Ec. (12.6.6)

$$dH = HP(I) - H(I-1) \qquad dV = VP(I) - V(I) \qquad dt = \Delta t$$

entonces

$$HP(I) - H(I-1) + \frac{a}{g}(VP(I) - V(I-1)) + V(I-1)\,\text{sen}\,\theta\,\Delta t + \frac{af\,\Delta t}{2gD}V(I-1)|V(I-1)| = 0 \quad (12.6.10)$$

y análogamente para la Ec. (12.6.8)

$$HP(I) - H(I+1) - \frac{a}{g}(VP(I) - V(I+1)) + V(I+1)\,\text{sen}\,\theta\,\Delta t - \frac{af\,\Delta t}{2gD}V(I+1)|V(I+1)| = 0 \quad (12.6.11)$$

Sumando las dos últimas ecuaciones se elimina $VP(I)$:

$$HP(I) = 0.5(H(I-1) + H(I+1) + \frac{a}{g}(V(I-1) - V(I+1)) - \text{sen}\,\theta\,\Delta t\,(V(I-1) + V(I+1)) - \frac{a}{2gD}f\,\Delta t\,(V(I-1)|V(I-1)| - V(I+1)|V(I+1)|)) \quad (12.6.12)$$



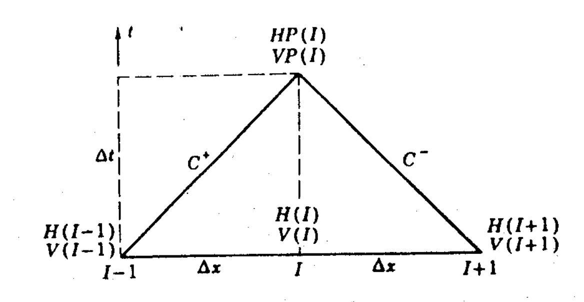



*Fig. 12.14 Notación de diferencias finitas.*

Análogamente, al restar se obtiene $VP(I)$:

$$VP(I) = 0.5(V(I-1) + V(I+1) + \frac{g}{a}(H(I-1) - H(I+1) - \text{sen}\,\theta\,\Delta t\,(V(I-1) - V(I+1))) - \frac{f}{2D}\Delta t\,(V(I-1)|V(I-1)| + V(I+1)|V(I+1)|)) \quad (12.6.13)$$

Estas dos últimas ecuaciones se emplean en un circuito continuo para despejar $VP$ y $HP$ para $I = 1$ a $N - 1$. Después se utilizan las condiciones de contorno para despejar $HP(0)$, $VP(0)$ y $HP(N)$, $VP(N)$. Obtenidas éstas, se pueden escribir los resultados, y después se sustituyen los valores de $V(I)$ y $H(I)$ por los de $VP(I)$ y $HP(I)$, incrementado el tiempo, y se repite el proceso.

*Condiciones de contorno*

En el extremo aguas arriba o de la izquierda, la Ec. (12.6.11) para la característica $C^-$ (para $I = 0$) da una ecuación en las dos incógnitas $VP(0)$ y $HP(0)$ (Fig. 12.15*a*). Se necesita una condición exterior a la tubería para resolver la ecuación. Por ejemplo, consideremos que se sitúa un depósito en el extremo aguas arriba, con altura $HR$ por encima de la línea central de la tubería. Despreciando las pérdidas menores en la entrada (Fig. 12.16), se puede aplicar la ecuación de Euler no permanente [Ec. (12.1.1)]. El último término $\partial v/\partial t\,ds$ es cero excepto en la boca, y para esta distancia $ds$ muy corta se puede considerar pequeña, de manera que se elimina, quedando

$$HR = HP(0) + \frac{(VP(0))^2}{2g} \quad (12.6.14)$$

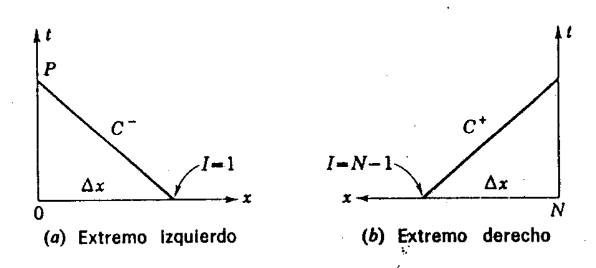



*Fig. 12.15 Condiciones de contorno.*

Sin embargo, para el flujo de retorno, $HR = HP(0)$. Entre esta ecuación y la Ec. (12.6.11) da $HP(0)$ y $VP(0)$. Como otro ejemplo de una condición de contorno aguas arriba, se puede dar el caudal en función del tiempo, lo que permite una solución fácil.

En el extremo aguas abajo, o de la derecha, de la tubería (Fig. 12.15*b*) se da la característica $C^+$ mediante la Ec. (12.6.10) para $I = N$. Se necesita una condición externa; para esta sección se elige una válvula (Figura 12.17). Para el flujo permanente a través de la válvula, considerada como un orificio,

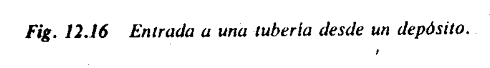
$$AV_0 = (C_dA_v)_0\sqrt{2gH_0} \qquad (12.6.15)$$

siendo $A$ el área de la tubería, $H_0$ la altura a través de la válvula, $(C_dA_v)_0$ el área del orificio por el coeficiente de desagüe y $V_0$ la velocidad en régimen permanente en la tubería. En general, para otro orificio

$$A\,VP(N) = C_dA_v\sqrt{2gHP(N)} \qquad (12.6.16)$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera,

$$\frac{VP(N)}{V_0} = \tau\sqrt{\frac{HP(N)}{H_0}} \qquad (12.6.17)$$



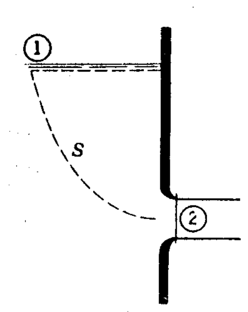



*Fig. 12.16 Entrada a una tubería desde un depósito.*



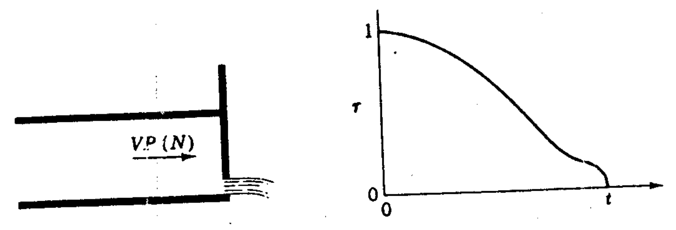




*Fig. 12.17 Válvula en el extremo aguas abajo de una tubería.*

donde $\tau$ es el coeficiente sin dimensiones de abertura de la válvula. $\tau = 1$ para flujo permanente y se reduce a cero cuando la válvula se cierra. Entre la Ec. (12.6.17) y la Ec. (12.6.10) se obtienen $VP(N)$ y $HP(N)$. Generalmente se da $\tau$ en función de $t$. La solución implica la solución de una ecuación cuadrática; es importante que se tome el signo bien.

Se da un programa de un calculador para la solución del problema fundamental del golpe de ariete al cerrar una válvula en el extremo aguas abajo de una tubería, con un depósito en el extremo aguas arriba. En la Fig. 12.18 el programa está en el lenguaje de funcionamiento del Michigan Algorithmic Decoder (MAD) (ver el Apéndice E), y en el Apéndice E se presenta el mismo programa en lenguaje FORTRAN. En este programa el cierre de la válvula viene dado por la ecuación

$$\tau = \left(1 - \frac{t}{t_C}\right)^m \qquad (12.6.18)$$

donde $t_C$ es el tiempo de cierre. Se toma la tubería horizontal de modo que $\theta = 0$.

*Ejemplo 12.6* Obtener la solución del problema del golpe de ariete del cierre de una válvula en el extremo aguas abajo de una tubería con las condiciones siguientes: $L = 5743{,}5$ pies, $a = 3927$ pies/seg, $D = 4$ pies, $f = 0{,}019$, $V_0 = 3{,}6$ pies/seg, $T_C = 6{,}2$ seg, $T_{max} = 10$ seg, $H_0 = 300$ pies, para el cierre de la válvula de la Ecuación (12.6.18) con $m = 3{,}2$.

Se emplea el programa del calculador de la Fig. 12.8 para los datos del problema, para $N = 10$, con $J = 2$, que evita todos los demás cálculos. Por motivos de espacio solo se muestra una parte de la solución (Fig. 12.19). Es interesante seguir la onda de presión a través de la tubería.

Se pueden extender fácilmente los métodos para la solución por el calculador a sistemas más complicados. Las referencias del final del capítulo incluyen muchas soluciones especiales.

```
          BASIC WATERHAMMER PROGRAM. RESERVOIR AT UPSTREAM END OF PIPE
          AND VALVE AT DOWNSTREAM END. TAU=(1.-T/TC).P.M
           INTEGER I,N,J,U
           DIMENSION (V,VP,H,HP)(100)
A1         READ DATA
           PRINT RESULTS L,A,N,D,F,VO,TC,TMAX,HO,J,G,M
          STEADY STATE CALCULATIONS
           DHF=F*L*VO*VO/(2.*G*D*N)
           HR=HO+N*DHF+VO*VO/(2.*G)
           THROUGH A2,FOR I=0,1,I.G.N
           V(I)=VO
A2         H(I)=HO+(N-I)*DHF
           C2=G/A
           C4=VO*VO/(C2*HO)
           TAU=1.
           T=0.
           DT=L/(A*N)
           FF=F*DT/(2.*D)
           U=0
           PRINT COMMENT$1         HEADS AND VELOCITIES AT TENTH POINTS
         2 ALONG THE PIPES
           PRINT COMMENT$0    TIME    TAU    X/L=    0.        .1        .2
         2   .3       .4       .5       .6       .7       .8       .9       1.$
A3         PRINT FORMAT$1HO,F7.3,F7.3,S2,3H H=,11F8.2/S16,3H V=,11F8.2*$,T,TAU,H.
         2 ..H(N),V...V(N)
A4         T=T+DT
           U=U+1
           WHENEVER T.G.TMAX,TRANSFER TO A1
          COMPUTATION OF INTERIOR POINTS
           THROUGH A5,FOR I=1,1,I.E.N
           VP(I)=.5*(V(I-1)+V(I+1)+C2*(H(I-1)-H(I+1))-FF*(V(I-1)*.ABS.V(
         2 I-1)+V(I+1)*.ABS.V(I+1)))
A5         HP(I)=.5*(H(I-1)+H(I+1)+(V(I-1)-V(I+1))/C2-FF*(V(I-1)*.ABS.V(
         2 I-1)-V(I+1)*.ABS.V(I+1)))/C2)

          UPSTREAM BOUNDARY CONDITION
           C5=H(1)-(V(1)-FF*V(1)*.ABS.V(1))/C2
           WHENEVER V.L.0.
           HP=HR
           VP=C2*(HP-C5)
           OTHERWISE
           VP=A*(SQRT.(1.+2.*G*(HR-C5)/(A*A))-1.)
           HP=C5+VP/C2
           END OF CONDITIONAL
          DOWNSTREAM BOUNDARY CONDITION
           C1=V(N-1)+C2*H(N-1)-FF*V(N-1)*.ABS.V(N-1)
           WHENEVER T.LE.TC
           TAU=(1.-T/TC).P.M
           OTHERWISE
           TAU=0.
           VP(N)=0.
           HP(N)=C1/C2
           TRANSFER TO A6
           END OF CONDITIONAL

           C3=TAU*TAU*C4
           VP(N)=SQRT.(C3*C3/4.+C3*C1)-.5*C3
           HP(N)=(C1-VP(N))/C2
A6         THROUGH A7,FOR I=0,1,I.G.N
           V(I)=VP(I)
A7         H(I)=HP(I)
           WHENEVER U/J*J.E.U,TRANSFER TO A3
           TRANSFER TO A4
           END OF PROGRAM
```

*Fig. 12.18 Programa del golpe de ariete básico en MAD.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L = | 5743.500000, | A = | 3927.000000, | N = | 10, | D = | 4.000000 |
| F = | .019000, | V0 = | 3.600000, | TC = | 6.200000, | TMAX = | 10.000000 |
| H0 = | 300.000000, | J = | 2, | G = | 32.200000, | M = | 3.200000 |

HEADS AND VELOCITIES AT TENTH POINTS ALONG THE PIPE

| TIME | TAU | X/L= | 0. | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 | 1. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .000 | 1.000 | H= | 305.49 | 304.94 | 304.39 | 303.84 | 303.29 | 302.75 | 302.20 | 301.65 | 301.10 | 300.55 | 300.00 |
| | | V= | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 |
| .293 | .857 | H= | 305.49 | 304.94 | 304.39 | 303.84 | 303.29 | 302.75 | 302.20 | 301.65 | 301.10 | 319.89 | 339.13 |
| | | V= | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.44 | 3.28 |
| .585 | 728 | H= | 305.48 | 304.94 | 304.39 | 303.84 | 303.29 | 302.75 | 302.20 | 320.94 | 340.13 | 359.71 | 379.53 |
| | | V= | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.44 | 3.28 | 3.12 | 2.95 |
| .878 | .614 | H= | 305.48 | 304.94 | 304.39 | 303.84 | 303.29 | 321.99 | 341.14 | 360.67 | 380.45 | 400.40 | 420.40 |
| | | V= | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.44 | 3.28 | 3.12 | 2.95 | 2.78 | 2.62 |
| 1.170 | .512 | H= | 305.48 | 304.94 | 304.39 | 323.04 | 342.14 | 361.62 | 381.36 | 401.27 | 421.24 | 441.16 | 460.90 |
| | | V= | 3.60 | 3.60 | 3.60 | 3.44 | 3.28 | 3.12 | 2.95 | 2.78 | 2.62 | 2.45 | 2.29 |
| 1.463 | .423 | H= | 305.48 | 324.09 | 343.14 | 362.58 | 382.28 | 402.15 | 422.07 | 441.95 | 461.66 | 481.13 | 500.23 |
| | | V= | 3.60 | 3.44 | 3.28 | 3.12 | 2.95 | 2.79 | 2.62 | 2.45 | 2.29 | 2.12 | 1.97 |
| 1.755 | .345 | H= | 305.56 | 344.47 | 383.20 | 403.03 | 422.91 | 442.76 | 462.43 | 481.87 | 500.94 | 519.57 | 537.65 |
| | | V= | 2.97 | 2.96 | 2.95 | 2.79 | 2.62 | 2.46 | 2.29 | 2.13 | 1.97 | 1.81 | 1.66 |
| 2.048 | .277 | H= | 305.60 | 345.53 | 385.23 | 424.52 | 463.21 | 482.61 | 501.65 | 520.26 | 538.31 | 555.77 | 572.54 |
| | | V= | 2.31 | 2.31 | 2.31 | 2.30 | 2.29 | 2.13 | 1.97 | 1.82 | 1.67 | 1.52 | 1.38 |
| 2.340 | .219 | H= | 305.65 | 345.73 | 385.61 | 425.07 | 463.91 | 501.93 | 538.98 | 556.42 | 573.16 | 589.19 | 604.40 |
| | | V= | 1.65 | 1.65 | 1.65 | 1.66 | 1.66 | 1.66 | 1.67 | 1.52 | 1.38 | 1.25 | 1.12 |
| 2.633 | .171 | H= | 305.68 | 345.10 | 384.33 | 423.14 | 461.38 | 498.86 | 535.38 | 570.81 | 605.00 | 619.40 | 632.91 |
| | | V= | 1.00 | 1.00 | 1.01 | 1.02 | 1.03 | 1.05 | 1.07 | 1.10 | 1.13 | 1.01 | .89 |
| 2.925 | .130 | H= | 305.69 | 343.65 | 381.45 | 418.88 | 455.81 | 492.03 | 527.42 | 561.83 | 595.11 | 627.15 | 657.85 |
| | | V= | .35 | .36 | .37 | .39 | .42 | .45 | .49 | .53 | .58 | .63 | .69 |
| 3.218 | .096 | H= | 305.69 | 341.50 | 377.17 | 412.54 | 447.49 | 481.86 | 515.54 | 548.39 | 580.27 | 594.17 | 605.99 |
| | | V= | -.25 | -.24 | -.23 | -.20 | -.17 | -.12 | -.07 | -.01 | .06 | .27 | .49 |
| 3.510 | .069 | H= | 305.69 | 338.77 | 371.73 | 404.48 | 436.90 | 468.89 | 500.35 | 514.21 | 526.43 | 537.02 | 546.07 |
| | | V= | -.81 | -.81 | -.79 | -.76 | -.72 | -.66 | -.60 | -.39 | -.16 | .08 | .34 |
| 3.803 | .048 | H= | 305.69 | 335.60 | 365.43 | 395.13 | 424.60 | 436.85 | 447.82 | 457.56 | 466.16 | 473.70 | 480.29 |
| | | V= | -1.33 | -1.32 | -1.30 | -1.27 | -1.22 | -1.02 | -.81 | -.57 | -.32 | -.06 | .22 |
| 4.095 | .032 | H= | 305.69 | 332.15 | 358.58 | 368.00 | 376.39 | 383.85 | 390.47 | 396.38 | 401.71 | 406.53 | 410.99 |
| | | V= | -1.79 | -1.78 | -1.76 | -1.59 | -1.39 | -1.17 | -.94 | -.69 | -.43 | -.15 | .13 |

*Fig. 12.19 Solución del computador al Ejemplo 12.6.*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.388 | .020 | H= | 305.69 | 311.66 | 316.71 | 320.95 | 324.54 | 327.62 | 330.36 | 332.87 | 335.34 | 337.85 | 340.56 |
| | | V= | -2.19 | -2.05 | -1.88 | -1.69 | -1.48 | -1.25 | -1.01 | -.76 | -.49 | -.21 | .07 |
| 4.680 | .011 | H= | 305.69 | 288.58 | 271.77 | 271.40 | 270.79 | 270.07 | 269.49 | 269.15 | 269.26 | 269.91 | 271.26 |
| | | V= | -1.97 | -1.95 | -1.91 | -1.71 | -1.50 | -1.27 | -1.03 | -.77 | -.51 | -.24 | .04 |
| 4.973 | .006 | H= | 305.59 | 282.58 | 259.84 | 237.80 | 216.83 | 213.02 | 209.76 | 207.17 | 205.45 | 204.70 | 205.06 |
| | | V= | -1.63 | -1.62 | -1.59 | -1.53 | -1.46 | -1.23 | -1.00 | -.75 | -.50 | -.24 | .02 |
| 5.265 | .002 | H= | 305.69 | 278.04 | 250.77 | 224.25 | 198.88 | 174.97 | 152.87 | 148.54 | 145.62 | 143.39 | 143.59 |
| | | V= | -1.21 | -1.20 | -1.18 | -1.14 | -1.09 | -1.02 | -.93 | -.70 | -.47 | -.23 | .01 |
| 5.558 | .001 | H= | 305.69 | 275.03 | 244.75 | 215.23 | 186.84 | 159.90 | 134.78 | 111.73 | 91.05 | 88.72 | 88.05 |
| | | V= | -.73 | -.72 | -.71 | -.69 | -.65 | -.61 | -.56 | -.50 | -.43 | -.21 | .00 |
| 5.850 | .000 | H= | 305.69 | 273.55 | 241.76 | 210.69 | 180.65 | 152.00 | 125.03 | 100.00 | 77.23 | 56.89 | 39.21 |
| | | V= | -.21 | -.21 | -.20 | -.19 | -.18 | -.17 | -.15 | -.12 | -.09 | -.05 | .00 |
| 6.143 | .000 | H= | 305.69 | 273.49 | 241.60 | 210.32 | 179.95 | 150.79 | 123.11 | 97.16 | 73.19 | 68.23 | 66.58 |
| | | V= | .32 | .32 | .32 | .31 | .30 | .30 | .29 | .28 | .28 | .14 | .00 |

*Fig. 12.19 (Continuación.)*



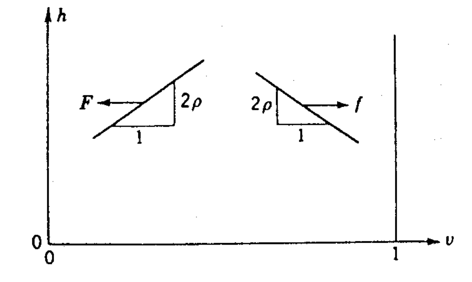



*Fig. 12.20 Diagrama de la variable dependiente adimensional utilizado en la solución del golpe de ariete por el método gráfico.*

## 12.7 Solución gráfica de los casos sencillos del golpe de ariete

Aunque el calculador es el método más satisfactorio de resolver los problemas de golpe de ariete, en algunos casos, la falta de disponibilidad del calculador o la sencillez del problema hacen posible el uso de otros métodos. En la solución gráfica se desprecia el rozamiento, así como el ángulo de inclinación de la tubería. Se aplican las Ecs. (12.6.10) y (12.6.11) al tramo de tubería completo desde la sección 1 aguas arriba hasta la sección 2 aguas abajo.

$$H_2 - H_1 = -\frac{a}{g}(V_2 - V_1) \qquad (12.7.1)$$

para una ola de impulsión que se desplaza desde la sección 1 a la sección 2. Al usar esta ecuación se debe recordar que si $H_2$ es en el instante $t$, entonces $H_1$ es la altura en la sección 1 en el instante $t - L/a$, y análogamente para $V_2$ y $V_1$. Esta ecuación se puede hacer adimensional de la manera siguiente:

$$\frac{H_2 - H_1}{H_0} = -\frac{aV_0}{gH_0}\frac{V_2 - V_1}{V_0} \qquad (12.7.2)$$

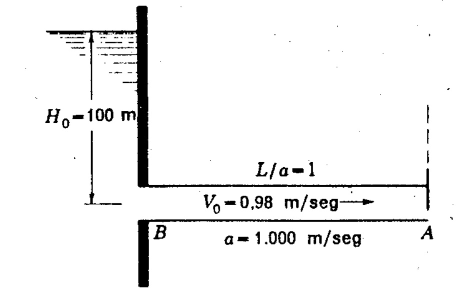



*Fig. 12.21 Cierre de una válvula en A.*

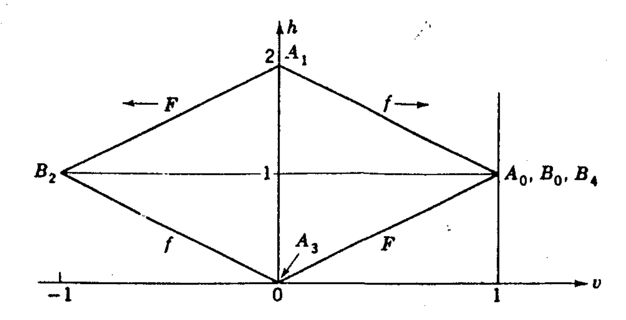



*Fig. 12.22 Solución gráfica del cierre rápido de una válvula en el extremo aguas abajo de la tubería.*

Definiendo

$$\Delta h = \frac{H_2 - H_1}{H_0} \qquad \Delta v = \frac{V_2 - V_1}{V_0} \qquad 2\rho = \frac{aV_0}{gH_0} \tag{12.7.3}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta v} = -2\rho \tag{12.7.4}$$

Análogamente, de la Ec. (12.6.11),

$$\frac{\Delta h}{\Delta v} = 2\rho \tag{12.7.5}$$

Estas dos últimas ecuaciones comprenden todo el significado físico de la traslación de la ola a lo largo de la tubería. En la Fig. 12.20 está representada cada una de estas ecuaciones como una línea recta en el diagrama $hv$. La primera ecuación corresponde a la ola que se traslada aguas abajo, y la segunda a la ola que se traslada aguas arriba. Ahora se necesitan las condiciones en los extremos de la tubería para obtener una solución significativa de un caso de golpe de ariete en una tubería simple.

Consideremos el caso del cierre rápido de una válvula (Fig. 12.21) en la tubería con los valores dados.

$$2\rho = \frac{aV_0}{gH_0} = \frac{1000 \times 0{,}98}{9{,}8 \times 100} = 1$$

En la solución gráfica (Fig. 12.22) se representa el flujo en estado permanente en $v = 1$, $h = 1$ para la tubería completa. Si la válvula se cierra en $t = 1$, entonces la solución puede empezar en $B_0$ (los subíndices se refieren al tiempo y la letra a la situación). Se trata de una onda $f$ (Figura 12.20), que parte de $B_0$ con pendiente $-2\rho$, y deben estar las con-





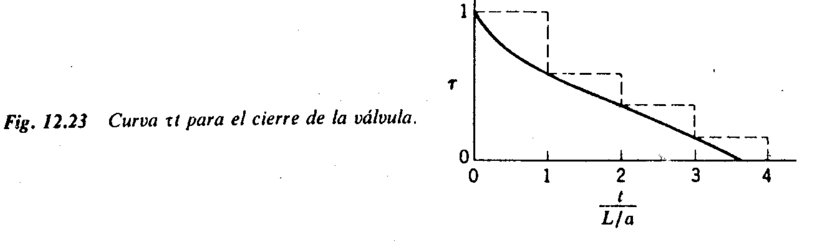



*Fig. 12.23 Curva τt para el cierre de la válvula.*

diciones en $A_1$ sobre esta línea. Sin embargo, en $A_1$ se sabe que $V = 0$, cuando se cierra la válvula; lo que hace que $v = 0$, que es el eje de ordenadas. Por consiguiente, $A_1$ se presenta donde se indica en la figura. Partiendo ahora de $A_1$ hacia $B_2$, la condición $B_2$ debe estar sobre la onda $F$ que pasa por $A_1$. En el depósito (despreciando la altura de velocidad) la altura es $h = 1$; por tanto, la intersección de $h = 1$ con la onda $F$ que pasa por $A_1$ da la situación de $B_2$. Prosiguiendo este procedimiento se sitúan $A_3$ y $B_4$. A continuación $A_5$, $B_6$, $A_7$ y $B_8$ serán una repetición del primer ciclo, etc.

Para un cierre gradual de la válvula, la Ec. (12.6.17), en forma adimensional, se convierte en

$$v = \tau\sqrt{h} \tag{12.7.6}$$

Tomando el cierre de una válvula como el dado en la Fig. 12.23 en lugar del cierre suave, se supondrá que la válvula se cierra cada $L/a$ mediante un incremento rápido. En la curva $\tau t$ se lee el valor de $\tau$ para cada incremento $L/a$. Entonces en el diagrama $vh$ la Ec. (12.7.6) se convierte en una parábola (Fig. 12.24). En cada instante en la parábola, deben aparecer los valores de $h$ y de $v$ en la válvula; por ejemplo, $A_1$ debe estar sobre la parábola $t = 1$, etc. En el otro extremo de la tubería (Fig. 12.21) $h = 1$ debido al depósito. Para empezar la solución, comenzamos en la condición permanente $B_0$ y construimos la línea $f$ que pasa por $B_0$. En esta línea debe encontrarse $A_1$, que también está sobre la parábola $t = 1$. Siguiendo de $A_1$ a $B_2$ sobre la línea $F$, su intersección con $h = 1$ da $B_2$. A continuación tracemos una línea $f$ de $B_2$ a $A_3$ y una línea $F$ desde $A_3$ a $B_4$. En todo momento después de $t = 4$ se cierra la compuerta, de manera que $A$ esté en el eje de ordenadas $v = 0$, y $B$ sobre $h = 1$. Para dar más detalle, se parte con $B$ (no perturbado, cuando el primer movimiento de la válvula esté en $t = 1$), se sigue sobre una línea $f$ a la parábola $A_2$ $t = 2$, después a $B_3$, $A_4$, etc., como se ve en la figura.

El método gráfico es el más evidente de todos. Las reflexiones en el depósito se manejan satisfaciendo la condición de altura, y análogamente cualquier reflexión en la válvula se tiene en cuenta manejando las condiciones de contorno —una gran simplificación—. Si se desean saber

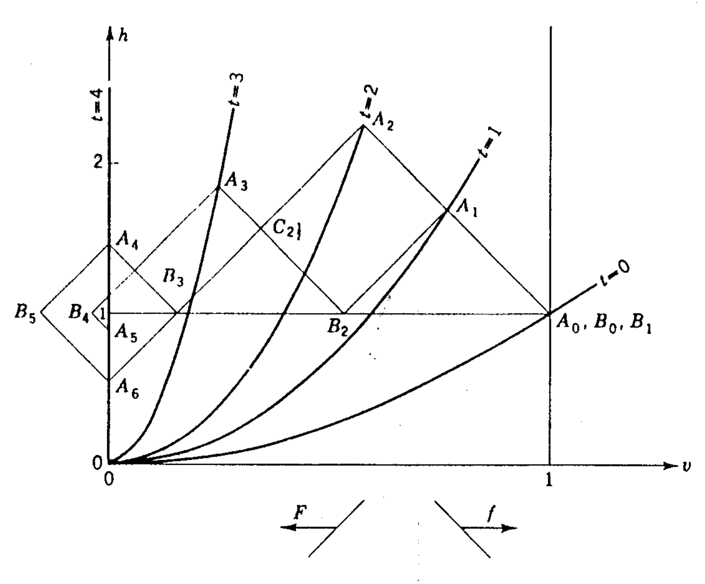



*Fig. 12.24* Solución del cierre gradual de la válvula.

los valores de $h$ y $v$ en el punto medio $C$ de la tubería, una onda que abandona $A_2$ sobre una línea $F$ llegará a $C_{2^1/_2}$, y análogamente una onda que abandona $B_2$ sobre una línea $f$ encontrará a $C_{2^1/_2}$. Por consiguiente, la intersección de estas dos líneas da $C_{2^1/_2}$. Con más detalle en la curva $\tau t$, por ejemplo, para cada $L/2a$, se pueden interpretar las intersecciones de las líneas $f$ y $F$ como valores de $v$ y $h$ en los puntos cuartos.

***Ejemplo 12.7*** Consideremos el líquido de la tubería en reposo en la tubería cerrada de la Fig. 12.25 cuando empiezan en el depósito olas de 1,2 m de altura (del seno a la cresta). Determinar la variación de altura en $A$ para unos pocos ciclos.

Como no hay velocidad en el estado permanente, se puede suponer un valor cualquiera de $V$ para calcular $2\rho$, por ejemplo $V_0 = 0{,}5$ m/seg,

$$2\rho = \frac{aV_0}{gH_0} = \frac{980}{9{,}8}\,\frac{0{,}5}{5} = 10$$

Como una pendiente de 10:1 es incómoda gráficamente, la escala de ordenadas se debe hacer un décimo de la escala de abscisas. Empezar la solución en $A_0$ ($v = 0$, $h = 1$) y supongamos que se producen las crestas de la ola en $t = \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$, etc. Las intersecciones están sobre $H = 5{,}5$ m o $h = \frac{5{,}5}{5} = 1{,}1$ para $t = \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$, etc., y están en $h = \frac{4{,}5}{5} = 0{,}9$ para $t = 1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$, etc. Como $A$ está cerrado, $v = 0$ siempre, y la solución se desarrolla como se ve en la Fig. 12.26. Cuando la altura en $A$ alcanza la presión de vapor, el ciclo se romperá por una variación en la cronometración debida a la expansión y el colapso de la cavidad de vapor.



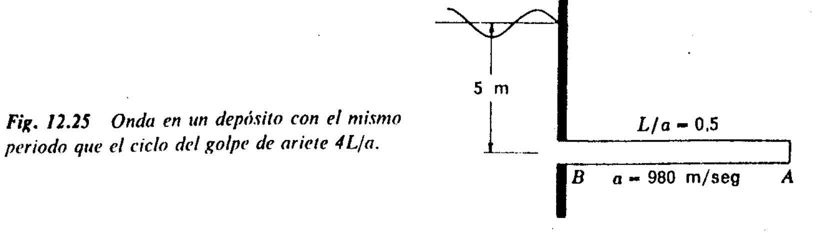



*Fig. 12.25* Onda en un depósito con el mismo periodo que el ciclo del golpe de ariete $4L/a$.

Se han resuelto problemas muy complicados mediante el método gráfico, incluyendo tuberías ramificadas, tuberías en serie, fallos de potencia en bombas, etc. Se usa mucho en el análisis de perturbaciones hidráulicas transitorias. También se puede añadir al método una corrección que tenga en cuenta el rozamiento. En la sección siguiente se da otro método de solución, basado en las ecuaciones de las características, que incluyen el rozamiento y que se pueden resolver mediante regla de cálculo o en gabinete de trabajo si no se dispone de calculador.

## *12.8 Golpe de ariete algebraico*

En el método gráfico, estudiado en la sección anterior, se aplicaron las Ecs. (12.6.10) y (12.6.11) para el caso $\theta = 0$ y sin rozamiento. En general, el término sen $\theta$ es pequeño y se puede despreciar. Estas mismas

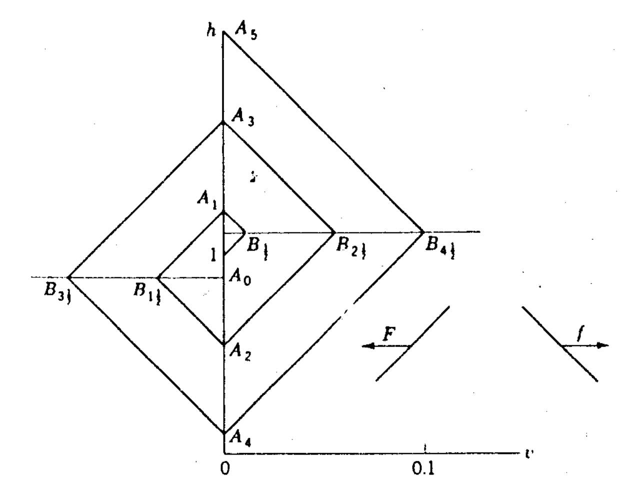



*Fig. 12.26* Solución gráfica del problema de resonancia de la Figura 12.25.

*Fig. 12.27* *Tubería dividida en P tramos iguales $L/a = P\,\Delta t$.*

C B

ecuaciones, incluido el término de rozamiento, se manejan ahora como ecuaciones algebraicas simultáneas, que se pueden resolver de varias maneras, con regla de cálculo, calculadora de mesa o calculador digital.

En primer lugar consideremos una tubería simple (Fig. 12.27) dividida en $P$ tramos iguales tales que $L/a = P\,\Delta t$, siendo $\Delta t$ el intervalo de tiempo para los cálculos del golpe de ariete. En general, el tiempo viene dado por $J\,\Delta t$, o sea el entero $J$ es un índice del tiempo. En la Ec. (12.6.10) para $\theta = 0$, aplicando la ecuación sobre toda la longitud de la tubería,

$$H_B(J) - H_C(J-P) + \frac{a}{g}\left(V_B(J) - V_C(J-P)\right) - \frac{f}{2Dg}\,a\,\frac{L}{a}\,V_C(J-P)\,|V_C(J-P)| = 0$$

Dividiendo por $H_0$, altura de régimen permanente en un punto del sistema, y poniéndola en forma adimensional,

$$h_B(J) - h_C(J-P) + B(v_B(J) - v_C(J-P)) + Hv_C(J-P)\,|v_C(J-P)| = 0 \quad (12.8.1)$$

donde $H$ es la caída de rozamiento en régimen permanente a través de la tubería dividida por $H_0$ y $B = aV_0/gH_0$. Análogamente, aplicando la Ec. (12.6.11) en toda la longitud de la tubería,

$$h_C(J) - h_B(J-P) - B(v_C(J) - v_B(J-P)) - Hv_B(J-P)\,|v_B(J-P)| = 0 \quad (12.8.2)$$

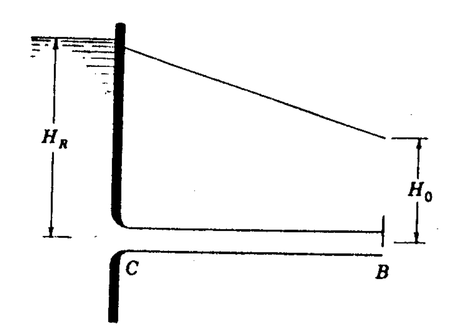



*Fig. 12.28* *Cierre de una válvula incluido el rozamiento.*



Para aplicar estas ecuaciones al cierre de una válvula en una tubería simple (Fig. 12.28) sea $H_0$ la altura de la válvula en régimen permanente; entonces

$$HR = H_0 + f\frac{L}{D}\frac{V_0^2}{2g}$$

despreciando la altura de velocidad en la entrada. En forma adimensional

$$h_r = h_C(J) = 1 + H \quad (12.8.3)$$

que es constante. Sea $\tau(J)$ la posición conocida de la válvula para cada instante $J\,\Delta t$. Entre la Ec. (12.8.1) y la ecuación de la válvula $v_B(J) = \tau(J)\sqrt{h_B(J)}$,

$$v_B(J) = -\frac{B\tau^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{B\tau^2}{2}\right)^2 + (h_C(J-P) + Bv_C(J-P) - Hv_C(J-P)\,|v_C(J-P)|)\tau^2} \quad (12.8.4)$$

De la Ec. (12.8.1)

$$h_B(J) = h_C(J-P) - B(v_B(J) - v_C(J-P)) - Hv_C(J-P)\,|v_C(J-P)| \quad (12.8.5)$$

En el depósito, de la Ec. (12.8.2),

$$v_C(J) = v_B(J-P) + \frac{1}{B}(h_r - h_B(J-P) - Hv_B(J-P)\,|v_B(J-P)|) \quad (12.8.6)$$

La solución se comienza enumerando los valores de régimen permanente que se presentan en $P\,\Delta t$ segundos si se produce el primer cierre en $J = P + 1$. Todos los valores anteriores son los mismos que los del régimen permanente.

***Ejemplo 12.8*** Determinar la altura y la velocidad en la válvula de la Fig. 12.28 por el golpe de ariete algebraico con las condiciones siguientes: $L$ = 12.000 ft, $D$ = 4 ft, $f$ = 0,02, $V_0$ = 4,01 ft/seg, $a$ = 4.000 ft/seg, $H_0$ = 200 ft, $t_C$ = 10 seg, $P$ = 6 y $\tau = 1 - (t/t_C)^{1/3}$.

En primer lugar se calculan las constantes de las Ecs. (12.8.4) y (12.8.6)

$$B = \frac{aV_0^2}{gH_0} = \frac{4000 \times 4{,}01}{32{,}2 \times 200} = 2{,}495 \qquad \Delta t = \frac{L}{Pa} = \frac{12.000}{6 \times 4000} = 0{,}5 \text{ seg}$$

$$H = \frac{fL}{D}\frac{V^{02}}{2gH_0} = \frac{0{,}02 \times 12.000 \times (4{,}01)^2}{4 \times 64{,}4 \times 200} = 0{,}075$$

$$h_r = h_C = 1 + H = 1{,}075 \qquad T = (J - P)\,\Delta t = 0{,}5(J - 6)$$

Las ecuaciones se reducen a

$$v_B(J) = 1{,}2475r \times \left(\sqrt{\tau^2 + \frac{1{,}075 + 2{,}495v_C(J-P) - 0{,}075v_C(J-P)\,|v_C(J-P)|}{1{,}556}} - \tau\right)$$

$$v_C(J) = v_B(J-P) + 0{,}401(1{,}075 - h_B(J-P) - 0{,}075v_B(J-P)\,|v_B(J-P)|)$$

y de la Ec. (12.8.1)

$$h_B(J) = 1{,}075 - 2{,}495(v_B(J) - v_C(J-P)) + 0{,}075v_C(J-P)\,|v_C(J-P)|$$

Para cada $J$ se resuelven las tres últimas ecuaciones empezando con $J = 7$. Esta solución se maneja más convenientemente mediante un computador, pero también se pueden utilizar la regla de cálculo y la calculadora de mesa. En las Figs. 12.29 y 12.30 se ven el programa del computador y la solución.

***Ejemplo 12.9*** El sistema de tuberías en serie de la Fig. 12.31 tiene un cierre de válvula

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau$ | 1,0 | 0,86 | 0,73 | 0,61 | 0,5 | 0,4 | 0,31 | 0,23 | 0,16 | 0,1 | 0,05 | 0 |
| $t$, seg | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 |

Utilizando el método algebraico hallar la altura adimensional en $A$ y $B$ y la velocidad adimensional en $A$, $B$ y $C$.

Sea $\Delta t = 0{,}15$ seg, y sea $P$ el número de $\Delta t$ para el tiempo de desplazamiento de la ola desde $C$ a $B$, y sea $Q$ el número de $\Delta t$ para el tiempo de desplazamiento de la ola desde $B$ a $A$. Entonces

$$V_{02} = V_{01}\frac{D_1^2}{D_2^2} = 2{,}2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 3{,}9111$$

$$P = \frac{L_1}{a_1\,\Delta t} = \frac{3600}{4000 \times 0{,}15} = 6 \qquad Q = \frac{2250}{3000 \times \Delta t} = 5$$



```
      ALGEBRAIC WATERHAMMER IN A SINGLE PIPE
       INTEGER J,P,I,M
       DIMENSION (HB,VB,VC)(500)
A1     READ DATA
       PRINT RESULTS L,A,F,V0,G,H0,TC,P,TMAX,D,MM
       DT=L/(A*P)
       M=TMAX/DT
       B=A*V0/(G*H0)
       H=F*L*V0*V0/(2.*G*D*H0)
       HR=1.+H
       THROUGH A2,FOR J=0,1,J.G.P
       VC(J)=1.
       VB(J)=1.
A2     HB(J)=1.
       PRINT RESULTS DT,M,B,H,HR
       PRINT COMMENT$1         J              TIME             TAU
     2   HB(J)           VB(J)           VC(J)            HB
     3    VB$
       PRINT COMMENT$0$
       THROUGH  A3,FOR J=P,1,J.G.M
       T=(J-P)*DT
       WHENEVER T.L.TC
       TAU=1.-(T/TC).P.MM
       OTHERWISE
       TAU=0.
       VB(J)=0.
       TRANSFER TO A4
       END OF CONDITIONAL
       VB(J)=.5*B*TAU*(SQRT.(TAU*TAU+4.*(HR+VC(J-P)*(B-H*.ABS.VC(J-P
     2 )))/(B*B))-TAU)
A4     HB(J)=HR-B*(VB(J)-VC(J-P))-H*VC(J-P)*.ABS.VC(J-P)
       VC(J)=VB(J-P)+(HR-HB(J-P)-H*VB(J-P)*.ABS.VB(J-P))/B
       HBB=HB(J)*H0
       VBB=VB(J)*V0
A3     PRINT FORMAT$1H ,I3,S1,7F15.3*$,J,T,TAU,HB(J),VB(J),VC(J),HBB,VBB
       TRANSFER TO A1
       END OF PROGRAM
```

***Fig. 12.29*** *Programa MAD para golpe de ariete algebraico en una tubería simple.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| L = | 1.200000E 04, | A = | 4000.000000, |
| G = | 32.200000, | HO = | 200.000000, |
| TMAX = | 24.000000, | D = | 4.000000, |
| DT = | .500000, | M = | 48, |
| HR = | 1.074907 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| F = | .020000, | VO = | 4.010000 |
| TC = | 10.000000, | P = | 6 |
| MM = | .333330 | | |
| B = | 2.490683, | H = | .074907 |

| J | TIME | TAU | HP(J) | VB(J) | VC(J) | H2 | VB |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | .000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 200.000 | 4.010 |
| 7 | .500 | .632 | 1.539 | .784 | 1.000 | 307.819 | 3.142 |
| 8 | 1.000 | .536 | 1.734 | .705 | 1.000 | 346.702 | 2.829 |
| 9 | 1.500 | .469 | 1.887 | .644 | 1.000 | 377.426 | 2.582 |
| 10 | 2.000 | .415 | 2.021 | .590 | 1.000 | 404.136 | 2.367 |
| 11 | 2.500 | .370 | 2.142 | .542 | 1.000 | 428.370 | 2.172 |
| 12 | 3.000 | .331 | 2.254 | .496 | 1.000 | 450.892 | 1.990 |
| 13 | 3.500 | .295 | 2.361 | .454 | .579 | 472.147 | 1.819 |
| 14 | 4.000 | .263 | 2.462 | .413 | .426 | 492.419 | 1.656 |
| 15 | 4.500 | .234 | 2.560 | .374 | .305 | 511.901 | 1.499 |
| 16 | 5.000 | .206 | 2.654 | .336 | .200 | 530.733 | 1.348 |
| 17 | 5.500 | .181 | 2.745 | .299 | .104 | 549.019 | 1.200 |
| 18 | 6.000 | .157 | 2.834 | .264 | .015 | 566.838 | 1.057 |
| 19 | 6.500 | .134 | 2.018 | .190 | -.069 | 403.594 | .762 |
| 20 | 7.000 | .112 | 1.753 | .148 | -.149 | 350.589 | .595 |
| 21 | 7.500 | .091 | 1.545 | .114 | -.226 | 309.024 | .456 |
| 22 | 8.000 | .072 | 1.362 | .084 | -.301 | 272.342 | .335 |
| 23 | 8.500 | .053 | 1.191 | .058 | -.374 | 238.139 | .231 |
| 24 | 9.000 | .035 | 1.026 | .035 | -.445 | 205.207 | .140 |
| 25 | 9.500 | .017 | .865 | .016 | -.190 | 172.940 | .063 |
| 26 | 10.000 | .000 | .705 | .000 | -.124 | 141.040 | .000 |
| 27 | 10.500 | .000 | .515 | .000 | -.076 | 102.972 | .000 |
| 28 | 11.000 | .000 | .332 | .000 | -.032 | 66.301 | .000 |
| 29 | 11.500 | .000 | .154 | .000 | .011 | 30.814 | .000 |
| 30 | 12.000 | .000 | -.018 | .000 | .055 | -3.653 | .000 |
| 31 | 12.500 | .000 | .605 | .000 | .100 | 121.019 | .000 |
| 32 | 13.000 | .000 | .766 | .000 | .148 | 153.205 | .000 |
| 33 | 13.500 | .000 | .887 | .000 | .225 | 177.450 | .000 |
| 34 | 14.000 | .000 | .996 | .000 | .298 | 199.199 | .000 |
| 35 | 14.500 | .000 | 1.102 | .000 | .370 | 220.435 | .000 |
| 36 | 15.000 | .000 | 1.211 | .000 | .439 | 242.106 | .000 |
| 37 | 15.500 | .000 | 1.324 | .000 | .189 | 264.721 | .000 |
| 38 | 16.000 | .000 | 1.443 | .000 | .124 | 288.592 | .000 |
| 39 | 16.500 | .000 | 1.631 | .000 | .075 | 326.233 | .000 |
| 40 | 17.000 | .000 | 1.812 | .000 | .032 | 362.327 | .000 |
| 41 | 17.500 | .000 | 1.986 | .000 | -.011 | 397.101 | .000 |
| 42 | 18.000 | .000 | 2.154 | .000 | -.054 | 430.729 | .000 |
| 43 | 18.500 | .000 | 1.542 | .000 | -.100 | 308.411 | .000 |
| 44 | 19.000 | .000 | 1.383 | .000 | -.148 | 276.527 | .000 |
| 45 | 19.500 | .000 | 1.262 | .000 | -.223 | 252.428 | .000 |
| 46 | 20.000 | .000 | 1.154 | .000 | -.296 | 230.749 | .000 |
| 47 | 20.500 | .000 | 1.048 | .000 | -.366 | 209.530 | .000 |
| 48 | 21.000 | .000 | .940 | .000 | -.433 | 187.901 | .000 |

*Fig. 12.30 Resultados dados por un computador, del Ejemplo 12.8.*

$$B_1 = \frac{a_1 V_{01}}{g H_0} = \frac{4000 \times 2,2}{32,2 \times 200} = 1,3665$$

$$B_2 = \frac{a_2 V_{02}}{g H_0} = \frac{3000 \times 3,9111}{32,2 \times 200} = 1,8219$$

$$H_1 = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_{01}{}^2}{2gH_0} = \frac{0,02 \times 3600(2,2)^2}{4 \times 64,4 \times 200} = 0,006764$$

$$H_2 = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_{02}{}^2}{2gH_0} = \frac{0,024 \times 2250(3,9111)^2}{3 \times 64,4 \times 200} = 0,02138$$

$h_{B_0} = 1,02138 \qquad h_R = 1,02814$

Para cada tubería las Ecs. (12.8.1) y (12.8.2) dan:

$$h_{A_i} - h_{B_{i-Q}} = -B_2(v_{A_i} - v_{B_{i-Q}}) - H_2 v_{B_{i-Q}} \, | v_{B_{i-Q}} | \quad (1)$$
$$h_{B_i} - h_{A_{i-Q}} = B_2(v_{B_i} - v_{A_{i-Q}}) + H_2 v_{A_{i-Q}} \, | v_{A_{i-Q}} | \quad (2)$$
$$h_{B_i} - h_R = -B_1(v_{B_i} - v_{C_{i-P}}) - H_1 v_{C_{i-P}} \, | v_{C_{i-P}} | \quad (3)$$
$$h_R - h_{B_{i-P}} = B_1(v_{C_i} - v_{B_{i-P}}) + H_1 v_{B_{i-P}} \, | v_{B_{i-P}} | \quad (4)$$

Sin dimensiones, despreciando los cambios de altura de velocidad, la ecuación de continuidad en la unión es $h_{B_1} = h_{B_2}$, $v_{B_1} = v_{B_2}$, que se han utilizado en la ecuación de la forma escrita. Entre la primera y $v_{A_j} = \tau\sqrt{h_{A_j}}$,

$$v_{A_i} = -0,5 B_2 \tau^2 + \sqrt{(0,5 B_2 \tau^2)^2 + \tau^2 (h_{B_{i-Q}} - v_{B_{i-Q}}(H_2 \, | v_{B_{i-Q}} | - B_2))} \quad (5)$$

Hallado $v_{A_j}$ se obtiene $h_{A_j}$ de la Ec. (1). Las Ecs. (2) y (3) dan

$$h_{B_i} = 0,5 \, (h_{A_{i-Q}} + h_R + B_1 v_{C_{i-P}} - B_2 v_{A_{i-P}} + H_2 v_{A_{i-Q}} \, | v_{A_{i-Q}} | - H_1 v_{C_{i-P}} \, | v_{C_{i-P}} | )$$

$$v_{B_i} = v_{C_{i-P}} + \frac{h_R - h_{B_i} - H_1 v_{C_{i-P}} \, | v_{C_{i-P}} |}{B_1}$$

$$v_{C_i} = v_{B_{i-P}} + \frac{h_R - h_{B_{i-P}} - H_1 v_{B_{i-P}} \, | v_{B_{i-P}} |}{B_1}$$

En la Fig. 12.32 se da el programa para la solución de estas ecuaciones. Se ha empleado la interpolación parabólica de los valores $\tau$ (ver el Apéndice E). La Fig. 12.33 es la solución del problema.

Se pueden aplicar los métodos algebraicos y de las características a problemas tan complejos como tuberías paralelas y ramificadas igual que a las redes de tuberías.

### *Flujo en canales abiertos*

En general, los flujos transitorios en canales abiertos son más complicados de manejar que los de conductos cerrados. El movimiento de la



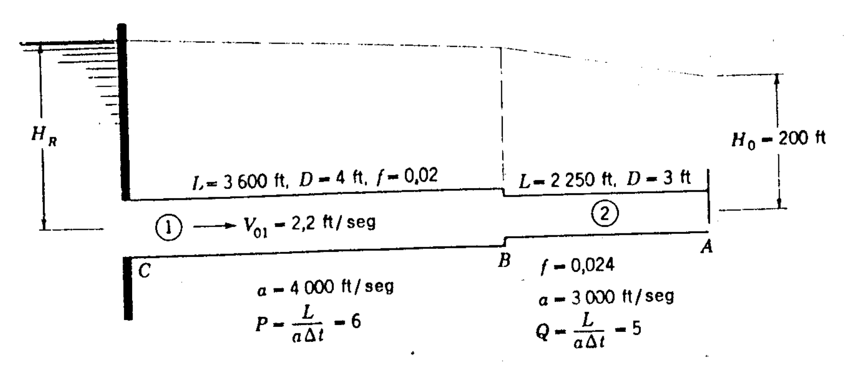



*Fig. 12.31 Sistema de tuberías en serie a resolver por el método algebraico para un cierre arbitrario.*

onda superficial es un ejemplo de canal abierto y flujo no permanente. El tema es demasiado amplio para intentar cubrirlo como parte de un capítulo. Se estudian algunos casos especiales que emplean las mismas hipótesis que las ecuaciones del golpe de ariete: ondas positivas y negativas sin rozamiento, control de inundaciones y el caso de la lluvia y su desagüe por un área plana.

## *12.9 Onda positiva sin rozamiento en un canal rectangular*

En esta sección se estudia la onda que resulta de un cambio súbito en el flujo (debido a una compuerta u otro mecanismo) que aumenta la profundidad. Se supone un canal rectangular y se desprecia el rozamiento. En la Fig. 12.34 se muestra un estado como el indicado un poco después del cierre parcial súbito de una compuerta. Se analiza el problema para reducirle a un problema de estado permanente, como en la Fig. 12.35. Por unidad de ancho la ecuación de continuidad da

$$(V_1 + c) y_1 = (V_2 + c) y_2 \quad (12.9.1)$$

y la ecuación de la cantidad de movimiento para el volumen de control 1 – 2, despreciando el esfuerzo cortante en el fondo, por unidad de ancho, es

$$\frac{\gamma}{2}(y_1^2 - y_2^2) = \frac{\gamma}{g} y_1 (V_1 + c)(V_2 + c - V_1 - c) \quad (12.9.2)$$

Eliminando $V_2$ entre las dos ecuaciones,

$$V_1 + c = \sqrt{g y_1} \left[ \frac{y_2}{2 y_1} \left( 1 + \frac{y_2}{y_1} \right) \right]^{1/2} \quad (12.9.3)$$

```
         PROGRAM FOR THE SOLUTION OF WATERHAMMER IN TWO PIPES IN SERIE
         S WITH RESERVOIR UPSTREAM AND VALVE DOWNSTREAM.L1/(A1*DT)=P,
         L2/(A2*DT)=Q,  P,Q INTEGERS. ARBITRARY VALVE CLOSURE.
          INTEGER J,P,Q,NTA,I,M,U
          DIMENSION (HA,HB,VA,VB,VC)(500),TA(30)
P1        READ DATA
          PRINT RESULTS L1,L2,D1,D2,A1,A2,F1,F2,V01,H0,DTA,TC,G,M,DT,U,NTA,TA...T
        2 A(NTA)
         STEADY STATE FORMULATION
          V02=V01*D1*D1/(D2*D2)
          B1=A1*V01/(G*H0)
          B2=A2*V02/(G*H0)
          P=L1/(A1*DT)
          Q=L2/(A2*DT)
          H1=F1*L1*V01*V01/(2.*G*D1*H0)
          H2=F2*L2*V02*V02/(2.*G*D2*H0)
          HB=1.+H2
          HR=HB+H1
          PRINT RESULTS V02,B1,B2,P,Q,H1,H2,HB,HR
          THROUGH P2,FOR J=0,1,J.G.P+Q
          VA(J)=1.
          VB(J)=1.
          VC(J)=1.
          HA(J)=1.
P2        HP(J)=HB
          PRINT COMMENT$1        TIME            TAU            HA(J)
        2        HB(J)               VA(J)           VB(J)           VC(J)$
          PRINT COMMENT$0$
          THROUGH P3,FOR J=P+Q,1,J.G.M
          T=(J-(P+Q))*DT

         PARABOLIC INTERPOLATION FOR DETERMINATION OF TAU
          WHENEVER T.LE.TC
          I=T/DTA
          TH=(T-I*DTA)/DTA
          WHENEVER I.E.0
          I=1
          TH=TH-1.
          END OF CONDITIONAL
          TAU=TA(I)+.5*TH*(TA(I+1)-TA(I-1)+TH*(TA(I+1)+TA(I-1)-2.*TA(I)
        2 ))
          OTHERWISE
          TAU=0.
          VA(J)=0.
          TRANSFER TO P4
          END OF CONDITIONAL
          WHENEVER TAU.L.0.,TAU=0.
          VA(J)=.5*TAU*B2*(SQRT.(TAU*TAU+4.*(HB(J-Q)+VB(J-Q)*(B2-H2*.AB
        2 S.VB(J-Q)))/(B2*B2))-TAU)
P4        HA(J)=HB(J-Q)-B2*(VA(J)-VB(J-Q))-H2*VB(J-Q)*.ABS.VB(J-Q)
          VB(J)=(HR-HA(J-Q)+B2*VA(J-Q)+B1*VC(J-P)-H2*VA(J-Q)*.ABS.VA(J-
        2 Q)-H1*VC(J-P)*.ABS.VC(J-P))/(B1+B2)
          HB(J)=HA(J-Q)+B2*(VB(J)-VA(J-Q))+H2*VA(J-Q)*.ABS.VA(J-Q)
          VC(J)=VB(J-P)+(HR-HB(J-P)-H1*VB(J-P)*.ABS.VB(J-P))/B1
P3        WHENEVER J/U*U.E.J,PRINT FORMAT$1H ,F11.3,6F16.3 *$,T,TAU,HA(J),HB(J),VA(J)
        2 ,VB(J),VC(J)
          TRANSFER TO P1
          END OF PROGRAM
```

*Fig. 12.32 Programa MAD para la solución de las ecuaciones algebraicas del golpe de ariete para tuberias en serie. Interpolación parabólica de los datos de cierre de válvula.*

| TIME | TAU | HA(J) | HB(J) | VA(J) | VB(J) | VC(J) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -.000 | 1.000 | 1.000 | 1.021 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| .150 | .957 | 1.042 | 1.021 | .977 | 1.000 | 1.000 |
| .300 | .915 | 1.085 | 1.021 | .953 | 1.000 | 1.000 |
| .450 | .874 | 1.130 | 1.021 | .929 | 1.000 | 1.000 |
| .600 | .833 | 1.176 | 1.021 | .903 | 1.000 | 1.000 |
| .750 | .794 | 1.223 | 1.021 | .878 | 1.000 | 1.000 |
| .900 | .755 | 1.271 | 1.057 | .851 | .974 | 1.000 |
| 1.050 | .718 | 1.320 | 1.094 | .824 | .947 | 1.000 |
| 1.200 | .681 | 1.370 | 1.132 | .797 | .919 | 1.000 |
| 1.350 | .645 | 1.421 | 1.170 | .769 | .891 | 1.000 |
| 1.500 | .610 | 1.473 | 1.210 | .740 | .862 | 1.000 |
| 1.650 | .576 | 1.518 | 1.251 | .710 | .832 | 1.000 |
| 1.800 | .543 | 1.563 | 1.293 | .679 | .801 | .948 |
| 1.950 | .511 | 1.609 | 1.335 | .648 | .770 | .895 |
| 2.100 | .479 | 1.654 | 1.379 | .616 | .739 | .839 |
| 2.250 | .449 | 1.699 | 1.423 | .585 | .706 | .783 |
| 2.400 | .419 | 1.744 | 1.466 | .554 | .675 | .725 |
| 2.550 | .391 | 1.788 | 1.509 | .522 | .643 | .665 |
| 2.700 | .363 | 1.831 | 1.512 | .491 | .590 | .605 |
| 2.850 | .336 | 1.875 | 1.514 | .460 | .535 | .543 |
| 3.000 | .310 | 1.917 | 1.515 | .429 | .480 | .479 |
| 3.150 | .285 | 1.959 | 1.514 | .399 | .424 | .415 |
| 3.300 | .261 | 2.000 | 1.512 | .369 | .368 | .352 |
| 3.450 | .238 | 1.971 | 1.509 | .334 | .311 | .290 |
| 3.600 | .215 | 1.937 | 1.504 | .300 | .254 | .234 |
| 3.750 | .194 | 1.898 | 1.498 | .267 | .197 | .178 |
| 3.900 | .173 | 1.853 | 1.491 | .236 | .140 | .123 |
| 4.050 | .154 | 1.804 | 1.481 | .206 | .083 | .067 |
| 4.200 | .135 | 1.749 | 1.448 | .178 | .045 | .013 |
| 4.350 | .117 | 1.689 | 1.410 | .152 | .009 | -.041 |
| 4.500 | .100 | 1.624 | 1.375 | .127 | -.021 | -.095 |
| 4.650 | .084 | 1.554 | 1.337 | .105 | -.048 | -.147 |
| 4.800 | .069 | 1.479 | 1.296 | .084 | -.073 | -.199 |
| 4.950 | .055 | 1.411 | 1.251 | .065 | -.096 | -.249 |
| 5.100 | .040 | 1.343 | 1.203 | .046 | -.115 | -.262 |
| 5.250 | .025 | 1.286 | 1.152 | .028 | -.132 | -.270 |
| 5.400 | .010 | 1.229 | 1.098 | .011 | -.146 | -.275 |
| 5.550 | .000 | 1.162 | 1.042 | .000 | -.157 | -.274 |
| 5.700 | .000 | 1.077 | .987 | .000 | -.168 | -.269 |
| 5.850 | .000 | .993 | .933 | .000 | -.179 | -.259 |
| 6.000 | .000 | .912 | .912 | .000 | -.177 | -.243 |
| 6.150 | .000 | .833 | .895 | .000 | -.172 | -.223 |
| 6.300 | .000 | .757 | .871 | .000 | -.160 | -.197 |
| 6.450 | .000 | .681 | .835 | .000 | -.133 | -.166 |
| 6.600 | .000 | .607 | .803 | .000 | -.104 | -.138 |
| 6.750 | .000 | .591 | .777 | .000 | -.074 | -.109 |
| 6.900 | .000 | .581 | .755 | .000 | -.043 | -.092 |
| 7.050 | .000 | .581 | .738 | .000 | -.010 | -.075 |

*Fig. 12.33 Solución del computador al Ejemplo 12.9.*

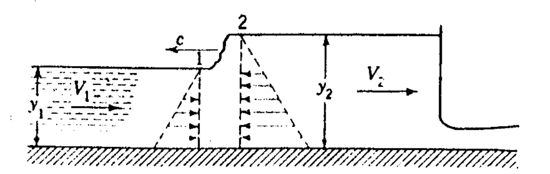



*Fig. 12.34* Onda positiva en un canal rectangular.

La velocidad de una onda elemental puede obtenerse de la ecuación anterior haciendo que $y_2$ tienda a $y_1$, resultando

$$V_1 + c = \sqrt{gy} \qquad (12.9.4)$$

Para la propagación a través del líquido $V_1 \to 0$, y la velocidad de la onda es $c = \sqrt{gy}$ cuando convertimos el problema en la forma no permanente por superposición de $V = -c$.

En general, las Ecs. (12.9.1) y (12.9.2) se han de resolver por tanteos. La fórmula del resalto hidráulico resulta haciendo $c = 0$ en las dos ecuaciones (3.12.20).

***Ejemplo 12.10*** Un canal rectangular de 3 m de anchura y 1,8 m de profundidad conduce un caudal de 16 m³/seg; de pronto se reduce el caudal a 12 m³/seg en el extremo de aguas abajo. Calcular la altura y la velocidad de la onda que se origina.

$V_1 = 3$, $y_1 = 1{,}8$, $V_2 y_2 = 4$. Por las Ecs. (12.9.1) y (12.9.2),

$$5{,}4 = 4 + c(y_2 - 1{,}8)$$

y

$$y_2^2 - 1{,}8^2 = \frac{3{,}6}{9{,}8}(c + 3)(3 - V_2)$$

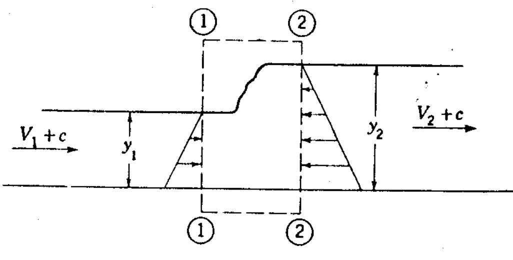



*Fig. 12.35* Problema de onda reducido a un problema de régimen permanente superponiendo una velocidad de onda.



Eliminando $c$ y $V_2$,

$$y_2^2 - 1{,}8^2 = \frac{3{,}6}{9{,}8}\left(\frac{1{,}4}{y_2 - 1{,}8} + 3\right)\left(3 - \frac{4}{y_2}\right)$$

o sea,

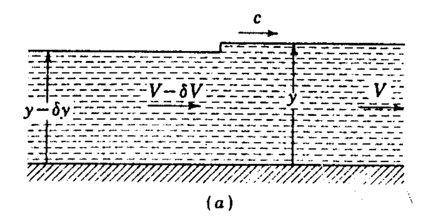
$$\left(\frac{y_2 - 1{,}8}{3y_2 - 4}\right)^2 (y_2 + 1{,}8)y_2 = 0{,}367$$

Calculando $y_2$ con varios ensayos, resulta $y_2 = 2{,}4$ m. Por tanto, $V_2 = 4/2{,}4 = 1{,}67$ m/seg. La altura de la onda es 0,6 m y la velocidad de la onda es

$$c = \frac{5{,}4 - 4}{y_2 - 1{,}8} = \frac{1{,}4}{0{,}6} = 2{,}3 \text{ m/seg}$$

## 12.10 Ondas negativas sin rozamiento en un canal rectangular

La onda negativa aparece como un gradual aplastamiento y descenso de la superficie del líquido. Se presenta, por ejemplo, en un canal aguas abajo de una compuerta que se está cerrando, o aguas arriba de una compuerta que se está abriendo. Su propagación va acompañada de una serie de ondas elementales negativas superpuestas a la velocidad existente, con cada una de las ondas moviéndose a menor velocidad que la que le sigue de mayor profundidad. La aplicación de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de continuidad a una pequeña variación de profundidad producen ecuaciones diferenciales muy simples que relacionan la velocidad de la onda $c$, la velocidad $V$ y la profundidad $y$. La integración de estas ecuaciones conduce al perfil de la superficie líquida como



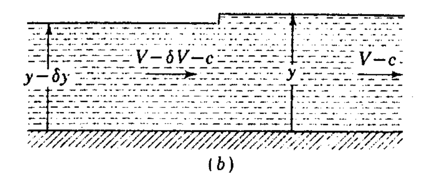




*Fig. 12.36* Onda elemental.

función del tiempo, y a la velocidad como función de la posición a lo largo del canal y del tiempo ($x$ y $t$). Se supone que el fluido es sin rozamiento y se desprecian las aceleraciones verticales.

En la Fig. 12.36*a* se representa una perturbación elemental por la que el caudal de aguas arriba se ha reducido ligeramente. Para la aplicación de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de continuidad es conveniente transformar el régimen en permanente, como se hace en la Fig. 12.36*b*, superponiendo a las velocidades una velocidad uniforme hacia la izquierda. La ecuación de continuidad es

$$(V - \delta V - c)(y - \delta y) = (V - c)y$$

o sea, despreciando el producto de pequeñas cantidades,

$$(c - V)\,\delta y = y\,\delta V \qquad (12.10.1)$$

La ecuación de la cantidad de movimiento conduce a

$$\frac{\gamma}{2}(y - \delta y)^2 - \frac{\gamma}{2}y^2 = \frac{\gamma}{g}(V - c)y\,[V - c - (V - \delta V - c)]$$

Después de simplificar

$$\delta y = \frac{c - V}{g}\,\delta V \qquad (12.10.2)$$

Despejando $\delta V/\delta y$ en las Ecs. (12.10.1) y (12.10.2) e igualando

$$c - V = \pm\sqrt{gy} \qquad (12.10.3)$$

de donde

$$c = V \pm \sqrt{gy}$$

La velocidad de una onda elemental en un líquido en reposo de profundidad $y$ es $\sqrt{gy}$ y la onda se mueve en el flujo con una velocidad $\sqrt{gy}$ *relativa* al líquido que fluye.

Eliminando $c$ entre las Ecs. (12.10.1) y (12.10.2) resulta

$$\frac{dV}{dy} = \pm\sqrt{\frac{g}{y}}$$

Después de integrar

$$V = \pm 2\sqrt{gy} + \text{const}$$

Para el caso de una onda negativa que se forma aguas abajo de una com-



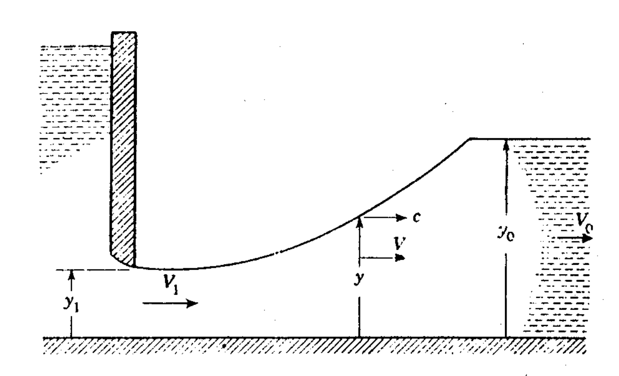



*Fig. 12.37 Onda negativa después del cierre de la compuerta.*

puerta (Fig. 12.37), después de un cierre instantáneo parcial, $V = V_0$ cuando $y = y_0$, y

$$V_0 = 2\sqrt{gy_0} + \text{const}$$

Eliminando la constante

$$V = V_0 - 2\sqrt{g}\,(\sqrt{y_0} - \sqrt{y}) \qquad (12.10.4)$$

La onda se mueve en la dirección de $+x$, por tanto,

$$c = V + \sqrt{gy} = V_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy} \qquad (12.10.5)$$

Si el movimiento de la compuerta se realiza en un tiempo $t = 0$, la posición de la superficie líquida se expresa por $x = ct$, o sea

$$x = (V_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy})t \qquad (12.10.6)$$

Eliminando $y$ entre las Ecs. (12.10.5) y (12.10.6)

$$V = \frac{V_0}{3} + \frac{2}{3}\frac{x}{t} - \frac{2}{3}\sqrt{gy_0} \qquad (12.10.7)$$

que es la expresión de la velocidad en función de $x$ y $t$.

***Ejemplo 12.11*** En la Fig. 12.37 encontrar el número de Froude del flujo no perturbado. Para $V_0 = 5$ m/seg, encontrar la ecuación de la superficie líquida que se forma cuando la compuerta se cierra bruscamente de tal manera que se hace $y_1 = 0$ en el instante $t = 0$.

Es necesario que $V_1 = 0$ para $y_1 = 0$ y $x = 0$ para cualquier tiempo después del instante $t = 0$. En la Ec. (12.10.4) con $V = 0$, $y = 0$,

$$V_0 = 2\sqrt{gy_0}$$

por tanto,

$$\mathbf{F}_0 = \frac{V_0^2}{gy_0} = 4$$

Para $V_0 = 5$,

$$y_0 = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{5^2}{4 \times 9{,}8} = 0{,}64 \text{ m}$$

Utilizando la Ec. (12.10.6)

$$x = (5 - 2\sqrt{9{,}8 \times 0{,}64} + 3\sqrt{9{,}8y})t = 9{,}4\sqrt{y}\,t$$

La superficie líquida es una parábola con vértice en el origen y concavidad dirigida hacia arriba.

*Ejemplo 12.12* En la Fig. 12.37, la compuerta está parcialmente cerrada en el instante $t = 0$, de tal manera que el caudal se reduce en un 50 por 100. $V_0 = 5$ m/seg, $y_0 = 2$ m. Calcular $V_1$, $y_1$ y el perfil superficial.

El nuevo caudal es

$$q = \frac{5 \times 2}{2} = 5 = V_1 y_1$$

Usando la Ec. (12.10.4),

$$V_1 = 5 - 2\sqrt{9{,}8}\,(\sqrt{2} - \sqrt{y_1})$$

Por aproximaciones sucesivas, a partir de las dos últimas ecuaciones se encuentran $V_1$ e $y_1$, $V_1 = 3{,}5$ m/seg, $y_1 = 1{,}43$ m. La ecuación de la superficie libre, según la Ec. (12.10.6), es

$$x = (5 - 2\sqrt{2 \times 9{,}8} + 3\sqrt{9{,}8y})t$$

o también

$$x = (9{,}4\sqrt{y} - 3{,}85)t$$

que sirve para valores de $y$ comprendidos entre 1,43 y 2 m.

### Rotura de un dique

El perfil teórico superficial del agua en el caso de una rotura de un dique puede obtenerse a partir de las Ecs. (12.10.4) a (12.10.7). Se considera un canal horizontal, en el que se prescinde del rozamiento, con profundidad de agua $y_0$ a un lado de una compuerta y nada de agua al otro lado de la compuerta y se supone que la compuerta se levanta de repente. Se desprecian las aceleraciones verticales. $V_0 = 0$ en las ecuaciones e $y$ varía desde $y_0$ hasta 0. La velocidad en una sección cualquiera de la Ec. (12.10.4) es



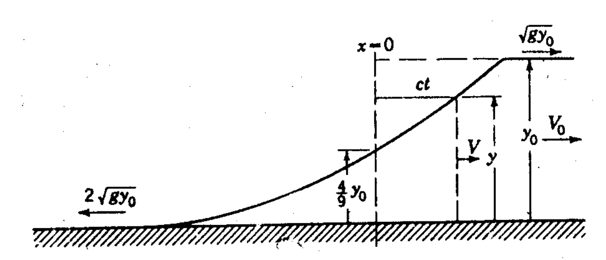



*Fig. 12.38 Perfil después de la rotura de un dique.*

$$V = -2\sqrt{g}\,(\sqrt{y_0} - \sqrt{y}) \tag{12.10.8}$$

siempre en dirección de aguas abajo. El perfil superficial del agua es, por la Ec. (12.10.6),

$$x = (3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_0})t \tag{12.10.9}$$

Para $x = 0$ es $y = 4y_0/9$, es decir, la profundidad permanece constante y la velocidad vale, según la Ec. (12.10.8),

$$V = -\tfrac{2}{3}\sqrt{gy_0}$$

siendo también independiente del tiempo. El borde de ataque de la onda se empenacha por encima de la cota cero y se mueve hacia aguas abajo a velocidad $V = c = -2\sqrt{gy_0}$. La superficie del agua es una parábola con el vértice en el borde de ataque y concavidad hacia arriba.

Cuando existe una rotura real en un dique, la rugosidad de la tierra origina una onda positiva, que se mueve hacia aguas abajo; es decir, el borde empenachado se retrasa por rozamiento.

## 12.11 Control de inundaciones en canales prismáticos

En las dos secciones anteriores se han considerado variaciones instantáneas en canales rectangulares sin rozamiento. En esta sección se tiene en cuenta el rozamiento, y las condiciones pueden cambiar gradualmente en las secciones de entrada y salida. Con canales prismáticos el área es

función de la profundidad del flujo. Se hace la hipótesis de que la pendiente $\alpha$ del canal es lo suficientemente pequeña para que $\cos\alpha \approx 1$ y se mantengan las condiciones hidrostáticas a lo largo de cualquier línea vertical en el fluido. Se puede añadir al flujo cualquier otro flujo conocido en función del tiempo o se puede sacar de él en la sección aguas arriba o la sección aguas abajo del canal.

En la Fig. 12.39 se toma como volumen de control un elemento de flujo, se toma la dirección $x$ paralela al fondo del canal y la profundidad $y$ se mide normal al fondo. Al aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento para el caso no permanente, Ec. (3.11.4),

$$-\frac{\partial y}{\partial x}\gamma\,\Delta x\,A - \tau_0 P\,\Delta x + \gamma A\,\Delta x \operatorname{sen}\alpha = \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 A)\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A V\,\Delta x)$$

Desarrollando y dividiendo por la masa del elemento $\rho A\,\Delta x$,

$$g\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho R} - g\operatorname{sen}\alpha + 2V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V^2}{A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{V}{A}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (12.11.1)$$

$P$ es el perímetro mojado de la sección recta y $R$ el radio hidráulico.

Al aplicar la ecuación de continuidad (3.5.5) al volumen de control de la Fig. 12.39 da

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho A V)\,\Delta x = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A\,\Delta x)$$

Desarrollando y dividiendo por la masa del elemento,

$$\frac{V}{A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (12.11.2)$$

La Ec. (12.11.1) se puede simplificar teniendo en cuenta (12.11.2), ya que al multiplicar esta última por $V$ y sustituir en la primera,

$$L_1 = g\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho R} - g\operatorname{sen}\alpha + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (12.11.3)$$

La Ec. (12.11.2) se puede escribir

$$L_2 = \frac{A}{T}\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (12.11.4)$$

ya que

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = T\frac{\partial y}{\partial x}$$



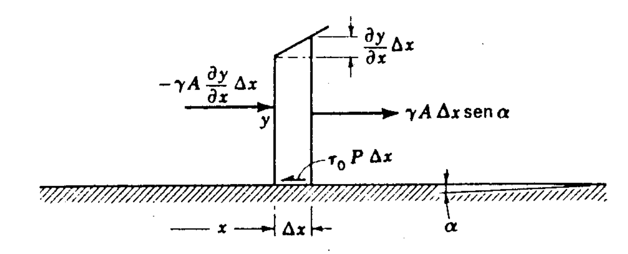



*Fig. 12.39 Volumen de control para la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento en el caso de régimen no permanente.*

siendo $T$ la anchura de la parte superior. Ahora tenemos $L_1$ y $L_2$ en forma adecuada para la solución por el método de las características. Combinándolas como en la Sec. 12.6,

$$L_1 + \lambda L_2 = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\left(V + \frac{\lambda A}{T}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\right] + \lambda\left[\frac{\partial y}{\partial x}\left(V + \frac{g}{\lambda}\right) + \frac{\partial y}{\partial t}\right] + \frac{\tau_0}{\rho R} - g\operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad (12.11.5)$$

Para que el término dentro del primer par de corchetes sea una derivada total

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{\lambda A}{T}$$

y para que lo sea el término dentro del segundo par de corchetes

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda}$$

Igualando las dos últimas expresiones y despejando $\lambda$,

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{gT}{A}} \qquad (12.11.6)$$

y

$$\frac{dx}{dt} = V \pm \sqrt{\frac{gA}{T}} \qquad (12.11.7)$$

Para una sección recta rectangular se ha de tener en cuenta que esta expresión de la velocidad de una ola (ola de superficie) viene dada por

$$\frac{dx}{dt} = V \pm \sqrt{gy} \qquad (12.11.8)$$

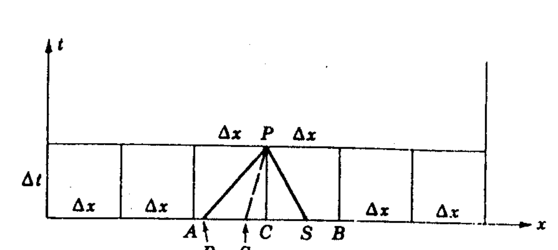



*Fig. 12.40 Solución para tiempo dado e intervalos de distancia.*

La Ec. (12.11.5) se reduce a

$$\frac{dV}{dt} + \lambda \frac{dy}{dt} + \frac{\tau_0}{\rho R} - g \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (12.11.9)$$

de acuerdo con las Ecs. (12.11.6) y (12.11.7).

Sustituyendo los valores de $\lambda$ en la Ec. (12.11.9) y escribiéndola en forma de diferencias finitas,

$$V_P - V_R + \lambda_C(y_P - y_R) + \frac{\tau_0 \Delta t}{\rho R} - g \operatorname{sen} \alpha \Delta t = 0 \qquad (12.11.10)$$

$$x_P - x_R = \left(V_C + \lambda_C \frac{A_C}{T_C}\right) \Delta t \qquad (12.11.11)$$

$C^+$

$$V_P - V_S - \lambda_C(y_P - y_S) + \frac{\tau_0 \Delta t}{\rho R} - g \operatorname{sen} \alpha \Delta t = 0 \qquad (12.11.12)$$

$$x_P - x_S = \left(V_C - \lambda_C \frac{A_C}{T_C}\right) \Delta t \qquad (12.11.13)$$

$C^-$

El subíndice $C$ quiere decir el valor de la cantidad en el punto $C$ de la Fig. 12.40. $\lambda_C$ es la raíz positiva de la Ec. (12.11.6).

En la Fig. 12.40 se supone que inicialmente se conocen $y$ y $V$ en secciones equidistantes a lo largo del canal, separadas $\Delta x$. Para hallar $y_P$ y $V_P$ en una de las secciones en el nuevo instante $t + \Delta t$, se calcula $\lambda$ en $C$ e $y_R$, $V_R$, $y_S$, $V_S$ se hallan por interpolación lineal a partir de los valores conocidos en $A$, $C$ y $B$. A continuación se emplean las Ecs. (12.11.10) y (12.11.12) para determinar $V_P$ e $y_P$. Para hallar $V_R$, se utiliza la proporción

$$\frac{V_C - V_R}{V_C - V_A} = \frac{x_C - x_R}{\Delta x} = \frac{x_P - x_R}{\Delta x} = \left(V_C + \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}$$



Definiendo $\theta = \Delta t/\Delta x$ y despejando $V_R$,

$$V_R = V_C + (V_A - V_C)\theta\left(V_C + \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right) \qquad (12.11.14)$$

y análogamente

$$y_R = y_C + (y_A - y_C)\theta\left(V_C + \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right) \qquad (12.11.15)$$

La interpolación para $V_S$ e $y_S$ depende de quién es mayor, $V_C$ o $\lambda_C A_C/T_C$. Si $V_C > \lambda_C A_C/T_C$, representado por la línea de trazos en la Fig. 12.40, entonces, empleando las proporciones y la Ec. (12.11.13),

$$\frac{V_C - V_S}{V_C - V_A} = \frac{x_P - x_S}{\Delta x} = \left(V_C - \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

y

$$V_S = V_C + (V_A - V_C)\theta\left(V_C - \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right) \qquad V_C > \left(\frac{\lambda A}{T}\right)_C \qquad (12.11.16)$$

Además

$$y_S = y_C + (y_A - y_C)\theta\left(V_C - \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right) \qquad (12.11.17)$$

Sin embargo, Si $V_C < (\lambda A/T)_C$, de la Fig. 12.40 y la Ec. 12.11.13),

$$\frac{V_S - V_C}{V_B - V_C} = \frac{x_S - x_P}{\Delta x} = -\left(V_C - \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

y

$$V_S = V_C + (V_C - V_B)\theta\left(V_C - \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right) \qquad (12.11.18)$$

$$y_S = y_C + (y_C - y_B)\theta\left(V_C - \frac{\lambda_C A_C}{T_C}\right) \qquad (12.11.19)$$

Despejando $V_P$ e $y_P$ de las Ecs. (12.11.10) y (12.11.12),

$$V_P = \frac{V_R + V_S}{2} + \frac{\lambda_C}{2}(y_R - y_S) - \frac{\tau_0 \Delta t}{\rho R} + g \operatorname{sen} \alpha \Delta t = 0 \qquad (12.11.20)$$

$$y_P = \frac{y_R + y_S}{2} + \frac{1}{2\lambda_C}(V_R - V_S) \qquad (12.11.21)$$

```
            FLOOD ROUTING INTO A RECTANGULAR CHANNEL. D.S.GAGE HT.'DISCHA
            RGE EQ. Q=CW*(Y-YOO).P.M. LINEAR RISE AND FALL OF INTAKE HYDR
            OGRAPH. FINAL STEADY FLOW QF AT T1,QM AT TO, WIDTH B
            ,CHEZY C, NORMAL DEPTH YN GIVEN..ALP=SLOPE
             INTEGER I,N,U,J
AA1          DIMENSION (V,VP,Y,YP)(100)
             READ AND PRINT DATA
             PRINT RESULTS TO,T1,K1,K2,B,YN,C,L,N,ALP,TMAX,G,M,CW
             INTERNAL FUNCTION R.(YY)=B*YY/(B+2.*YY)
             INTERNAL FUNCTION Q.(TT)
             WHENEVER TT.L.TO
             QQ=QO+Q6*TT
             OR WHENEVER TT.GE.TO.AND.TT.L.T1
             QQ=QM+Q7*(TT-TO)
             OTHERWISE
             QQ=QF
             END OF CONDITIONAL
             FUNCTION RETURN QQ
             END OF FUNCTION
             QO=C*YN*B*SQRT.(R.(YN)*ALP)
             QM=K1*QO
             QF=K2*QO
             Q6=(QM-QO)/TO
             Q7=(QF-QM)/(T1-TO)
             CB=CW/B
             C7=G/(C*C)
            STEADY STATE CONDITIONS
             V=QO/(B*YN)
             THROUGH AA2,FOR I=0,1,I.G.N
             V(I)=V
AA2          Y(I)=YN
             YOO=YN-(QO/CW).P.(1./M)
```



```
             SA=SIN.(ALP)
             DX=L/N
             T=0.
             U=0
             DT=.9*DX/(V+SQRT.(G*YN))
             TH=DT/DX
             PRINT RESULTS QM,QF,QO,YOO,DX,DT
             PRINT COMMENT$1                            VELOCITIES AND DEPTHS AT 5
           2 00 FOOT INTERVALS$
             PRINT COMMENT$0                              TIME IN MINUTES$
             PRINT COMMENT$0   X/L=0.    .05    .10    .15    .20    .25    .30
           2   .35    .40    .45    .50    .55    .60    .65    .70    .75    .80
           3  .85    .90    .95    1.$
AA3          T=T+DT
             U=U+1
             WHENEVER T.G.TMAX,TRANSFER TO AA1
            INTERIOR POINTS
AA4          DXX=0.
             THROUGH AA6,FOR I=1,1,I.E.N
             A=SQRT.(G*Y(I))
             LC=A/Y(I)
             DXI=(V(I)+A)*DT
             WHENEVER DXI.G.DXX,DXX=DXI
             WHENEVER DXI.G.DX
AA5          T=T-.1*DT
             DT=.9*DT
             TH=DT/DX
             TRANSFER TO AA4
             END OF CONDITIONAL
             VR=V(I)+(V(I-1)-V(I))*TH*(V(I)+A)
             YR=Y(I)+(Y(I-1)-Y(I))*TH*(V(I)+A)
             WHENEVER V(I).G.A
```

*Fig. 12.41 Programa MAD para regulación de crecidas en un canal rectangular.*

```
          VS=V(I)+(V(I-1)-V(I))*TH*(V(I)-A)
          YS=Y(I)+(Y(I-1)-Y(I))*TH*(V(I)-A)
          OTHERWISE
          VS=V(I)+(V(I)-V(I+1))*TH*(V(I)-A)
          YS=Y(I)+(Y(I)-Y(I+1))*TH*(V(I)-A)
          END OF CONDITIONAL
          VP(I)=.5*(VR+VS+LC*(YR-YS))-C7*V(I)*.ABS.V(I)/R.(Y(I))*DT+G*S
        2 A*DT
AA6       YP(I)=.5*(YR+YS+(VR-VS)/LC)
         UPSTREAM BOUNDARY CONDITION
          A=SQRT.(G*Y)
          Q1=Q.(T)/B
          LC=A/Y
          WHENEVER V.G.A
          YP=(Q1.P.2/G).P..3333
          VP=Q1/YP
          OTHERWISE
          VS=V+(V-V(1))*TH*(V-A)
          YS=Y+(Y-Y(1))*TH*(V-A)
          C11=VS-LC*YS-(C7*V*.ABS.V/R.(Y)-G*SA)*DT
          VP=.5*C11*(1.-SQRT.(1.+4.*LC*Q1/(C11*C11)))
          YP=Q1/VP
          END OF CONDITIONAL
         DOWNSTREAM BOUNDARY CONDITION
          A=SQRT.(G*Y(N))
          LC=A/Y(N)
          DXI=(V(N)+A)*DT
          WHENEVER DXI.G.DX,TRANSFER TO AA5
          WHENEVER DXI.G.DXX,DXX=DXI
          VR=V(N)+(V(N-1)-V(N))*TH*(V(N)+A)
          YR=Y(N)+(Y(N-1)-Y(N))*TH*(V(N)+A)
          C11=VR+LC*YR-(C7*V(N)*.ABS.V(N)/R.(Y(N))-G*SA)*DT
```



```
          YPMA=2.*YN
          YPMI=YOO
          YP1=.5*(YPMA+YPMI)
          THROUGH AA7,FOR I=0,1,I.G.12
          WHENEVER (C11*YP1-LC*YP1*YP1-CB*(YP1-YOO).P.M).G.O.
          YPMI=YP1
          OTHERWISE
          YPMA=YP1
          END OF CONDITIONAL
AA7       YP1=.5*(YPMA+YPMI)
          YP(N)=YP1
          VP(N)=C11-LC*YP(N)
          THROUGH AA8,FOR I=0,1,I.G.N
          V(I)=VP(I)
AA8       Y(I)=YP(I)
          TM=T/60.
          WHENEVER U/J*J.E.U,PRINT FORMAT$1H ,S20,2HT=,F7.2,S25,2HQ=,F7.1/4H  V=,21F6
        2 .2/4H  Y=,21F6.2*$,TM,Q1*B,V...V(N),Y...Y(N)
          WHENEVER DXX.L..8*DX,DT=1.15*DT
          TRANSFER TO AA3
          END OF PROGRAM
```

*Fig. 12.41 (Continuación.)*

TO=1200.,T1=1800.,K1=2.,K2=.5,B=20.,YN=6.,C=100.,L=10000.,N=20,ALP=.0016

G=32.2,M=1.5,CW=132.,TMAX=2400.,J=5*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TO = | 1200.000000, | T1 = | 1800.000000, | K1 = | 2.000000, | K2 = | .500000 |
| B = | 20.000000, | YN = | 6.000000, | C = | 100.000000, | L = | 1.000000E 04 |
| N = | 20, | ALP = | 1.600000E-03, | TMAX = | 2400.000000, | G = | 32.200000 |
| M = | 1.500000, | CW = | 132.000000 | | | | |
| QM = | 1859.031998, | QF = | 464.757999, | QO = | 929.515999, | YOO = | 2.326146 |
| DX = | 500.000000, | DT = | 20.789438 | | | | |

VELOCITIES AND DEPTHS AT 500 FOOT INTERVALS

TIME IN MINUTES

| X/L=0. | | .05 | .10 | .15 | .20 | .25 | .30 | .35 | .40 | .45 | .50 | .55 | .60 | .65 | .70 | .75 | .80 | .85 | .90 | .95 | 1. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | T= | 1.73 | | | | | Q= | 1010.0 | | | | | | | | | | | |
| V= | 8.11 | 8.02 | 7.94 | 7.86 | 7.80 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 |
| Y= | 6.22 | 6.15 | 6.10 | 6.06 | 6.02 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 |
| | | | T= | 3.46 | | | | | Q= | 1090.6 | | | | | | | | | | | |
| V= | 8.38 | 8.29 | 8.21 | 8.12 | 8.05 | 7.98 | 7.91 | 7.86 | 7.81 | 7.78 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 |
| Y= | 6.51 | 6.41 | 6.33 | 6.26 | 6.19 | 6.14 | 6.09 | 6.06 | 6.03 | 6.01 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 |
| | | | T= | 5.20 | | | | | Q= | 1171.1 | | | | | | | | | | | |
| V= | 8.59 | 8.51 | 8.43 | 8.35 | 8.27 | 8.19 | 8.12 | 8.06 | 7.99 | 7.94 | 7.89 | 7.85 | 7.81 | 7.78 | 7.77 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 | 7.75 |
| Y= | 6.82 | 6.71 | 6.61 | 6.51 | 6.42 | 6.35 | 6.28 | 6.21 | 6.16 | 6.12 | 6.08 | 6.06 | 6.03 | 6.02 | 6.01 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 | 6.00 |
| | | | T= | 6.93 | | | | | Q= | 1251.6 | | | | | | | | | | | |
| V= | 8.76 | 8.69 | 8.62 | 8.54 | 8.47 | 8.40 | 8.32 | 8.25 | 8.18 | 8.12 | 8.06 | 8.00 | 7.95 | 7.91 | 7.87 | 7.83 | 7.81 | 7.78 | 7.77 | 7.76 | 7.75 |
| Y= | 7.15 | 7.03 | 6.91 | 6.80 | 6.70 | 6.60 | 6.51 | 6.43 | 6.35 | 6.29 | 6.23 | 6.18 | 6.14 | 6.10 | 6.07 | 6.05 | 6.03 | 6.02 | 6.01 | 6.01 | 6.00 |
| | | | T= | 8.63 | | | | | Q= | 1330.5 | | | | | | | | | | | |
| V= | 8.90 | 8.84 | 8.77 | 8.71 | 8.64 | 8.57 | 8.50 | 8.43 | 8.36 | 8.30 | 8.23 | 8.17 | 8.11 | 8.05 | 8.00 | 7.95 | 7.91 | 7.88 | 7.85 | 7.82 | 7.80 |
| Y= | 7.47 | 7.35 | 7.22 | 7.10 | 6.99 | 6.88 | 6.77 | 6.69 | 6.59 | 6.50 | 6.42 | 6.35 | 6.29 | 6.24 | 6.19 | 6.15 | 6.11 | 6.09 | 6.06 | 6.04 | 6.03 |
| | | | T= | 10.19 | | | | | Q= | 1403.0 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.02 | 8.96 | 8.90 | 8.84 | 8.78 | 8.72 | 8.65 | 8.59 | 8.52 | 8.45 | 8.39 | 8.32 | 8.26 | 8.20 | 8.14 | 8.08 | 8.03 | 7.99 | 7.95 | 7.91 | 7.89 |
| Y= | 7.78 | 7.65 | 7.52 | 7.39 | 7.27 | 7.15 | 7.04 | 6.93 | 6.83 | 6.73 | 6.64 | 6.55 | 6.47 | 6.40 | 6.34 | 6.28 | 6.23 | 6.19 | 6.15 | 6.11 | 6.08 |
| | | | T= | 11.75 | | | | | Q= | 1475.4 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.13 | 9.07 | 9.02 | 8.97 | 8.91 | 8.85 | 8.79 | 8.73 | 8.67 | 8.60 | 8.54 | 8.47 | 8.41 | 8.35 | 8.29 | 8.23 | 8.17 | 8.12 | 8.07 | 8.04 | 8.03 |
| Y= | 8.08 | 7.95 | 7.82 | 7.69 | 7.56 | 7.44 | 7.32 | 7.20 | 7.09 | 6.98 | 6.88 | 6.78 | 6.69 | 6.60 | 6.52 | 6.45 | 6.38 | 6.32 | 6.27 | 6.21 | 6.15 |
| | | | T= | 13.31 | | | | | Q= | 1547.9 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.22 | 9.18 | 9.13 | 9.08 | 9.03 | 8.97 | 8.92 | 8.86 | 8.80 | 8.74 | 8.69 | 8.62 | 8.56 | 8.49 | 8.43 | 8.37 | 8.31 | 8.26 | 8.22 | 8.19 | 8.19 |
| Y= | 8.39 | 8.26 | 8.12 | 7.99 | 7.86 | 7.73 | 7.60 | 7.48 | 7.36 | 7.24 | 7.13 | 7.03 | 6.92 | 6.83 | 6.73 | 6.65 | 6.57 | 6.49 | 6.41 | 6.33 | 6.24 |
| | | | T= | 14.86 | | | | | Q= | 1620.4 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.32 | 9.27 | 9.23 | 9.18 | 9.14 | 9.09 | 9.03 | 8.98 | 8.93 | 8.87 | 8.81 | 8.75 | 8.69 | 8.63 | 8.57 | 8.51 | 8.46 | 8.41 | 8.37 | 8.36 | 8.39 |
| Y= | 8.70 | 8.56 | 8.43 | 8.29 | 8.16 | 8.03 | 7.90 | 7.77 | 7.65 | 7.52 | 7.40 | 7.29 | 7.18 | 7.07 | 6.97 | 6.87 | 6.77 | 6.68 | 6.58 | 6.48 | 6.35 |
| | | | T= | 16.42 | | | | | Q= | 1692.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.40 | 9.36 | 9.32 | 9.28 | 9.24 | 9.19 | 9.14 | 9.09 | 9.04 | 8.99 | 8.94 | 8.88 | 8.82 | 8.77 | 8.71 | 8.66 | 8.60 | 8.56 | 8.54 | 8.54 | 8.61 |
| Y= | 9.00 | 8.87 | 8.73 | 8.59 | 8.46 | 8.33 | 8.20 | 8.07 | 7.94 | 7.81 | 7.69 | 7.57 | 7.45 | 7.33 | 7.22 | 7.11 | 7.00 | 6.89 | 6.78 | 6.64 | 6.47 |



| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | T= | 17.92 | | | | | Q= | 1765.3 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.48 | 9.45 | 9.41 | 9.37 | 9.33 | 9.29 | 9.24 | 9.20 | 9.15 | 9.10 | 9.05 | 9.00 | 8.95 | 8.89 | 8.84 | 8.79 | 8.75 | 8.72 | 8.71 | 8.73 | 8.84 |
| Y= | 9.31 | 9.17 | 9.03 | 8.90 | 8.76 | 8.63 | 8.50 | 8.36 | 8.23 | 8.10 | 7.98 | 7.85 | 7.73 | 7.60 | 7.48 | 7.37 | 7.24 | 7.12 | 6.98 | 6.82 | 6.60 |
| | | | T= | 19.45 | | | | | Q= | 1833.4 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.56 | 9.52 | 9.49 | 9.45 | 9.41 | 9.37 | 9.33 | 9.29 | 9.24 | 9.20 | 9.15 | 9.10 | 9.06 | 9.01 | 8.96 | 8.92 | 8.89 | 8.86 | 8.87 | 8.92 | 9.06 |
| Y= | 9.59 | 9.46 | 9.32 | 9.18 | 9.05 | 8.92 | 8.78 | 8.65 | 8.51 | 8.38 | 8.25 | 8.12 | 8.00 | 7.87 | 7.74 | 7.61 | 7.48 | 7.34 | 7.18 | 6.99 | 6.73 |
| | | | T= | 20.85 | | | | | Q= | 1740.3 | | | | | | | | | | | |
| V= | 9.12 | 9.29 | 9.41 | 9.52 | 9.49 | 9.45 | 9.41 | 9.37 | 9.33 | 9.29 | 9.24 | 9.20 | 9.15 | 9.11 | 9.07 | 9.03 | 9.01 | 9.00 | 9.02 | 9.10 | 9.29 |
| Y= | 9.54 | 9.54 | 9.51 | 9.46 | 9.32 | 9.19 | 9.05 | 8.92 | 8.79 | 8.65 | 8.52 | 8.39 | 8.26 | 8.13 | 7.99 | 7.86 | 7.72 | 7.56 | 7.39 | 7.16 | 6.86 |
| | | | T= | 22.26 | | | | | Q= | 1544.6 | | | | | | | | | | | |
| V= | 8.46 | 8.65 | 8.82 | 8.96 | 9.09 | 9.20 | 9.29 | 9.36 | 9.41 | 9.37 | 9.33 | 9.29 | 9.25 | 9.21 | 9.17 | 9.14 | 9.13 | 9.13 | 9.17 | 9.28 | 9.51 |
| Y= | 9.13 | 9.21 | 9.26 | 9.29 | 9.28 | 9.26 | 9.21 | 9.14 | 9.06 | 8.92 | 8.79 | 8.66 | 8.52 | 8.39 | 8.25 | 8.11 | 7.96 | 7.79 | 7.59 | 7.34 | 6.99 |
| | | | T= | 23.66 | | | | | Q= | 1349.0 | | | | | | | | | | | |
| V= | 7.86 | 8.09 | 8.28 | 8.45 | 8.61 | 8.75 | 8.88 | 8.98 | 9.08 | 9.15 | 9.21 | 9.26 | 9.29 | 9.30 | 9.27 | 9.25 | 9.25 | 9.26 | 9.32 | 9.46 | 9.74 |
| Y= | 8.53 | 8.73 | 8.86 | 8.95 | 9.02 | 9.06 | 9.08 | 9.07 | 9.05 | 9.00 | 8.94 | 8.86 | 8.76 | 8.65 | 8.51 | 8.36 | 8.20 | 8.01 | 7.80 | 7.52 | 7.12 |
| | | | T= | 25.06 | | | | | Q= | 1153.3 | | | | | | | | | | | |
| V= | 7.27 | 7.52 | 7.75 | 7.96 | 8.14 | 8.31 | 8.46 | 8.60 | 8.72 | 8.82 | 8.92 | 9.00 | 9.07 | 9.13 | 9.19 | 9.24 | 9.30 | 9.37 | 9.47 | 9.64 | 9.96 |
| Y= | 7.93 | 8.15 | 8.34 | 8.49 | 8.62 | 8.72 | 8.80 | 8.85 | 8.88 | 8.89 | 8.88 | 8.85 | 8.80 | 8.74 | 8.65 | 8.54 | 8.40 | 8.23 | 8.00 | 7.70 | 7.26 |
| | | | T= | 26.46 | | | | | Q= | 957.6 | | | | | | | | | | | |
| V= | 6.66 | 6.95 | 7.22 | 7.46 | 7.67 | 7.86 | 8.04 | 8.20 | 8.35 | 8.48 | 8.60 | 8.71 | 8.81 | 8.90 | 8.99 | 9.08 | 9.18 | 9.30 | 9.46 | 9.70 | 10.11 |
| Y= | 7.19 | 7.48 | 7.73 | 7.94 | 8.13 | 8.29 | 8.42 | 8.52 | 8.61 | 8.67 | 8.70 | 8.72 | 8.72 | 8.69 | 8.64 | 8.57 | 8.46 | 8.31 | 8.11 | 7.81 | 7.35 |
| | | | T= | 27.87 | | | | | Q= | 762.0 | | | | | | | | | | | |
| V= | 5.98 | 6.34 | 6.66 | 6.94 | 7.19 | 7.41 | 7.61 | 7.80 | 7.97 | 8.12 | 8.26 | 8.39 | 8.52 | 8.64 | 8.75 | 8.88 | 9.01 | 9.17 | 9.37 | 9.66 | 10.13 |
| Y= | 6.37 | 6.72 | 7.04 | 7.31 | 7.55 | 7.76 | 7.95 | 8.10 | 8.23 | 8.34 | 8.43 | 8.49 | 8.53 | 8.54 | 8.53 | 8.49 | 8.41 | 8.29 | 8.10 | 7.81 | 7.36 |
| | | | T= | 29.27 | | | | | Q= | 566.3 | | | | | | | | | | | |
| V= | 5.19 | 5.66 | 6.04 | 6.38 | 6.67 | 6.93 | 7.17 | 7.38 | 7.57 | 7.75 | 7.92 | 8.07 | 8.22 | 8.36 | 8.50 | 8.65 | 8.81 | 9.00 | 9.23 | 9.55 | 10.04 |
| Y= | 5.46 | 5.89 | 6.27 | 6.60 | 6.90 | 7.17 | 7.40 | 7.60 | 7.78 | 7.93 | 8.06 | 8.17 | 8.24 | 8.30 | 8.32 | 8.31 | 8.27 | 8.17 | 8.00 | 7.74 | 7.30 |
| | | | T= | 30.67 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 4.91 | 5.10 | 5.38 | 5.76 | 6.12 | 6.43 | 6.70 | 6.94 | 7.17 | 7.37 | 7.56 | 7.73 | 7.90 | 8.07 | 8.23 | 8.40 | 8.59 | 8.80 | 9.05 | 9.39 | 9.87 |
| Y= | 4.73 | 5.08 | 5.44 | 5.83 | 6.19 | 6.51 | 6.79 | 7.04 | 7.26 | 7.46 | 7.63 | 7.77 | 7.89 | 7.98 | 8.04 | 8.06 | 8.04 | 7.97 | 7.83 | 7.60 | 7.20 |
| | | | T= | 32.08 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 5.29 | 5.37 | 5.49 | 5.63 | 5.80 | 6.00 | 6.24 | 6.49 | 6.74 | 6.97 | 7.18 | 7.38 | 7.58 | 7.76 | 7.95 | 8.14 | 8.34 | 8.57 | 8.84 | 9.17 | 9.63 |
| Y= | 4.39 | 4.68 | 4.97 | 5.26 | 5.56 | 5.85 | 6.14 | 6.43 | 6.69 | 6.93 | 7.14 | 7.32 | 7.47 | 7.59 | 7.68 | 7.74 | 7.75 | 7.71 | 7.61 | 7.41 | 7.06 |
| | | | T= | 33.48 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 5.60 | 5.63 | 5.68 | 5.77 | 5.87 | 6.00 | 6.14 | 6.29 | 6.46 | 6.64 | 6.83 | 7.03 | 7.24 | 7.44 | 7.65 | 7.86 | 8.08 | 8.32 | 8.59 | 8.92 | 9.34 |
| Y= | 4.15 | 4.39 | 4.63 | 4.89 | 5.15 | 5.41 | 5.66 | 5.91 | 6.15 | 6.39 | 6.61 | 6.81 | 7.00 | 7.15 | 7.28 | 7.36 | 7.41 | 7.40 | 7.33 | 7.17 | 6.89 |
| | | | T= | 34.88 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 5.84 | 5.83 | 5.85 | 5.89 | 5.96 | 6.05 | 6.15 | 6.26 | 6.39 | 6.53 | 6.67 | 6.83 | 6.99 | 7.17 | 7.36 | 7.57 | 7.79 | 8.04 | 8.31 | 8.62 | 9.01 |
| Y= | 3.98 | 4.17 | 4.38 | 4.60 | 4.82 | 5.05 | 5.29 | 5.52 | 5.74 | 5.96 | 6.17 | 6.36 | 6.54 | 6.70 | 6.84 | 6.95 | 7.02 | 7.05 | 7.02 | 6.91 | 6.70 |
| | | | T= | 36.46 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 6.05 | 6.04 | 6.06 | 6.10 | 6.15 | 6.21 | 6.28 | 6.37 | 6.47 | 6.58 | 6.69 | 6.82 | 6.95 | 7.10 | 7.25 | 7.42 | 7.60 | 7.80 | 8.03 | 8.29 | 8.61 |
| Y= | 3.84 | 4.00 | 4.17 | 4.36 | 4.56 | 4.76 | 4.97 | 5.18 | 5.39 | 5.60 | 5.79 | 5.98 | 6.16 | 6.31 | 6.45 | 6.57 | 6.65 | 6.70 | 6.70 | 6.63 | 6.47 |
| | | | T= | 38.07 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 6.19 | 6.17 | 6.17 | 6.19 | 6.21 | 6.26 | 6.32 | 6.40 | 6.48 | 6.57 | 6.67 | 6.78 | 6.89 | 7.02 | 7.15 | 7.30 | 7.46 | 7.63 | 7.82 | 8.04 | 8.28 |
| Y= | 3.75 | 3.87 | 4.01 | 4.16 | 4.33 | 4.51 | 4.70 | 4.89 | 5.09 | 5.28 | 5.46 | 5.64 | 5.81 | 5.97 | 6.11 | 6.23 | 6.33 | 6.39 | 6.41 | 6.38 | 6.29 |
| | | | T= | 39.68 | | | | | Q= | 464.8 | | | | | | | | | | | |
| V= | 6.29 | 6.26 | 6.25 | 6.24 | 6.26 | 6.29 | 6.33 | 6.38 | 6.45 | 6.53 | 6.62 | 6.71 | 6.82 | 6.93 | 7.05 | 7.18 | 7.32 | 7.47 | 7.63 | 7.81 | 7.98 |
| Y= | 3.70 | 3.78 | 3.89 | 4.01 | 4.15 | 4.31 | 4.47 | 4.64 | 4.82 | 4.99 | 5.17 | 5.34 | 5.51 | 5.66 | 5.80 | 5.92 | 6.03 | 6.10 | 6.15 | 6.16 | 6.13 |

***Fig. 12.42*** *Solución del computador al Ejemplo 12.13.*

Para las secciones extremas del canal las Ecs. (12.11.10) y (12.11.12) dan, cada una, una ecuación lineal con dos incógnitas $V_P$ e $y_P$, que, junto con una condición conocida en el extremo, permita que se obtenga la solución.

Al resolver las ecuaciones, es absolutamente esencial que $R$ y $S$ estén siempre dentro de $AB$ (Fig. 12.40); en caso contrario la solución es inestable.

*Ejemplo 12.13* Un canal rectangular de 20 pies de ancho y 10.000 pies de largo, $\alpha = 0{,}0016$, descarga bajo condiciones de flujo permanente uniforme a $y_n = 6{,}0$ pies. En el instante $t = 0$ aumenta el flujo en el extremo aguas arriba linealmente hasta que se duplica en 20 min. Entonces el flujo disminuye linealmente hasta la mitad del original en otros 10 min. Para Chézy $C = 100$, preparar un programa para el calculador para hallar la velocidad y la profundidad en el canal para los primeros 40 min de flujo. La curva caudal-altura de referencia en el extremo aguas abajo es $Q = 132(y - 2{,}34)^{3/2}$

El flujo permanente uniforme es

$$Q = CA\sqrt{RS} = 100 \times 20 \times 6\sqrt{\frac{20 \times 6}{20 + 12} \times 0{,}0016} = 930 \text{ pies}^3/\text{seg}$$

Por consiguiente,

$$Q = 930\left(1 + \frac{t}{1200}\right) \qquad 0 \le t \le 1200 \text{ seg}$$

y

$$Q = 4650 - 2{,}325t \qquad 1200 \le t \le 1800$$
$$Q = 465 \qquad t > 1800$$

En la Fig. 12.41 se da el programa para el calculador MAD para la solución de este problema y una parte de la solución en la Fig. 12.42.

Se debe tener cierta precaución al aplicar el programa de la Fig. 12.41 a flujo que crecen continuamente o flujos repentinos, ya que no se ha dispuesto para el manejo de mareas.

## 12.12 Mecánica de las relaciones lluvia-desagüe para áreas planas inclinadas

Un problema interesante y simplificado de características resuelto por Henderson† es el de la relación entre el agua de lluvia y su desagüe sobre una superficie plana inclinada. Para conseguir resultados más significa-

† Comunicación personal de F. M. Henderson, Professor of Civil Engineering, Canterbury University, Christchurch, Nueva Zelanda.



tivos se debe restar del caudal procedente de la lluvia, el caudal perdido por filtración. Se supone flujo unidimensional (Fig. 12.43), con $R \sim y$, $\cos\theta \approx 1$, $\operatorname{sen}\theta \approx S_0$, con $C$ el coeficiente de Chézy.

La ecuación de la cantidad de movimiento da

$$\gamma y\,\Delta x\,S_0 - \gamma y\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x - \tau_0\,\Delta x = \rho\frac{\partial}{\partial x}(V^2y)\,\Delta x + \rho\frac{\partial}{\partial t}(Vy)\,\Delta x$$

Sustituyendo $\tau_0$ por $\gamma V^2/C^2$ y simplificando

$$gy\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{gV^2}{C^2} - gyS_0 + V^2\frac{\partial y}{\partial x} + 2Vy\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (12.12.1)$$

La ecuación de continuidad da

$$\frac{\partial}{\partial x}(Vy)\,\Delta x = v_0\,\Delta x - \frac{\partial y}{\partial t}\Delta x$$

o sea

$$y\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} - v_0 = 0 \qquad (12.12.2)$$

Multiplicando la Ec. (12.12.2) por $V$ y restando de la Ec. (12.12.1)

$$gy\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{gV^2}{C^2} - gyS_0 + Vy\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial t} + v_0V = 0 \qquad (12.12.3)$$

Despejando $V$ del término en $V^2$,

$$V = C\sqrt{y\left(S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{v_0V}{gy}\right)} \qquad (12.12.4)$$

Para un tipo de problemas

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} \ll S_0$$

y

$$V = C\sqrt{yS_0 - \frac{v_0V}{g}} \qquad (12.12.5)$$

Como $v_0$ es muy pequeña para el caso de lluvia,

$$V \approx C\sqrt{yS_0} \qquad (12.12.6)$$

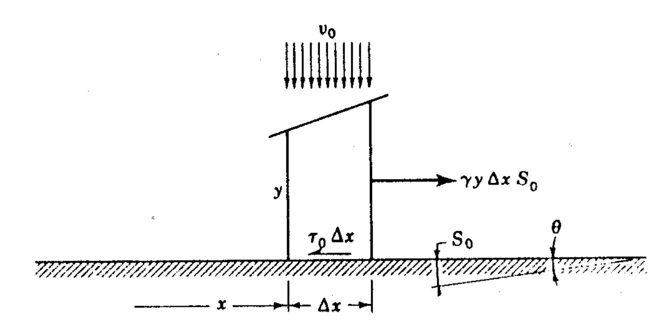



*Fig. 12.43 Volumen de control para las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento para lluvia y su desagüe.*

Ahora bien

$$q = Vy = C\sqrt{S_0}y^{3/2}$$

o sea, generalizando para otras fórmulas de resistencia distintas de la de Chézy,

$$q = \alpha y^n \tag{12.12.7}$$

La ecuación de continuidad en función de $q$ es

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \tag{12.12.8}$$

Estas dos últimas ecuaciones, una algebraica y otra diferencial, se pueden resolver a lo largo de una característica. De la Ec. (12.12.7)

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dq}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} = n\alpha y^{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{12.12.9}$$

que, combinada con la Ec. (12.12.8), da

$$n\alpha y^{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \tag{12.12.10}$$

Ahora, si

$$\frac{dx}{dt} = n\alpha y^{n-1} \tag{12.12.11}$$

entonces, la Ec. (12.12.10) se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \tag{12.12.12}$$

válida a lo largo del camino $xt$ dado por la Ec. (12.12.11).



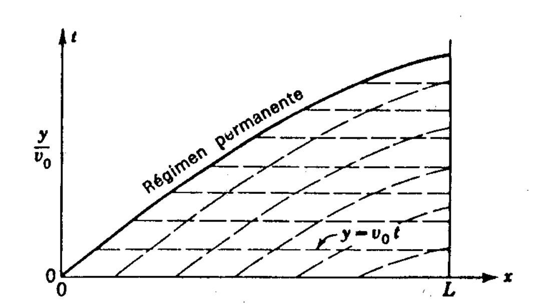



*Fig. 12.44 Crecida del líquido en el plano hasta la posición de régimen permanente.*

Para un caudal de lluvia constante, empezando en $t = 0$, la Ec. (12.12.12) se integra en

$$y = v_0 t \tag{12.12.13}$$

que establece que a lo largo de la característica $xt$ la profundidad del líquido aumenta linealmente. Sustituyendo la Ec. (12.12.13) en la Ec. (12.12.11) e integrando,

$$\frac{dx}{dt} = n\alpha(v_0 t)^{n-1}$$

o sea

$$x = x_0 + \alpha v_0^{n-1}t^n \tag{12.12.14}$$

siendo $x_0$ el punto de partida sobre la característica para $t = 0$. Para $x_0 = 0$, el diagrama de esta línea en el plano $xt$ es el de la Fig. 12.44. Como $t = y/v_0$ esta característica representa la profundidad final después de alcanzar el flujo de régimen permanente. Se produce la formación sobre el plano con la superficie paralela al plano, como se indicaba. El tiempo $t_s$ necesario para alcanzar el régimen permanente viene dado por la Ec. (12.12.14) haciendo $x = L$, $x_0 = 0$,

$$t_s = \left(\frac{L}{\alpha v_0^{n-1}}\right)^{1/n} \tag{12.12.15}$$

que es también el tiempo necesario para que aparezca la profundidad y desagüe máximos. El caudal para $x = L$ desde el extremo aguas abajo del plano es

$$q_{x=L} = \alpha y^n = \alpha(v_0 t)^n \qquad 0 < t \leq t_s \tag{12.12.16}$$

con el caudal de régimen permanente

$$q_{x=L} = Lv_0 = \alpha(v_0 t_s)^n \tag{12.12.17}$$

Para el apaciguamiento del desagüe, sea $v_0 = 0$ a partir de cierto instante $t$ posterior a $t_s$. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

a lo largo de la característica

$$\frac{dx}{dt} = \alpha n y^{n-1}$$

o sea $y$ = const a lo largo de la característica. La Fig. 12.45 muestra las características a partir de las condiciones para el régimen permanente cuando $v_0$ se convierte en cero.

Para hallar la ecuación del caudal en $x = L$, en primer lugar para $x$,

$$x = x_0 + \alpha n y_0^{n-1} t \tag{12.12.18}$$

para $t = 0$ al final de las condiciones de régimen permanente. De las relaciones de régimen permanente para la característica que pasa por $x = 0$, según la Ec. (12.12.14),

$$x = \alpha v_0^{n-1} t^n = \frac{\alpha}{v_0}(v_0 t)^n = \frac{\alpha y^n}{v_0}$$

o sea

$$x_0 = \frac{\alpha y_0^n}{v_0}$$

que es el perfil de la superficie líquida para el régimen permanente. Sustituyendo $x_0$ en la Ec. (12.12.18),

$$x = \frac{\alpha y_0^n}{v_0} + \alpha n y_0^{n-1} t$$

pero $q = \alpha y_0^n$,

$$x = \frac{q}{v_0} + \alpha n \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{(n-1)/n} t \tag{12.12.19}$$



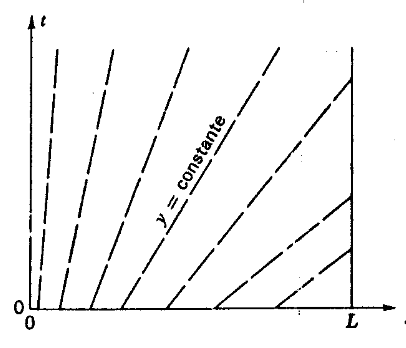



*Fig. 12.45 Líneas características para el desagüe de la superficie líquida al acabar la lluvia.*

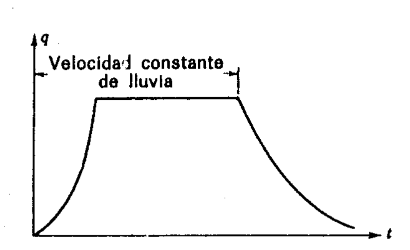



*Fig. 12.46 Hidrógrafa para el desagüe de un plano inclinado.*

que da el caudal $q$ para cualquier valor de $x$ durante el apaciguamiento. Para $x = L$,

$$L = \frac{q}{v_0} + \alpha n \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{(n-1)/n} t \tag{12.12.20}$$

de donde se puede calcular la hidrógrafa de apaciguamiento. Generalmente, el hidrógrafo del caudal para el periodo completo de lluvia es como el de la Fig. 12.46.

***Ejemplo 12.14*** Un aparcamiento cuadrado de 200 m de lado con una pendiente de 0,0016 está expuesto a una lluvia de 5 cm/hora durante 20 min. El coeficiente de Chézy es $C = 30$. Determinar la hidrógrafa para dicha superficie con esta tormenta.

$$v_0 = \frac{5 \times 10^{-2}}{3.600} = \frac{1}{72.000} \text{ m/seg}$$

$$\alpha = C\sqrt{S_0} = 30 \times \sqrt{0{,}0016} = 1{,}2$$

De la Ec. (12.12.15) para $n = 1{,}5$,

$$t_s = \left(\frac{L}{\alpha v_0^{n-1}}\right)^{1/n} = \left(\frac{200}{1{,}2\sqrt{0{,}139 \times 10^{-5}}}\right)^{2/3} = 1.250 \text{ seg}$$

De la Ec. (12.12.16)

$$Q = 200\alpha(v_0 t)^n = 200 \times 1{,}2(0{,}139 \times 10^{-5} t)^{1{,}5}$$
$$= 3{,}94 \times 10^{-7} t^{1{,}5} \qquad 0 < t < 1.250$$

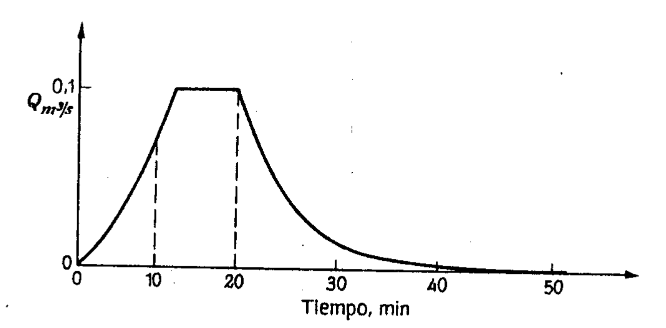



*Fig. 12.47* *Hidrógrafa del desagüe del Ejemplo 12.14.*

De la Ec. (12.12.20), para $q = Q/200$,

$$t = \frac{200 - 360Q}{0{,}29Q^{1/3}}$$

Para $t > 1250$ seg, $Q_{max} = 0{,}1$ m³/seg y la hidrógrafa es como la representada en la Fig. 12.47.

## Problemas

*12.1* Determinar el periodo de oscilación en un tubo en U que contiene 0,25 l de agua. El área de la sección del tubo vale 2 cm². Despreciar el rozamiento.

*12.2* Un tubo en U, que contiene alcohol, está oscilando con un máximo desplazamiento de 12,5 cm medido a partir de la posición de equilibrio. La longitud total de la columna líquida es de 100 cm. Determinar la velocidad máxima del fluido y el periodo de oscilación. Despreciar el rozamiento.

*12.3* En un tubo en U de 1 cm de diámetro hay un líquido de viscosidad $\nu = 0{,}0002$ m²/seg. La longitud total de la columna es de 1,5 m. Si uno de los meniscos está 250 mm por encima del otro cuando la columna está en reposo, determinar el tiempo que tarda un menisco hasta llegar a 2[illegible] de su posición de equilibrio.

*12.4* Desarrollar las ecuaciones del movimiento de un líquido en un tubo en U para resistencia laminar cuando $16\nu/D^2 = \sqrt{2g/L}$. *Sugerencia*: Ensayar $z = e^{-mt}(c_1 + c_2 t)$.

*12.5* Un tubo en U contiene un líquido que oscila con una velocidad de 1,5 m/seg en el instante en que los meniscos están a la misma altura. Calcular el tiempo que se tarda hasta que los meniscos vuelven a estar a la misma altura y determinar la velocidad en ese instante. $\nu = 1 \times 10^{-5}$ m²/seg, $D = 5$ mm, $L = 750$ mm.

*12.6* Un túnel horizontal de 3 m de diámetro tiene chimeneas de equilibrio de 3 m de diámetro espaciadas 1.600 m. Cuando las válvulas se cierran el agua del túnel asciende por una de las chimeneas hasta una altura de 15 m, mientras que en la otra asciende hasta 6 m. Para $f = 0{,}022$ encontrar la altura alcanzada en las dos próximas ondas.



*12.7* Dos depósitos circulares de 6 m de diámetro están conectados por una tubería de 1.000 m de longitud y 2 m de diámetro, $f = 0{,}020$ y las pérdidas menores valen 4,5 veces la altura de velocidad. El nivel en uno de los depósitos está 10 m por encima del nivel del otro cuando rápidamente se abre una válvula en la tubería. Calcular la máxima fluctuación en el nivel de agua de los depósitos.

*12.8* En una tubería de 1200 m de longitud, $D = 60$ cm y con una boquilla de 30 cm de diámetro en el extremo de aguas abajo, se abre con gran rapidez una válvula. Las pérdidas menores vienen dadas por $4V^2/2g$, siendo $V$ la velocidad en la tubería, $f = 0{,}024$ y $H = 9$ m. Determinar el tiempo que tarda en establecerse el 95 por 100 del caudal que corresponde al régimen permanente.

*12.9* Una válvula esférica ($K = 10$) situada en el extremo de una tubería de 500 m de longitud se abre rápidamente. $D = 1{,}0$ m, $f = 0{,}018$, las pérdidas menores valen $2V^2/2g$ y $H = 20$ m. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el caudal alcance el 80 por 100 del valor que corresponde al régimen permanente?

*12.10* Una línea de transporte de acero dotada de juntas de expansión tiene 90 cm de diámetro y 10 mm de espesor de pared. Si transporta agua, determinar la celeridad de una onda de presión.

*12.11* Por una tubería de acero de 20 mm de diámetro y de 2 mm de espesor fluye gasolina ($K = 11.000$ kg/cm², $S = 0{,}88$). Determinar la velocidad de una onda de presión.

*12.12* Determinar el máximo tiempo para el cierre rápido de una válvula colocada en una conducción de las siguientes características: $L = 1000$ m, $D = 120$ cm, $t' = 12$ mm, $V_0 = 3$ m/seg. La tubería es de acero y el fluido agua.

*12.13* Se cierra una válvula en 5 seg en el extremo de aguas abajo de una tubería que conduce agua a 1,83 m/seg, siendo la longitud de la tubería de 3.050 m, $a = 1.037$ m/seg. ¿Cuál es el máximo de presión a que se llega por este cierre?

*12.14* Determinar la longitud de tubería del Prob. 12.13 afectada por el pico de presión.

*12.15* Se cierra una válvula en el extremo de aguas abajo de una tubería de tal manera que solo un tercio de la tubería está sometido al máximo de presión. ¿En qué proporción del tiempo $2L/a$ se ha realizado el cierre?

*12.16* Una tubería de $L = 1.830$ m, $a = 915$ m/seg, tiene una válvula en su extremo de aguas abajo, $V_0 = 2{,}44$ m/seg y $h_0 = 18{,}3$ m. Esta se cierra en tres pasos espaciados en 1 seg, siendo cada reducción del área de un tercio de la apertura total. Encontrar la presión en la válvula y en el punto medio de la tubería a intervalos de 1 seg para los 5 seg después del cierre inicial.

*12.17* Una tubería, $L = 610$ m, $a = 1.220$ m/seg, tiene una válvula en su extremo de aguas abajo, $V_0 = 1{,}83$ m/seg y $h_0 = 30{,}5$ m. Determinar la presión en la válvula debida al cierre:

| $A_v/A_{v0}$ | 1 | 0,75 | 0,60 | 0,45 | 0,30 | 0,15 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$, seg | 0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 |

*12.18* Determinar, en el Prob. 12.17, el pico de presión en la válvula, cuando ésta reduce de forma uniforme el área de salida en el cierre, siendo el tiempo total de cierre 3,0 seg.

*12.19* Encontrar la máxima reducción de área en intervalos de 0,5 seg para la

tubería del Prob. 12.17 cuando la máxima altura de carga sobre la válvula no puede exceder de 48 m.

*12.20* Deducir el método de la solución por las características para el golpe de ariete con la presión $p$ y el caudal $Q$ como variables dependientes.

*12.21* Determinar, utilizando el método gráfico, $\tau$ en función del tiempo en cerrar una válvula en el extremo aguas abajo de una tubería: $L = 2.000$ m, $a = 1.000$ m/seg, $H_0 = 100$ m, $V_0 = 1$ m/seg sin sobrepasar una altura de 140 m sobre la válvula.

*12.22* Resolver el Ejemplo 12.6 para cierre uniforme de la válvula en el mismo tiempo, y comparar con los resultados del ejemplo. (Solución de la calculadora.)

*12.23* Resolver el Ejemplo 12.6 por el método algebraico.

*12.24* Resolver el Ejemplo 12.6 por el método gráfico, despreciando el rozamiento y las pérdidas menores.

*12.25* Si se dobla la frecuencia de la onda del Ejemplo 12.7, obtener la solución gráfica.

*12.26* Resolver el problema del sistema de tuberías en serie del Ejemplo 12.9 cuando se intercambian las tuberías.

*12.27* Resolver el Ejemplo 12.8 por el método gráfico despreciando el rozamiento.

*12.28* Un canal rectangular transporta un caudal de 5 m³/seg por metro de anchura del canal, con una profundidad de 3 m. De forma repentina el caudal aguas arriba se incrementa hasta 7 (m³/seg)/m. Determinar la celeridad y altura de la ola de inundación.

*12.29* En un canal rectangular que lleva un flujo con una velocidad de 1,80 m/seg con una profundidad de 1,80 m se propaga aguas arriba una onda de inundación de 30 cm de altura. ¿Cuál es la velocidad de la onda, y cuánto se reduce el caudal por metro de ancho?

*12.30* Un canal rectangular de 3 m de anchura y 2 m de profundidad tiene un caudal de 30 m³/seg, cuando el flujo es totalmente detenido mediante el cierre de una compuerta aguas abajo. Calcular la altura y celeridad de la ola positiva de inundación resultante.

*12.31* Determinar la profundidad aguas abajo de la compuerta del Prob. 12.30 después de cerrarse.

*12.32* Hallar la superficie de aguas abajo de la compuerta del Prob. 12.30 3 seg después de cerrarse.

*12.33* Determinar la superficie de agua 2 seg después de la rotura ideal de un dique. La profundidad original era 30 m.

*12.34* Resolver el Ejemplo 12.13, mediante computador, para un aumento lineal del flujo del 50 por 100 más del flujo permanente en 15 min, que después disminuye al 75 por 100 del flujo permanente en 20 min. $C = 80$, ancho del canal 3 m.

*12.35* Calcular la hidrógrafa de desagüe para una lluvia de 40 mm/hora durante 40 min sobre una superficie plana impermeable de 120 m de longitud y 60 m de ancho. La superficie tiene una pendiente de 30 cm en los 120 m de longitud. $C = 75$.

*12.36* Despreciando el rozamiento, la máxima distancia vertical de los dos meniscos en una oscilación en un tubo en U es 0,30 m, siendo $L = 0,90$ m. El periodo de oscilación, en segundos, es:

(*a*) 0,52 (*b*) 1,92 (*c*) 3,27 (*d*) 20,6 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.



*12.37* La máxima velocidad de la columna líquida del Prob. 12.36 es, en m/seg,

(*a*) 0,045 (*b*) 0,093 (*c*) 0,492 (*d*) 0,984 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.38* En una oscilación sin rozamiento de un tubo en U, $L = 1,2$ m, $z = 0$, $V = 1,8$ m/seg. El máximo valor de $z$ es, en metros:

(*a*) 0,225 (*b*) 0,450 (*c*) 1,80 (*d*) 7,20 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.39* En el análisis de las oscilaciones de un tubo en U con resistencia laminar se hace la suposición de que

(*a*) el movimiento es permanente;
(*b*) la resistencia es constante;
(*c*) se aplica la ecuación de Darcy-Weisbach;
(*d*) la resistencia es una función lineal del desplazamiento;
(*e*) la resistencia en cada instante es la misma que si el movimiento fuese permanente.

*12.40* Cuando $16\nu/D^2 = 5$ y $2g/L = 12$ en la oscilación de un tubo en U con resistencia laminar,

(*a*) la resistencia es tan pequeña que puede despreciarse;
(*b*) los meniscos oscilan alrededor del eje $z = 0$;
(*c*) la velocidad es un máximo cuando $z = 0$;
(*d*) la velocidad es cero cuando $z = 0$;
(*e*) la velocidad de la columna es una función lineal de $z$.

*12.41* Con resistencia laminar a la oscilación en un tubo en U, $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $V_0 = 0,915$ m/seg cuando $t = 0$ y $z = 0$. El tiempo de máximo desplazamiento del menisco es, en segundos,

(*a*) 0,46 (*b*) 0,55 (*c*) 0,93 (*d*) 1,1 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.42* En el Prob. 12.41, el máximo desplazamiento, en metros, es

(*a*) 0,162 (*b*) 0,323 (*c*) 0,354 (*d*) 2,07 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.43* En el análisis de las oscilaciones en un tubo en U con resistencia turbulenta se supone que

(*a*) puede aplicarse la ecuación de Darcy-Weisbach;
(*b*) puede aplicarse la ecuación de Hagen-Poiseuille;
(*c*) el movimiento es permanente;
(*d*) la resistencia es una función lineal de la velocidad;
(*e*) la resistencia varía con el cuadrado del desplazamiento.

*12.44* En la oscilación en un tubo en U con régimen turbulento, el máximo desplazamiento es $z_m = 6,1$ m para $f = 0,020$, $D = 30,5$ cm. El mínimo desplazamiento $(-z_{m+1})$ de la misma columna fluida es

(*a*) $-4,06$ (*b*) $-4,79$ (*c*) $-5,03$ (*d*) $-6,10$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.45* Cuando una válvula se abre bruscamente en el extremo de aguas abajo de una larga tubería conectada por el extremo de aguas arriba a un depósito de agua,

(*a*) la velocidad alcanza su valor final instantáneamente si el rozamiento es despreciable;
(*b*) el tiempo que se tarda en alcanzar las nueve décimas partes del valor de la velocidad final es menor con rozamiento que sin rozamiento;
(*c*) el valor de $f$ no afecta al valor del tiempo necesario para adquirir una cierta velocidad;
(*d*) la velocidad aumenta exponencialmente con el tiempo;
(*e*) la velocidad final se alcanza en un tiempo menor que $2L/a$ seg.

*12.46* Una ola se diferencia del golpe de ariete

(*a*) por el tiempo que tarda la onda de presión en atravesar la tubería;
(*b*) por la presencia de un depósito en el extremo de la tubería;
(*c*) por la deceleración de la corriente en la unidad de tiempo;
(*d*) por la relación de la compresibilidad del líquido a la expansión de las paredes de la tubería;
(*e*) por la relación de la longitud al diámetro de la tubería.

*12.47* El golpe de ariete se produce únicamente cuando

(*a*) $2L/a > 1$ (*b*) $V_0 > a$ (*c*) $2L/a = 1$ (*d*) $K/E < 1$
(*e*) los efectos de la compresibilidad son importantes.

*12.48* El cierre de una válvula es *rápido* únicamente cuando

(*a*) $2L/a \geq t_c$ (*b*) $L/a \geq t_c$ (*c*) $L/2a \geq t_c$ (*d*) $t_c = 0$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.49* El aumento de altura sobre una válvula, debida al cierre rápido, es

(*a*) $a^2/2g$ (*b*) $V_0a/g$ (*c*) $V_0a/2g$ (*d*) $V_0^2/2g$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.50* La velocidad de una onda de presión a través de una tubería depende de

(*a*) la longitud de la tubería;
(*b*) la altura de carga inicial sobre la válvula;
(*c*) la viscosidad del fluido;
(*d*) la velocidad inicial;
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.51* Cuando la velocidad en una tubería se reduce bruscamente desde 3,0 m/seg a 1,8 m/seg por el cierre aguas abajo de una válvula, para $a = 1.000$ m/seg, el aumento de altura en metros es

(*a*) 300 (*b*) 180 (*c*) 120 (*d*) 90 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.52* Cuando $t_c = L/2a$ el tanto por ciento de la longitud de la tubería sometido a la altura máxima de carga es

(*a*) 25 (*b*) 50 (*c*) 75 (*d*) 100 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.53* Cuando el valor de la altura, en estado permanente, en una válvula es



36 m se produce un cierre parcial rápido tal que $\Delta h = 24$ m. La altura en la válvula en el instante en que regresa la onda reflejada es

(*a*) $-24$ (*b*) 12 (*c*) 24 (*d*) 60 (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.54* Una onda elemental puede desplazarse aguas arriba en un canal en el que $y = 1{,}20$ m, $V = 2{,}40$ m/seg, con una velocidad de

(*a*) 1,005 m/seg (*b*) 3,405 m/seg (*c*) 4,812 m/seg
(*d*) 5,805 m/seg (*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.55* La celeridad de una onda elemental en un líquido en reposo viene dada por

(*a*) $(gy^2)^{1/3}$ (*b*) $2y/3$ (*c*) $\sqrt{2gy}$ (*d*) $\sqrt{gy}$
(*e*) ninguna de las respuestas anteriores.

*12.56* Una onda negativa

(*a*) es una onda positiva que se mueve hacia atrás;
(*b*) es una onda positiva invertida;
(*c*) nunca se puede desplazar aguas arriba;
(*d*) nunca se puede desplazar aguas abajo;
(*e*) no cumple ninguna de las proposiciones anteriores.

*12.57* La solución algebraica del golpe de ariete

(*a*) debe despreciar el rozamiento;
(*b*) solo se puede obtener con un computador;
(*c*) se limita a tuberías únicas;
(*d*) necesita calcular un intervalo $\Delta t$ que dé un entero al dividirle por $L/a$ para cada tubería;
(*e*) solo es válido para cierres rápidos de válvulas.

## *Referencias*

Bergeron, L.: «Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity», traducido con el patrocinio de la ASME, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1961.

Halliwell, A. R.: Velocity of a Water-hammer Wave in an Elastic Pipe, *J. Hydraulics Div. ASCE*, vol. 89, n.º HY4, págs. 1-21, julio 1963.

Parmakian, J.: «Waterhammer Analysis», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1955 (también Dover Publications, Inc., Nueva York).

Streeter, V. L.: Computer Solution of Surge Problems, *Proc. Inst. Mech. Engrs. (London)*, vol. 180, part. 3E, 1965-66.

———: Valve Stroking to Control Water Hammer, *J. Hydraulics Div. ASCE*, vol. 89, n.º HY2, págs. 39-66, marzo 1963.

———: Water Hammer Analysis of Pipelines, *J. Hydraulics Div. ASCE*, vol. 90, n.º HY4, págs. 151-172, julio 1964.

———: Waterhammer Analysis with Nonlinear Frictional Resistance, en «Proceedings of the 1st Australasian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics», Pergamon Press, Londres, 1963.

———, y C. Lai: Water-hammer Analysis Including Fluid Friction, *Trans. ASCE*, vol. 128, part. I, papel n.º 3502, 1963.

# *Apéndices*

# A

# *Sistema de fuerzas, momentos y centroides*

Los conceptos que a continuación se exponen se han reunido en este apéndice para facilitar el trabajo con los sistemas de fuerzas. Se pasa revista brevemente a los sistemas sencillos de fuerzas, a los momentos de primero y de segundo orden, incluyendo el producto de inercia, y se definen también los centroides y los ejes centroides.

### *Sistemas sencillos de fuerzas*

Un diagrama de cuerpo libre de un objeto o de una parte de un objeto muestra la influencia de todos los otros cuerpos sobre él. La acción de la Tierra sobre un objeto se llama *peso* y es proporcional a su masa. Además, otras fuerzas y pares pueden actuar sobre las superficies de contacto del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está en reposo o se mueve en línea recta con velocidad uniforme se dice que está en *equilibrio*. Según el segundo principio del movimiento de Newton, puesto que no hay aceleración en un cuerpo libre, la suma de las componentes en cualquier dirección de todas las fuerzas ha de ser nula, y la suma de todos los momentos respecto a cualquier eje debe ser también nula.

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si son iguales las sumas de los componentes de las fuerzas en cualquier dirección y la suma de los momentos respecto de cualquier eje. El sistema de fuerzas equivalente más sencillo se llama *resultante* del sistema de fuerzas. Sistemas de fuerzas equivalentes producen siempre el mismo movimiento (o pérdida de movimiento) en un cuerpo libre.

En los sistemas de fuerzas coplanarias, la resultante es siempre una fuerza o un par. En los sistemas de fuerzas paralelas no coplanarias, la resultante es una fuerza o un par. En general, la resultante de sistemas no coplanarios puede ser o una fuerza, o un par, o una fuerza y un par.

La acción de un fluido sobre cualquier superficie puede remplazarse por el sistema de fuerzas resultantes que produce el mismo movimiento

o reacción externos que el sistema de fuerzas distribuidas que son ejercidas por el fluido. En este caso puede sustituirse por completo el fluido por la acción de la resultante.

## *Momentos de primero y segundo orden. Centroides*

El momento de un área, volumen, peso o masa puede determinarse de una manera análoga a la que se usa para determinar el momento de una fuerza respecto de un eje.

### *Momentos de primer orden*

El momento de un área $A$ respecto del eje $y$ (Fig. A.1) viene expresado por

$$\int_A x\,dA$$

estando la integral extendida a toda el área. Para determinar el momento respecto a un eje paralelo, por ejemplo, $x = k$, se tiene

$$\int_A (x - k)\,dA = \int_A x\,dA - kA \tag{A.1}$$

que demuestra que siempre habrá un eje paralelo $x = k = \bar{x}$, respecto al cual el momento es cero. Este eje se llama eje centroidal y se obtiene de la Ec. (A.1) igualando a cero y despejando $\bar{x}$,

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_A x\,dA \tag{A.2}$$

Otro eje centroidal paralelo al eje de las $x$ se determina por la fórmula

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_A y\,dA \tag{A.3}$$

El punto de intersección de los ejes centroidales se llama *centroide* del área. Puede demostrarse fácilmente, por giro de ejes, que el momento de primer orden del área es cero respecto de cualquier eje que pase por el centroide. Cuando un área posee un eje de simetría, éste es un eje centroidal, ya que los momentos de los elementos simétricos respecto del eje son de igual magnitud y de signo opuesto. Cuando se conoce la posición del centroide, puede obtenerse sin integración el momento de primer orden respecto de cualquier eje sin más que multiplicar el área por la distancia del centroide al eje considerado,

$$\int_A z\,dA = \bar{z}A \tag{A.4}$$



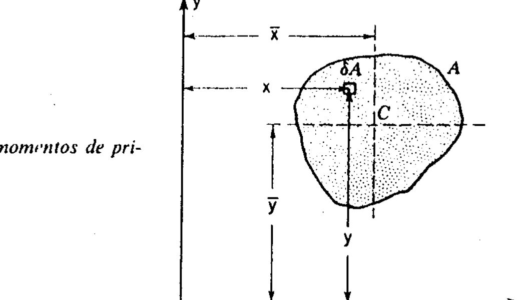



*Fig. A.1* Notación para los momentos de primero y segundo orden.

El eje centroidal de un triángulo, paralelo a un lado, está a un tercio de la altura desde ese lado; el centroide de un semicírculo de radio $a$ está a $4a/3\pi$ del diámetro.

Tomando el momento de primer orden de un volumen respecto a un plano, tal como el plano $yz$, la distancia a su centroide se determina análogamente,

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\int_V x\,dV \tag{A.5}$$

El centro de masa de un cuerpo se determina por el mismo procedimiento,

$$x_m = \frac{1}{M}\int_M x\,dm \tag{A.6}$$

siendo $dm$ un elemento de masa y $M$ la masa total del cuerpo. En la práctica de la ingeniería, el *centro de gravedad* de un cuerpo coincide con su centro de masa.

### *Momentos de segundo orden*

El momento de segundo orden de un área $A$ (Fig. A.1) respecto al eje $y$ es

$$I_y = \int_A x^2\,dA \tag{A.7}$$

Se le llama *momento de inercia* del área y es siempre positivo, puesto que $dA$ se considera siempre positiva. Haciendo una traslación del eje hasta un eje paralelo por el centroide $C$ del área,

$$I_c = \int_A (x - \bar{x})^2\,dA = \int_A x^2\,dA - 2\bar{x}\int_A x\,dA + \bar{x}^2\int_A dA$$

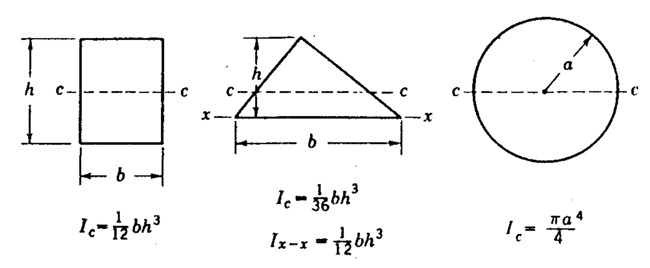



*Fig. A.2 Momentos de inercia de áreas simples respecto a ejes centroidales.*

Como

$$\int_A x\,dA = \bar{x}A \qquad \int_A x^2\,dA = I_y \qquad \int_A dA = A$$

resulta

$$I_c = I_y - \bar{x}^2A \quad \text{o sea} \quad I_y = I_c + \bar{x}^2A \tag{A.8}$$

Esto se expresa diciendo que el momento de inercia de un área respecto de cualquier eje es la suma del momento de inercia respecto de un eje paralelo a través del centroide y del producto del área por el cuadrado de la distancia entre los ejes. La Fig. A.2 da los momentos de inercia de tres áreas sencillas.

El *producto de inercia* $I_{xy}$ de un área se expresa por

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA \tag{A.9}$$

con la notación de la Fig. A.1. Puede ser positivo o negativo. Escribiendo la expresión del producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ respecto de ejes centroidales paralelos a los ejes $x$ e $y$ se obtiene

$$\bar{I}_{xy} = \int_A (x - \bar{x})(y - \bar{y})\,dA = \int_A xy\,dA - \bar{x}\int_A y\,dA - \bar{y}\int_A x\,dA + \bar{x}\bar{y}A$$

Simplificando y despejando $I_{xy}$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A \tag{A.10}$$

Siempre que uno de los ejes sea un eje de simetría del área, el producto de inercia es cero. El producto de inercia $I_{xy}$ de un triángulo que tiene dos lados, $b$ y $h$, a lo largo de los ejes de coordenadas positivas vale $b^2h^2/24$.

# B

# Derivadas parciales y diferenciales totales

## Derivadas parciales

Una derivada parcial es la variación de una variable por unidad de variación de otra cuando todas las restantes se mantienen constantes. Cuando se vea una derivada parcial hay que tener en cuenta cuáles son las variables que se mantienen constantes. Por ejemplo, la temperatura $T$ en un punto de un área plana puede expresarse en función de las coordenadas del punto y del tiempo, $x$, $y$, $t$. Para determinar cómo varía con el tiempo la temperatura en un punto, tal como el punto $x_0$, $y_0$, se sustituyen las coordenadas por sus valores reales y entonces la ecuación se convierte en una relación entre $T$ y $t$ únicamente. La variación de temperatura por unidad de variación del tiempo es $dT/dt$, la cual se escribe con diferenciales totales porque $T$ y $t$ son las dos únicas variables de la ecuación. Cuando se necesita una expresión de la variación de la temperatura por unidad de variación del tiempo en un punto cualquiera $x$, $y$, entonces deben considerarse éstas como constantes y debe tomarse la derivada de la ecuación con respecto a $t$. Esta se escribe $\partial T/\partial t$, para indicar que las otras variables $x$, $y$, se han mantenido constantes. Sustituyendo valores particulares $x_0$, $y_0$, en lugar de $x$, $y$, en la anterior expresión se obtiene $\partial T/\partial t$ en función de $t$. Por ejemplo, si

$$T = x^2 + xyt + \text{sen } t$$

entonces

$$\frac{\partial T}{\partial t} = xy + \cos t$$

Para el punto (1,2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 2 + \cos t$$

la que podría haberse obtenido sustituyendo primeramente (1,2) en la expresión de $T$,

$$T = 1 + 2t + \text{sen } t$$

y calculando después la derivada total

$$\frac{dT}{dt} = 2 + \cos t$$

Si se desea conocer la variación de la temperatura a lo largo de cualquier línea paralela al eje de las $x$ en un instante dado, se calcula $\partial T/\partial x$ y la coordenada $y$ particular de la línea y el tiempo se sustituyen más tarde; así

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x + yt$$

considerando a $y$ y a $t$ como constantes. A lo largo de la línea $y = 2$, en el instante $t = 4$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x + 8$$

y la variación de $T$ por unidad de variación de $x$ en ese instante puede encontrarse en cualquier punto $x$ a lo largo de la línea particular.

En la función

$$u = f(x,y)$$

$x$ e $y$ son variables independientes, y $u$ es la variable dependiente. Si $y$ se mantiene constante, entonces $u$ es únicamente función de $x$, y su derivada puede determinarse como si $u$ fuese función de una sola variable. Esto se denota por

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial u}{\partial x}$$

y se llama derivada parcial de $f$ con respecto a $x$ o derivada parcial de $u$ con respecto a $x$. Análogamente, si $x$ se mantiene constante, $u$ se convierte en una función de $y$ solamente, y $\partial u/\partial y$ es la derivada parcial de $u$ con respecto a $y$. Estas derivadas parciales se definen por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$



*Ejemplos*:

(a) $u = x^3 + x^2y^3 + 3y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + 6y$$

(b) $u = \text{sen}\,(ax + by^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \cos\,(ax + by^2) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by \cos\,(ax + by^2)$$

(c) $u = x \ln y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

### Diferencias totales

Cuando $u$ es una función de una única variable, $u = f(x)$,

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

y

$$\Delta u = f'(x)\, \Delta x + \epsilon\, \Delta x$$

en el cual

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$$

Calculando el límite de $\Delta u$, entonces

$$du = f'(x)\, \Delta x \equiv f'(x)\, dx$$

es la diferencial $du$.

Cuando $u = f(x,y)$, la diferencial $du$ se define de una manera análoga. Si se da a $x$ e $y$ incrementos $\Delta x$, $\Delta y$, entonces

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

en la que $\Delta x$, $\Delta y$ deben tender a cero. Si $\Delta u$ tiende a cero, cualquiera que sea la manera como $\Delta x$ y $\Delta y$ tienden a cero, se dice entonces que $u = f(x,y)$ es función continua de $x$ y de $y$. En lo que sigue se supone que $f(x,y)$ es continua y que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son también continuas.

Sumando y restando $f(x, y + \Delta y)$ a la expresión de $\Delta u$,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

Entonces,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \epsilon_1 \Delta x$$

en el cual $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \epsilon_1 = 0$, puesto que

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x}$$

Además,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

pues la derivada es continua, y

$$\frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \epsilon_2$$

en la cual $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \epsilon_2 = 0$. Análogamente,

$$f(x, y + \Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y + \epsilon_3 \Delta y$$

en el cual el $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \epsilon_3 = 0$. Sustituyendo en la expresión de $\Delta u$,

$$\Delta u = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \Delta x + \epsilon_3 \Delta y$$

Si se toma el límite cuando $\Delta x$ e $\Delta y$ tienden a cero, los últimos dos términos pueden despreciarse, puesto que son el producto de dos infinitésimos y, por consiguiente, son de mayor orden. Se obtiene entonces la diferencia total de $u$, que vale

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Si $x$ e $y$ en $u = f(x,y)$ son funciones de una variable independiente, por ejemplo, $t$, entonces $u$ se hace función únicamente de $t$ y tiene una derivada con respecto a $t$ si las funciones $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ se suponen diferenciables. Dando un incremento a $t$ resultan incrementos $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta u$, que tienden a cero con $\Delta t$. Dividiendo la expresión de $\Delta u$ por $\Delta t$,



$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_3 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

y tomando el límite cuando $\Delta t$ tiende a cero,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

La misma expresión general se obtiene cuando se consideran más variables; así

$$u = f(x,y,t)$$

siendo $x$, $y$ funciones de $t$; entonces,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

# C

# *Propiedades físicas de los fluidos*

*Tabla C.1 Propiedades físicas del agua*

| Temperatura, °C | Peso específico $\gamma$, $kg/m^3$ | Densidad $\rho$, $kg\text{-}seg^2/m^4$ | Viscosidad $\mu \times 10^4$, $kg\text{-}seg/m^2$ | Viscosidad cinemática $\nu \times 10^6$, $m^2/seg$ | Tensión superficial $\sigma \times 10^2$, $kg/m$ | Presión del vapor $p_v$, $kg/cm^2$ | Módulo de elasticidad volumétrico $K$, $kg/cm^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1.000 | 101,94 | 1,83 | 1,79 | 0,7709 | 0,0056 | 20.320 |
| 4,4 | 1.000 | 101,94 | 1,58 | 1,55 | 0,7649 | 0,0077 | 20.812 |
| 10,0 | 1.000 | 101,94 | 1,34 | 1,31 | 0,7560 | 0,0119 | 21.445 |
| 15,6 | 1.000 | 101,94 | 1,14 | 1,12 | 0,7486 | 0,0183 | 21.937 |
| 21,1 | 999 | 101,83 | 0,996 | 0,975 | 0,7396 | 0,0253 | 22.429 |
| 26,7 | 995 | 101,43 | 0,879 | 0,864 | 0,7322 | 0,0358 | 22.851 |
| 32,2 | 994 | 101,33 | 0,776 | 0,765 | 0,7233 | 0,0492 | 23.132 |
| 37,8 | 993 | 101,22 | 0,693 | 0,684 | 0,7128 | 0,0675 | 23.273 |
| 49,0 | 987 | 100,61 | 0,571 | 0,567 | 0,6935 | 0,1195 | 23.413 |
| 66,0 | 980 | 99,90 | 0,442 | 0,442 | 0,6637 | 0,2601 | 23.062 |
| 82,0 | 970 | 98,88 | 0,354 | 0,358 | 0,6340 | 0,5273 | 22.359 |
| 100,0 | 958 | 97,66 | 0,290 | 0,296 | 0,5997 | 1,0335 | 21.304 |

*Tabla C.2 Propiedades de los gases a bajas presiones y 25° C*

| Gas | Fórmula química | Peso molecular $M$ | Constante de los gases $R$ $mkg/kg_m\,°C$ | Calores específicos, $kcal/kg_m\,°C$ | | Relación de calores específicos $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $c_p$ | $c_v$ | |
| Aire | — | 29,0 | 29,3 | 0,240 | 0,171 | 1,40 |
| Monóxido de carbono | $CO$ | 28,0 | 30,3 | 0,249 | 0,178 | 1,40 |
| Helio | $He$ | 4,0 | 212,0 | 1,250 | 0,753 | 1,66 |
| Hidrógeno | $H_2$ | 2,02 | 421 | 3,430 | 2,440 | 1,40 |
| Nitrógeno | $N_2$ | 28,0 | 30,2 | 0,248 | 0,177 | 1,40 |
| Oxígeno | $O_2$ | 32,0 | 26,5 | 0,219 | 0,157 | 1,40 |
| Vapor de agua | $H_2O$ | 18,0 | 47,1 | 0,445 | 0,335 | 1,33 |

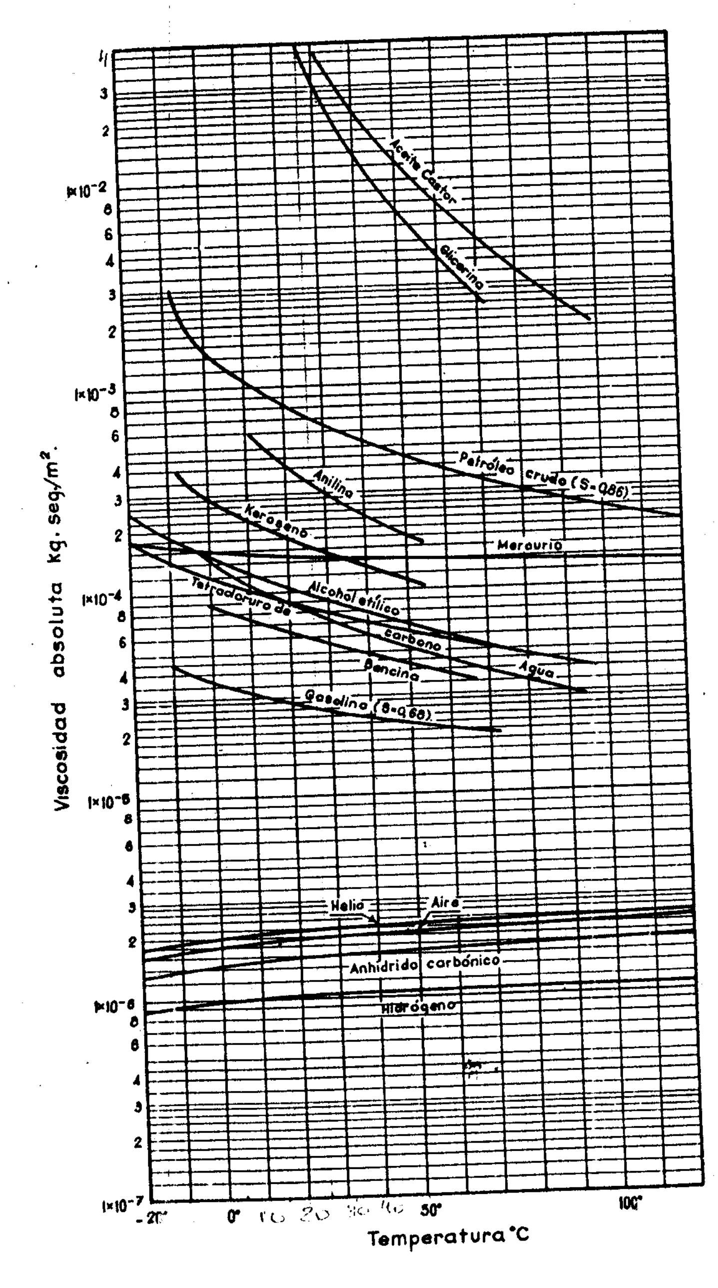



FIG. C.1 Viscosidades absolutas de algunos gases y líquidos.

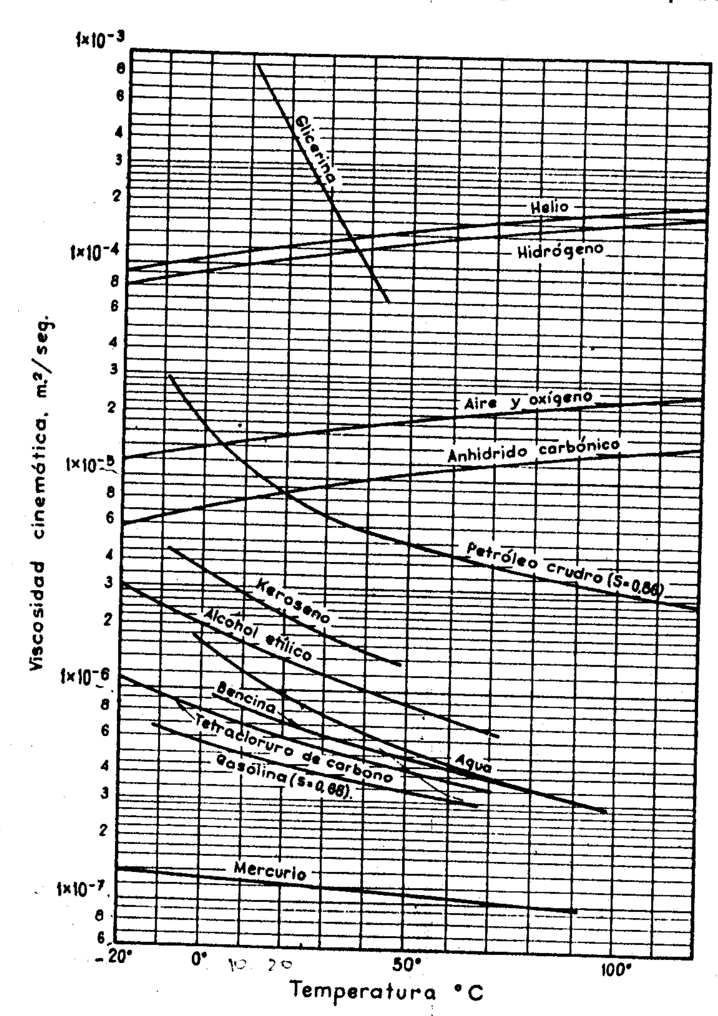



FIG. C.2 Viscosidades cinemáticas de algunos gases y líquidos. Los gases están a presión atmosférica normal.

# D

# Anotación

| Símbolo | Cantidad | Unidades (*m-kg-seg*) | Dimensiones (*MLT*) |
|---|---|---|---|
| $a$ | Constante, velocidad de onda | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $a$ | Aceleración | m/seg² | $LT^{-2}$ |
| **a** | Vector aceleración | m/seg² | $LT^{-2}$ |
| $a^*$ | Velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $A$ | Area | m² | $L^2$ |
| **A** | Pendiente adversa | ninguna | |
| $b$ | Distancia | m | $L$ |
| $b$ | Constante | | |
| $c$ | Velocidad de onda | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $c$ | Velocidad del sonido | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $c_p$ | Calor específico a presión constante | mkg/UTM °K | |
| $c_v$ | Calor específico a volumen constante | mkg/UTM °K | |
| $C$ | Concentración | N.°/m³ | $L^{-3}$ |
| $C$ | Coeficiente | ninguna | |
| $C$ | Tensión | kg/m² | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| **C** | Pendiente crítica | ninguna | |
| $D'$ | Desplazamiento volumétrico | m³ | $L^3$ |
| $D$ | Diámetro | m | $L$ |
| $e$ | Rendimiento | ninguna | |
| $e$ | Energía interna por unidad de masa | mkg/UTM | $L^2T^{-2}$ |
| $E$ | Energía interna | mkg | $ML^2T^{-2}$ |
| $E$ | Energía específica | mkg/kg | $L$ |
| $E$ | Pérdidas por unidad de peso | mkg/kg | $L$ |
| $E$ | Módulo de elasticidad | kg/m² | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| $f$ | Coeficiente de rozamiento | ninguna | |
| $F$ | Fuerza | kg | $MLT^{-2}$ |
| **F** | Vector fuerza | kg | $MLT^{-2}$ |
| **F** | Número de Froude | ninguna | |
| $F_B$ | Fuerza de empuje | kg | $MLT^{-2}$ |
| $g$ | Aceleración de la gravedad | m/seg² | $LT^{-2}$ |
| $g_0$ | Constante gravitatoria | kg$_m$-m/kg seg² | |
| $G$ | Caudal de masa por unidad de área | UTM/seg-m² | $ML^{-2}T^{-1}$ |
| $h$ | Altura; distancia vertical | m | $L$ |
| $h$ | Entalpía por unidad de masa | m-kg/UTM | $L^2T^{-2}$ |
| $H$ | Altura, elevación de alturas piezométricas | m | $L$ |
| **H** | Pendiente horizontal | ninguna | |
| $I$ | Momento de inercia | m⁴ | $L^4$ |
| $J$ | Punto de unión | ninguna | |
| $k$ | Relación de calores específicos | ninguna | |

| Símbolo | Cantidad | Unidades (m-kg-seg) | Dimensiones (MLT) |
|---|---|---|---|
| $K$ | Módulo volumétrico de elasticidad | kg/m² | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| $K$ | Coeficiente de pérdidas menores | ninguna | |
| $L$ | Longitud | m | $L$ |
| $L$ | Sustentación | kg | $MLT^{-2}$ |
| $l$ | Longitud, longitud de mezcla | m | $L$ |
| ln | Logaritmo natural o neperiano | ninguna | |
| $m$ | Masa | UTM | $M$ |
| $m$ | Factor de forma, constante | ninguna | |
| $m$ | Intensidad de un manantial | m³/seg | $L^3T^{-1}$ |
| $m$ | Masa por unidad de tiempo | UTM/seg | $MT^{-1}$ |
| $M$ | Peso molecular | | |
| $M$ | Cantidad de movimiento por unidad de tiempo | kg | $MLT^{-2}$ |
| **M** | Pendiente | ninguna | |
| **M** | Número de Mach | ninguna | |
| $\overline{MG}$ | Altura metacéntrica | m | $L$ |
| $n$ | Exponente constante | ninguna | |
| $n$ | Dirección normal | m | $L$ |
| $n$ | Coeficiente de rugosidad de Manning | | |
| $n$ | Número de moles | | |
| $\mathbf{n}_1$ | Vector normal unidad | | |
| $N$ | Velocidad de rotación | 1/seg | $T^{-1}$ |
| $NPSH$ | Altura de sección positiva neta | m | $L$ |
| $p$ | Presión | kg/m² | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| $p$ | Fuerza | kg | $MLT^{-2}$ |
| $p$ | Altura de vertedero | m | $L$ |
| $p$ | Perímetro mojado | m | $L$ |
| $q$ | Caudal por unidad de ancho | m²/seg | $L^2T^{-1}$ |
| $q$ | Velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| **q** | Vector velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $q_H$ | Transferencia de calor por unidad de masa | m kg/UTM | $L^2T^{-2}$ |
| $Q$ | Caudal | m³/seg | $L^3T^{-1}$ |
| $Q_H$ | Calor transferido en la unidad de tiempo | m-kg/seg | $ML^2T^{-3}$ |
| $r$ | Coeficiente | | |
| $r$ | Distancia radial | m | $L$ |
| **r** | Vector de posición | m | $L$ |
| $R$ | Radio hidráulico | m | $L$ |
| $R$ | Constante de los gases | m kg/UTM °K | |
| $R, R'$ | Diferencia de lecturas | m | $L$ |
| **R** | Número de Reynolds | ninguna | |
| $s$ | Distancia | m | $L$ |
| $s$ | Entropía por unidad de masa | m kg/UTM °K | |
| $s$ | | ninguna | |
| $S$ | Entropía | m kg/°K | |
| $S$ | Peso específico relativo, pendiente | ninguna | |
| $S$ | Relación | ninguna | |
| **S** | Pendiente | ninguna | |
| $t$ | Tiempo | seg | $T$ |
| $t, t'$ | Distancia, espesor | m | $L$ |
| $T$ | Temperatura | °K | |
| $T$ | Par torsor | kg-m | $ML^2T^{-2}$ |
| $T$ | Fuerza de tracción/m | kg/m | $MT^{-2}$ |
| $T$ | Anchura superior | m | $L$ |



| Símbolo | Cantidad | Unidades (m-kg-seg) | Dimensiones (MLT) |
|---|---|---|---|
| $u$ | Velocidad, componente de la velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $u$ | Velocidad periférica | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $u$ | Energía intrínseca | m kg/UTM | $L^2T^{-2}$ |
| $u_*$ | Velocidad de la tensión cortante | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $U$ | Velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $v$ | Velocidad, componente de velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $v_s$ | Volumen específico | m³/UTM | $M^{-1}L^3$ |
| $\forall$ | Volumen | m³ | $L^3$ |
| **V** | Vector velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $V$ | Velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $w$ | Componente de velocidad | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $w$ | Trabajo por unidad de masa | m kg/UTM | $L^2T^{-2}$ |
| $W$ | Trabajo por unidad de tiempo | m kg/seg | $ML^2T^{-3}$ |
| $W$ | Trabajo de expansión | m kg | $ML^2T^{-2}$ |
| $W_s$ | Trabajo del árbol | m kg | $ML^2T^{-2}$ |
| $W$ | Peso | kg | $MLT^{-2}$ |
| **W** | Número de Weber | ninguna | |
| $x$ | Distancia | m | $L$ |
| $x_p$ | Distancia al centro de presiones | m | $L$ |
| $X$ | Componente de la fuerza gravitatoria por unidad de masa | kg/UTM | $LT^{-2}$ |
| $y$ | Distancia, profundidad | m | $L$ |
| $y_p$ | Distancia al centro de presiones | m | $L$ |
| $Y$ | Coeficiente de expansión | ninguna | |
| $Y$ | Componente de la fuerza gravitatoria por unidad de masa | kg/UTM | $LT^{-2}$ |
| $z$ | Distancia vertical | m | $L$ |
| $Z$ | Distancia vertical | m | $L$ |
| $Z$ | Componente de la fuerza gravitatoria por unidad de masa | kg/UTM | $LT^{-2}$ |
| $\alpha$ | Coeficiente de corrección de la energía cinética | ninguna | |
| $\alpha$ | Angulo, coeficiente | ninguna | |
| $\beta$ | Coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento | ninguna | |
| $\beta$ | Angulo del álabe | ninguna | |
| $\Gamma$ | Circulación | m²/seg | $L^2T^{-1}$ |
| $\nabla$ | Operador vectorial | 1/m | $L^{-1}$ |
| $\gamma$ | Peso específico | kg/m³ | $ML^{-2}T^{-2}$ |
| $\delta$ | Espesor de la capa límite | m | $L$ |
| $\epsilon$ | Viscosidad cinemática turbulenta | m²/seg | $L^2T^{-1}$ |
| $\epsilon$ | Altura | m | $L$ |
| $\eta$ | Viscosidad turbulenta | kg seg/m² | $ML^{-1}T^{-1}$ |
| $\eta$ | Relación de alturas | | |
| $\eta$ | Rendimiento | ninguna | |
| $\theta$ | Angulo | ninguna | |
| $\kappa$ | Constante universal | ninguna | |
| $\lambda$ | Relación escalar; multiplicador indeterminado | ninguna | |
| $\mu$ | Viscosidad | kg seg/m² | $ML^{-1}T^{-1}$ |
| $\mu$ | Constante | | |
| $\nu$ | Viscosidad cinemática | m²/seg | $L^2T^{-1}$ |
| $\phi$ | Potencial de velocidad | m²/seg | $L^2T^{-1}$ |
| $\phi$ | Función | | |

| Símbolo | Cantidad | Unidades (m-kg-seg) | Dimensiones (MLT) |
|---|---|---|---|
| $\pi$ | Constante | | |
| $\Pi$ | Parámetros adimensionales | ninguna | |
| $\rho$ | Densidad | UTM/m³ | $ML^{-3}$ |
| $\sigma$ | Tensión superficial | kg/m | $MT^{-2}$ |
| $\sigma$ | Indice de cavitación | ninguna | |
| $\tau$ | Tensión cortante | kg/m² | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| $\psi$ | Función de corriente, dos dimensiones | m/seg | $LT^{-1}$ |
| $\psi$ | Función de corriente Stokes | m³/seg | $L^3T^{-1}$ |
| $\omega$ | Velocidad angular | rad/seg | $T^{-1}$ |

# E

# Ayudas para la programación de computadores

## Descifrador algorítmico de Michigan

El lenguaje de funcionamiento del descifrador algorítmico de Michigán (MAD) ha encontrado amplia aceptación donde se necesita un lenguaje con un mínimo de tiempo de funcionamiento, como con el programa estudiantil. Los programas dados en este texto están en este lenguaje, excepto para el programa FORTRAN al final de este apéndice. Si se comprende el FORTRAN, solo se necesitan explicar unas pocas expresiones especiales para transferir un programa MAD a un programa FORTRAN. Aquí se estudian algunas de las diferencias entre los dos lenguajes, antes de considerar varias técnicas útiles de programación para cálculos técnicos. Estas técnicas son: cuadraturas; integración numérica utilizando la regla de Simpson; interpolación parabólica; solución de las ecuaciones algebraicas por el método de bisección; y los métodos de Runge-Kutta para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas.

## E.1 Lenguaje MAD

El objeto que se persigue es el de ayudar, no a escribir programas MAD, sino a interpretarlos si se conoce otro lenguaje de funcionamiento.

### Postulados condicionales

Estos postulados comienzan con WHENEVER y pueden ser una condición de un postulado, tal como

```
WHENEVER H.G. 100, TRANSFER TO A47
```

o puede contener varios postulados, en cuyo caso se necesita el postulado final END OF CONDITIONAL. En la condición de un postulado dado, se lee «siempre que H sea mayor que 100, transferir el postulado A47». Las distintas letras entre los puntos utilizadas en este texto son:

| | |
|---|---|
| .E. | es igual a |
| .GE. | es mayor que o igual a |
| .L. | es menor que |
| .LE. | es menor que o igual a |
| .AND. | X.L.Y.AND.Y.G.Z permite dos condiciones, que se deben satisfacer a la vez |
| .OR. | X.L.Y.OR.Y.G.Z permite dos condiciones, una de las cuales se ha de satisfacer |

Ejemplo de postulado condicional

```
WHENEVER T.L.1.
X = 2.*Y + 17. + T
OR WHENEVER T.GE.1..AND.T.L.2.*T1
X = SIN.(2.*PI*T)
Y = 3.*ELOG.(X)
OTHERWISE
Z = 0.
END OF CONDITIONAL
```

Las condiciones se pueden agrupar como en FORTRAN.

*Postulado de iteración*

El postulado

```
THROUGH FOX, FOR I = 0,1,I.G.P
```

es un postulado para ejecutar los postulados del programa subsiguiente hasta e incluyendo el designado FOX, FOR I = 0, después de aumentar I en 1 y repetir el procedimiento, hasta que I se haga mayor que P. Si el postulado es

```
THROUGH FOX, FOR I = 1,1,I.E.P
```

se ejecutan los postulados comenzando con I = 1 y se terminan haciendo I = P − 1; después se deja I igual a P una vez que se abandona el lazo de iteración.



*Enteros*

Una variable cualquiera, hasta de seis caracteres empezando con un símbolo alfabético, se puede declarar entera de la forma siguiente:

```
INTEGER I, A436B,VV2P
```

La forma normal es la de la coma flotante. La expresión entera

```
WHENEVER U/J*J.E.U, TRANSFER TO PRINT
```

con U, J declarados enteros, solo se satisface cuando U es entero múltiplo de J. Por consiguiente, si J = 3, entonces siempre que U sea múltiplo de 3 se realiza la transferencia al postulado denominado PRINT.

*Expresiones aritméticas mixtas*

Las expresiones de forma mixta son legales, pero la división de una expresión de forma entera por otra de forma entera da un cociente que no tiene resto:

```
2. + 5/3 = 3.
```

*Postulado* PRINT COMMENT

Se escribe este postulado cualquiera que sea entre los dos signos $ siguientes, excepto que el primer espacio después del primer signo $ se utiliza para control de transporte.

*Postulado* PRINT FORMAT

Incluye la especificación para la máquina impresora antes de catalogar las expresiones que se van a imprimir.

*Postulado* PRINT RESULTS

Es un postulado de impresión simplificado que designa automáticamente las expresiones y sitúa cuatro variables en línea, y a espacios dobles.

*Otros convenios*

Para elevar a una potencia, se emplea .P., o sea

$X^N$ = X.P.N   $X^{1/3}$ = X.P..3333

El signo de valor absoluto es .ABS., o sea

$$.ABS.\ V(J-K) = |V(J-K)|$$

### *Postulado* READ AND PRINT DATA

Da lugar a que las tarjetas de datos se lean como si el material estuviera en el programa, y después se reproduce en el programa ejecutado. Los datos se marcan en las tarjetas de datos, como se representa en la parte superior de la Fig. 12.42.

## *E.2 Cuadraturas, integración numérica y regla de Simpson*

La integral

$$V = \int_{y_0}^{y_1} F(y)\, dy$$

se ha de calcular entre los límites conocidos $y_0$ e $y_1$ para la función continua finita y conocida $F(y)$. Dividiendo el intervalo entre $y_0$ e $y_1$ en $N$ tramos iguales ($N$ par) (Fig. E.1), se puede aplicar la regla de Simpson para hallar el área bajo la curva. Una sucesión de postulados para hallar $V$ es la forma siguiente: (sea G.(Y) = F(Y))

```
            INTEGER I, N
            H = (Y1 - Y0)/N
            V = G.(Y0) + G.(Y1)
            THROUGH AA1, FOR I = 1,2,I.E.N
AA1         V = V + 4.*G.(Y0 + I*H)
            THROUGH AA2, FOR I = 2,2,I.E.N
AA2         V = V + 2.*G.(Y0 + I*H)
            V = V*H/3.
            PRINT RESULTS V
```

Si se desean valores intermedios:

```
            V = 0.
            THROUGH FOX, FOR I = 0,2,I.G.N - 2
            V = V + H*(G.(Y0 + I*H) + G.(Y0 + (I + 2)*H)
        2   + 4.*G.(Y0 + (I + 1)*H))/3.
            Y = Y0 + (I + 2)*H
FOX         PRINT RESULTS Y,V
```



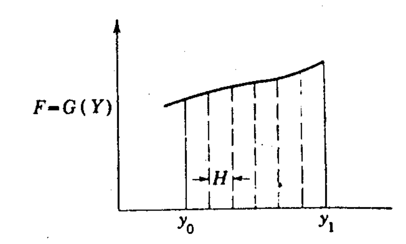



*Fig. E.1 Determinación del área bajo una curva por la regla de Simpson.*

## *E.3 Interpolación parabólica*

Con frecuencia se desean utilizar los datos experimentales en programas de computador. Por ejemplo, consideremos que $A$, área de un recipiente, es conocida en intervalos de 10 ft de la altura $z$, partiendo de $z_0$. Entonces para una altura cualquiera dentro del margen de los datos, se desea conocer el área del depósito. Dicho de modo más general (Fig. E.2), se conocen valores de $y$ para valores incrementos iguales de $x$. Si se desea el valor de $y$ para el mostrado de $x$, se halla en primer lugar una parábola de eje vertical que pase por los tres puntos trasladando el origen a $x'$, $y'$.

$$y' = ax'^2 + bx'$$

Sea $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} = h$; entonces

$$y_{n+1} - y_n = ah^2 + bh$$
$$y_{n-1} - y_n = ah^2 - bh$$

de donde

$$a = \frac{1}{2h^2}(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n)$$

$$b = \frac{1}{2h}(y_{n+1} - y_{n-1})$$

y

$$y = y_n + \frac{\theta^2}{2}(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) + \frac{\theta}{2}(y_{n+1} - y_{n-1})$$

donde se ha sustituido $\theta h$ por $x'$.

***Ejemplo E.1*** El área del depósito dado para cada 10 ft de altura por encima de $z_0 = 6320$ es

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 348 | 692 | 1217 | etc. |
| $z$ | 6320 | 6330 | 6340 | |

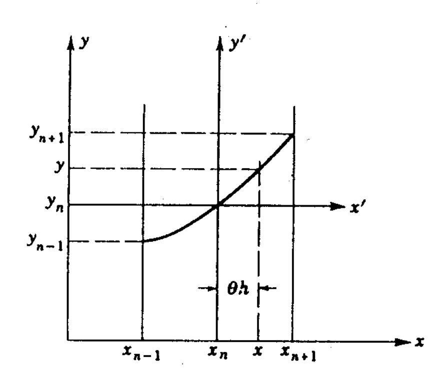



*Fig. E.2 Interpolación parabólica.*

El programa es, para $dz = 10$:

```
    INTEGER I
    I = (Z - Z0)/DZ
    TH = (Z - Z0 - I*DZ)/DZ
    WHENEVER I.E.0
    I = 1
    TH = TH - 1.
    END OF CONDITIONAL
    AREA = A(I)+.5*TH*(A(I+1)-A(I-1)+TH*(A(I+1)+ A(I+1)-
2   2.*A(I)))
    PRINT RESULTS Z,AREA
```

En este programa TH toma el lugar de $\theta$, y el postulado permite que $\theta h$ sea negativo cuando el valor de $Z$ esté en el primer espacio.

### E.4 Solución de ecuaciones algebraicas por el método de bisección

En la expresión algebraica $F(x) = 0$, cuando se conoce un margen de valores de $x$ que solo contiene una raíz, el método de la *bisección* es una manera práctica de obtenerla. Se ve mejor con un ejemplo: Se pide la profundidad crítica en un canal trapezoidal para un flujo dado $Q$ y las dimensiones de la Fig. E.3. La fórmula

$$GG = 1 - \frac{Q^2T}{gA^3} = 0$$

se tiene que satisfacer para cierta profundidad positiva $YCR$ mayor que 0 y menor que, por ejemplo, 100 ft. $T$ es el ancho en la parte superior (B + 2.*M*YCR). Se bisecciona el resultado y se prueba este valor de



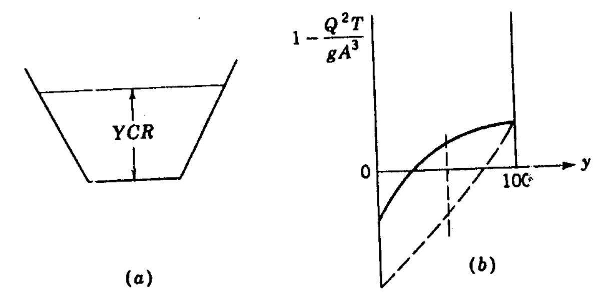



*Fig. E.3 Método de bisección.*

$YCR$. Si es positivo el valor de $GG$, como con la línea de trazo llano de la Fig. E.3$b$, entonces la raíz es menor que el punto medio y el límite superior se pasa al punto medio y se bisecciona la mitad que queda, etcétera.

En forma de programa

```
       INTEGER J
       INTERNAL FUNCTION F.(YY) = 1. - Q*Q*
   2   (B + 2.*M*YY)/((YY*(B + M*YY)).P.3*G)
       YMAX = 100.
       YMIN = 0.
       YCR = .5*(YMAX + YMIN)
       THROUGH FOX, FOR J = 0,1,J.G.13
       WHENEVER F.(YCR).G.0.
       YMAX = YCR
       OTHERWISE
       YMIN = YCR
       END OF CONDITIONAL
FOX    YCR = .5*(YMAX + YMIN)
       PRINT RESULTS YCR
```

Las 14 iteraciones reducen el intervalo dentro del que tiene que estar la raíz a aproximadamente 0,01 ft.

### E.5 Solución de Runge-Kutta de ecuaciones diferenciales

La familia de soluciones de Runge-Kutta es para varios órdenes de exactitud, pero todas tienen la característica común de que la ecuación diferencial tiene su solución extendida hacia delante a partir de las condiciones conocidas en un incremento de la variable independiente sin utilizar la información fuera de este incremento.

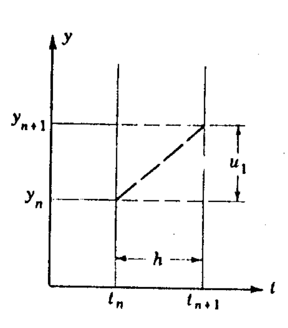



Fig. E.4 Método de Runge-Kutta de primer orden.

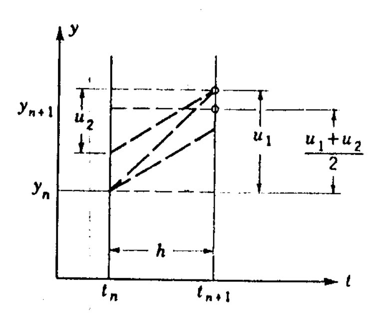



Fig. E.5 Método de Runge-Kutta de segundo orden.

*Primer orden*

En la ecuación

$$\frac{dy}{dz} = F(y,t)$$

$y = y_n$ cuando $t = t_n$ y se desea $y_{n+1}$ cuando $t = t_n + h$. En la Fig. E.4,

$$u_1 = hF(y_n,t_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + u_1$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

se calcula la ecuación a las condiciones iniciales, y se toma la extensión como la tangente a la curva en este punto.

*Segundo orden*

Se calcula la ecuación en los puntos extremos del intervalo $h$, como se indica en la Fig. E.5:

$$u_1 = hF(y_n,t_n)$$
$$u_2 = hF(y_n + u_1,\ t_n + h)$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

se calcula $u_2$ para el punto hallado por el método de primer orden.



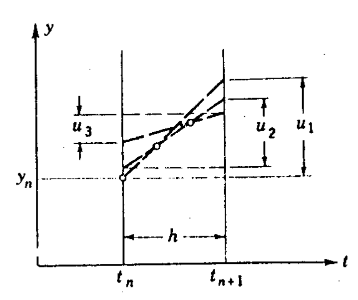



Fig. E.6 Método de Runge-Kutta de tercer orden.

*Tercer orden*

Se calcula la pendiente de la curva en el punto inicial, punto $\frac{1}{3}$ y punto $\frac{2}{3}$, de la manera siguiente (Fig. E.6):

$$u_1 = hF(y_n,t_n)$$

$$u_2 = hF\left(y_n + \frac{u_1}{3},\ t_n + \frac{h}{3}\right)$$

$$u_3 = hF\left(y_n + \frac{2u_2}{3},\ t_n + \frac{2h}{3}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{u_1}{4} + \frac{3u_3}{4}$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Se pueden simplificar las ecuaciones diferenciales de orden y grado superiores expresándolas como ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden.

***Ejemplo E.2*** Poner la Ec. (12.1.17) en forma conveniente para resolverla por el método de Runge-Kutta de tercer orden.

En la Ec. (12.1.17)

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f}{2D}\frac{dz}{dt}\left|\frac{dz}{dt}\right| + \frac{2g}{L}z = 0$$

Sea $y = dz/dt$, entonces $dy/dt = d^2z/dt^2$, y

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{f}{2D}y\,|y| - \frac{2g}{L}z = F_1(y,z,t)$$

$$\frac{dz}{dt} = y \qquad = F_2(y,z,t)$$

```
$COMPILE FORTRAN, PRINT OBJECT, EXECUTE,DUMP
C
C                 BASIC WATERHAMMER PROGRAM. RESERVOIR AT UPSTREAM END OF PIPE
C                 AND VALVE AT DOWNSTREAM END.  TAU=(1.-T/TC).P.M
C
      DIMENSION V(100),VP(100),H(100),HP(100)
1     READ INPUT TAPE 7, 100, J,N,FL,A,D,F,VO,TO,TMAX,HO,G,FM
      WRITE OUTPUT TAPE 6, 101, J,N,FL,A,D,F,VO,TO,TMAX,HO,G,FM
C
C                 STEADY STATE CALCULATIONS
C
      DHF=F*FL*VO*VO/(2.*G*D*FLOATF(N))
      HR=HO+FLOATF(N)*DHF+VO*VO/(2.*G)
      DO 2 I=0,N
      II=I+1
      V(II)=VO
      TEMP=N-I
2     H(II)=HO+TEMP*DHF
      C2=G/A
      C4=VO*VO/(C2*HO)
      TAU=1.
      T=0.
      DT=FL/(A*FLOATF(N))
      FF=F*DT/(2.*D)
      IU=0
      WRITE OUTPUT TAPE 6, 102
      II=N+1
```

```
      WRITE OUTPUT TAPE 6, 103, T, TAU, (H(I),I=1,II),(V(I),I=1,II)
4     T=T+DT
      IU=IU+1
      IF(T-TMAX) 10, 10, 1
C                 COMPUTATION OF INTERIOR POINTS
C
C
10    LIM=N-1
      DO 5 I=1,LIM
      II=I+1
      VP(II)=0.5*(V(II-1)+V(II+1)+C2*(H(II-1)-H(II+1))-FF*(V(II-1)*
     1ABSF(V(II-1))+V(II+1)*ABSF(V(II+1))))
5     HP(II)=0.5*(H(II-1)+H(II+1)+(V(II-1)-V(II+1))/C2-FF*(V(II-1)*
     1ABSF(V(II-1))-V(II+1)*ABSF(V(II+1)))/C2)
C
C                 UPSTREAM BOUNDRY CONDITION
C
      C5=H(2)-(V(2)-FF*V(2)*ABSF(V(2)))/C2
      IF (V) 11, 12, 12
11    HP=HR
      VP=C2*(HP-C5)
      GO TO 13
12    VP=A*(SQRT(1.+2.*G*(HR-C5)/(A*A))-1.)
      HP=C5+VP/C2
13    CONTINUE
C
C                 DOWNSTREAM BOUNDRY CONDITION
```

*Fig. E.7* *Programa FORTRAN para el golpe de ariete básico.*

```
C
      C1=V(N)+C2*H(N)-FF*V(N)*ABSF(V(N))
      IF(T-TO) 14, 14, 15
14    TAU=(1.-T/TC)**FM
      GO TO 16
15    TAU=0.
      VP(N+1)=0.
      HP(N+1)=C1/C2
      GO TO 6
16    CONTINUE
      C3=TAU*TAU*C4
      VP(N+1)=SQRT(C3*C3/4.+C3*C1)-0.5*C3
      HP(N+1)=(C1-VP(N+1))/C2
6     DO 7 I=0,N
      II=I+1
      V(II)=VP(II)
7     H(II)=HP(II)
      IF (IU/J*J-IU) 4,3,4
100   FORMAT (2I10,5F10.0/5F10.0)
101   FORMAT (26H1THE PARAMETERS ARE NOW... /8H0    J = I10/
     18H    N = I10/8H    L = F10.2/8H    A = F10.2/8H    D = F10.2/
     28H    F = F10.2/8H   VO = F10.2/8H   TO = F10.2/8H TMAX = F10.2/
     38H   HO = F10.2/8H    G = F10.2/8H    M = F10.2)
102   FORMAT (1H1,8X,52HHEADS AND VELOCITIES AT TENTH POINTS ALCNG THE P
     1IPE  /1H0,3X,23HTIME    TAU    X/L=    0.  6X,2H.1,6X,2H.2,6X,2H.3,6X
     3,2H.4,6X,2H.5,6X,2H.6,6X,2H.7,6X,2H.8,6X,2H.9,5X,2H1.)
103   FORMAT (1H0,2F7.3,2X,3H H=,11F8.2/17X,3H V=,11F8.2)
      END
```

Fig. E.7 (Continuación.)



Se resuelven simultáneamente las dos ecuaciones partiendo de las condiciones iniciales conocidas $y_n$, $z_n$, $t_n$:

$$u_{11} = hF_1(y_n,z_n,t_n) = h\left(-\frac{f}{2D}\,y_n\,|\,y_n\,| - \frac{2g}{L}\,z_n\right)$$

$$u_{12} = hF_2(y_n,z_n,t_n) = hy_n$$

$$u_{21} = hF_1\left(y_n + \frac{u_{11}}{3},\, z_n + \frac{u_{12}}{3},\, t_n + \frac{h}{3}\right) = h\left[-\frac{f}{2D}\left(y_n + \frac{u_{11}}{3}\right)\right.$$

$$\left.\times\left|y_n + \frac{u_{11}}{3}\right| - \frac{2g}{L}\left(z_n + \frac{u_{12}}{3}\right)\right]$$

$$u_{22} = hF_2\left(y_n + \frac{u_{11}}{3},\, z_n + \frac{u_{12}}{3},\, t_n + \frac{h}{3}\right) = h\left(y_n + \frac{u_{11}}{3}\right)$$

$$u_{31} = hF_1\,(y_n + \tfrac{2}{3}u_{21},\, z_n + \tfrac{2}{3}u_{22},\, t_n + \tfrac{2}{3}h)$$

$$= h\left(-\frac{f}{2D}\,(y_n + \tfrac{2}{3}u_{21})\,|\,y_n + \tfrac{2}{3}u_{21}\,| - \frac{2g}{L}\,(z_n + \tfrac{2}{3}u_{22})\right)$$

$$u_{32} = hF_2\,(y_n + \tfrac{2}{3}u_{21},\, z_n + \tfrac{2}{3}u_{22},\, t_n + \tfrac{2}{3}h) = h(y_n + \tfrac{2}{3}u_{21})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{u_{11}}{4} + \frac{3}{4}\,u_{31}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{u_{12}}{4} + \frac{3}{4}\,u_{32}$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Se han escrito las ecuaciones para la solución simultánea para un caso general igual que para el caso específico de la solución de la Ecuación (12.1.17).

En la Fig. E.7 se convierte el programa del golpe de ariete básico (Fig. 12.18) en FORTRAN.

# Soluciones de los problemas pares

## *Capítulo 1*

**1.6** $W = 48{,}25$ kg.
**1.8** $g_0 = 1000$ UTM m/($t_f$ seg$^2$).
**1.10** $g = 3{,}41$ m/seg$^2$.
**1.14** $\mu = 3{,}3 \times 10^{-4}$ kg seg/m$^2$.
**1.16** $\mu = 0{,}05$ kg seg/m$^2$.
**1.18** 87 por 100.
**1.20** $\nu = 5 \times 10^{-6}$ m$^2$/seg, $5 \times 10^{-2}$ stokes.
**1.22** $t = 0{,}092$ mm.
**1.24** 7,62 ($10^{-3}$) stokes.
**1.26** $v_s = 1{,}33 \times 10^{-3}$ m$^3$/kg$_m$ $= 1{,}31 \times 10^{-2}$ m$^3$/UTM.
**1.28** 2,94, 0,34 cm$^3$/g, 2.884 dinas/cm$^3$.
**1.30** 0,28 UTM/m$^3$, 0,031 UTM.
**1.32** 0,033 UTM/m$^3$.
**1.34** 230,5 kg/cm$^2$.
**1.36** Exponencialmente.
**1.38** 96,7 kg/cm$^2$.
**1.40** 50.000 kg/m$^2$.
**1.42** 1,092 kg/cm$^2$ (abs).
**1.44** 3,50 mm.
**1.46** 0,113 cm.

## *Capítulo 2*

**2.2** $p_A = 600 \times 10^{-4}$ kg/cm$^2$; $p_B = p_C = -300 \times 10^{-4}$ kg/cm$^2$; $p_D = -1.800 \times 10^{-4}$ kg/cm$^2$.
**2.4** $p_A = -6 \times 10^{-2}$ kg/cm$^2$; $p_B = p_C = +6 \times 10^{-2}$ kg/cm$^2$; $p_D = 22{,}2 \times 10^{-2}$ kg/cm$^2$.
**2.8** 0,74 kg/cm$^2$ (abs); $\rho = 0{,}088$ UTM/m$^3$.
**2.10** (*a*) 441 mm; (*b*) 6 m: (*c*) 2,04 m.
**2.12** 20,96 m $H_2O$.
**2.14** 7,35 m; 2,08 m.
**2.16** 2,41 m.
**2.18** 1,84 cm; 10,45 m.
**2.20** 31,5 cm.
**2.22** (*a*) 0,964 kg/cm$^2$; (*b*) 1,30 m.
**2.24** 30,9 cm.
**2.26** 1,66 kg/cm$^2$.
**2.28** 16,7 cm.
**2.30** 1.680 kg.
**2.32** $-152{,}4$ kg.
**2.34** 95.000 kg; 32.700 kg.
**2.36** $\dfrac{\gamma b h^2}{3}$.
**2.38** $\frac{11}{72}\gamma b^2 h^2$.
**2.40** 0,233 m por debajo de AB.
**2.42** 1.020 kg.

**2.44** 2.592 kg. 0,902 m por debajo de A.
**2.46** 23.350 kg.
**2.48** 0,27 m. **2.50** $\frac{3}{4}h$, $\frac{3}{8}b$.
**2.52** 2,23 m. **2.54** $\sqrt{\frac{3}{4}}b$.
**2.56** 42,8 cm. **2.60** 18,05 cm.
**2.62** 30 cm.
**2.66** (*a*) $\bar{x}$ = 10,4 m; (*b*) $C_{max}$ = 62.500 kg/m²; $C_{min}$ = 5.000 kg/m².
**2.68** 520 m kg. **2.70** 1.566 kg (en el aire).
**2.72** 3,60 cm. **2.74** 1,59 cm.
**2.76** 880 kg.
**2.78** (*a*) 16.000 kg, 4,08 m de profundidad desde la superficie libre; (*b*) 18.280 kg, 0,95 m a la izquierda del eje; (*c*) 0; (*d*) 0.
**2.80** 64. **2.82** 207,4 kg, $\bar{x}$ = 0,108 m.
**2.84** 20 − (4ρ/3) kg/m. **2.86** 437 m kg.
**2.88** 3.140 kg.
**2.90** (*a*) 400 kg hacia dentro, 0,67 m sobre el centro; (*b*) 630 kg hacia dentro, 0,423 m a la izquierda del centro.
**2.92** 12,9 mm. **2.94** 2,52 m.
**2.96** 0,40 m. **2.98** 0,10 m, 100 kg.
**2.100** 60 kg. **2.102** 1,80 m < $l$ < 4,74 m.
**2.104** No. **2.106** Inestable.
**2.108** 22,8 m/seg².
**2.110** $\theta$ = 14,03°, $p_B$ = 0; $p_C$ = −60 kg/m²; $p_D$ = 660 kg/m²; $p_E$ = 480 kg/m².
**2.112** $\theta$ = 9°28′, $p_B$ = 0; $p_C$ = −180 kg/m²; $p_D$ = 900 kg/m²; $p_E$ = 720 kg/m².
**2.114** $p_A$ = 0; $p_B$ = 1.650 kg/m²; $p_C$ = 1.050 kg/m².
**2.116** $p = p_0 \exp(-a_x x\rho/p_0)$.
**2.118** $a_x$ = 2,04 m/seg²; $a_y$ = −1,18 m/seg²; $\theta$ = 13°20′.
**2.122** 3,30 rad/seg. **2.124** 5,67 rad/seg.
**2.126** $2(gh_0/r_0)^{1/2}$. **2.128** $r^2\left(\frac{\omega^2}{2g}\right) - r \operatorname{sen}\theta = \frac{p - p_0}{\rho g}$.
**2.132** $p = \left[p_0^{(n-1)/n} + \frac{n-1}{n}\frac{\rho_0\omega^2 r^2}{2p_0^{1/n}}\right]^{n/(n-1)}$
**2.134** 22,1 r.p.m. **2.136** 6,43 kg.
**2.138** $F_H$ = 204 kg; $F_V$ = 408 kg.

## *Capítulo 3*

**3.2** 67,3 por 100, 123 kgm/seg, 21 kgm/seg.
**3.4** $(5 - z)/x = 2 = x\sqrt{y}$.
**3.6** 4 kgm/kg$_m$, 9 kgm/kg$_m$. **3.8** 1,85 exponente de la velocidad.
**3.10** 5,54 UTM/seg. **3.12** $4\left(1 - \frac{5}{8}\frac{x}{L}\right)^2$ m/seg.
**3.14** Sí. **3.22** 4.450.950 kgm.
**3.24** 25,9 kgm/seg. **3.26** 3,7 m; 8,5 m/seg.
**3.28** 71°35′; 25,6 m/seg. **3.30** 1,035.
**3.32** −1,215ρ kgm/seg. **3.34** 0,42 m, 2,94 m.
**3.36** 0,45 m, 2,68 m. **3.38** 0,23 m, 2,683 m.



**3.40** 4,83 m³/seg m, 4,71 m³/seg m. **3.42** 48 l/seg.
**3.44** 96 l/seg. **3.46** 5,14.
**3.48** 13,1 l/seg; 3,18 m. **3.50** $r = R/\sqrt{1 + y/H}$.
**3.52** −0,36 kg/cm².
**3.54** 66 l/seg; −0,3 kg/cm²; 0,04 kg/cm².
**3.56** 35,3 l/seg; $H_p$ = 21,7 m. **3.58** 0,84 m³/seg; 18.750 m kg.
**3.62** 1,082 m/seg. **3.64** Cero.
**3.66** 0,04. **3.68** 0,029 kgm/seg UTM °K.
**3.70** 4/3. **3.74** Cero.
**3.76** Fuerza superficial = −ρg. **3.78** 24 kg.
**3.84** 1.559 kg, 1.559 kg. **3.86** 2.620 kg, 4.550 kg.
**3.88** +426 kg, −908 kg. **3.90** 1.177 kg.
**3.92** 3.965 kg; 120.900 kgm/seg; 6.620 CV; 75,5 por 100; 880 kg/m².
**3.94** 27.400 kg; 6.300 CV. **3.96** 810 m/seg.
**3.98** 2,45 m³/seg; 41,7 por 100. **3.100** 20,6 cm; 212 CV.
**3.102** 23.100 kg, 23.100 kg. **3.104** 85,5 por 100; empuje < 0.
**3.106** 1.377,3 m/seg. **3.108** 132 km.
**3.112** 84¼°. **3.114** $V_0/3$.
**3.116** −159 kg, +31 kg. **3.122** 1.016 CV, 1.524 CV.
**3.124** 151°20′. **3.126** 0,5.
**3.128** 23,5 kgm/kg, 7,4 cm $H_2O$. **3.134** 3,5 m, 2,9 kgm/kg.
**3.136** 2,73 m³/seg m. **3.138** 0,056 m/seg².
**3.140** 30,8 kg.
**3.142** 2,295 m kg; 3,85 CV; 11,55 kgm/kg.
**3.144** 498 r.p.m. **3.146** 302 r.p.m.

## *Capítulo 4*

**4.2** (*a*) $\frac{\rho V^2}{\Delta p}$; (*b*) $\frac{Fg^2}{\rho V^6}$; (*c*) $\frac{t\,\Delta p}{\mu}$. **4.4** 3,6 × 10⁸ UTM.
**4.6** Adimensional; $T^{-1}$; $FLT^{-1}$; $FL$; $FL$; $LT$.
**4.8** $f\left(\frac{\Delta h}{l}, \frac{\mu D}{Q\rho}, \frac{Q^3\rho^5 g}{\mu^5}\right) = 0$. **4.10** $p = f(\gamma\,\Delta z)$.
**4.12** $F_B = f(\rho V g)$. **4.16** $\mathbf{M} = f\left(\frac{V}{\sqrt{p/\rho}}, k\right)$
**4.18** 3,18 m/seg. **4.20** $\gamma H^4 f\ \frac{\omega H^3}{Q}, e$
**4.22** $\rho V^2 D^2 f(\mathbf{R},\mathbf{M})$. **4.24** 0,522.
**4.26** Elegir tamaño de modelo $\frac{1}{70}$ o menor del tamaño del prototipo;
$\text{perd}_p = \text{perd}_m\left(\frac{D_m \nu_p}{D_p \nu_m}\right)^2$
**4.28** $c = \sqrt{gd}$, $c$ = celeridad, $d$ = profundidad.
**4.30** $\frac{\omega D^{3/2}\rho^{1/2}}{\sigma^{1/2}}$.
**4.32** 38 m/seg, 19 m³/seg, la misma cuando se expresan en alturas de velocidad.

## *Capítulo 5*

**5.2** $\frac{dp}{dl}(p + \gamma h) = \frac{2\mu U}{a^2}$; $Q = \frac{Ua}{3}$.

**5.4** 0,0825 kg; $5{,}3 \times 10^{-8}$ m³/seg.

**5.6** $Q = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dl}\frac{a^3}{12} + \frac{a}{2}(U - V)$.

**5.8** $\frac{54}{35}$, $\frac{6}{5}$.

**5.12** 3,38 kg/m² hacia la derecha.

**5.14** Rendimiento = $\frac{1}{3}$.

**5.16** $\frac{1}{270}\rho\left[\frac{1}{\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\right]^2 a^5$; $\frac{1}{3780}\rho\left[\frac{1}{\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\right]^3 a^7$; ambas por unidad de anchura.

**5.18** $\frac{4}{3}$.

**5.20** $\sqrt{2a}$.

**5.24** 0,106 kg/m².

**5.26** $0{,}89 \times 10^{-4}$ m³/seg; 51,6.

**5.28** $34{,}2 \times 10^{-6}$ m³/seg.

**5.30** 163 m.

**5.32** 24.333.

**5.34** 7,2 m/seg.

**5.38** 14 partículas/dm³.

**5.40** 0,223.

**5.42** 682 kg.

**5.44** $\delta = \frac{4{,}80}{\sqrt{\mathbf{R}_x}}$; $\tau_0 = 0{,}327\sqrt{\frac{\mu U^3 \rho}{x}}$.

**5.46** $\delta = \frac{0{,}254x}{\mathbf{R}_x^{1/6}}$.

**5.48** 1,05°

**5.50** 1,29 m/seg.

**5.52** 1.

**5.54** 525 kg.

**5.56** 101 kg.

**5.62** 0,00253 m/seg.

**5.64** 0,006 cm; 0,268 m/seg.

**5.66** 1,43 m/seg.

**5.68** 0,00203 m/m.

**5.70** 32 m³/seg.

**5.72** 0,000466 m/m.

**5.74** 8,38 m³/seg.

**5.76** 2,80 m/seg.

**5.78** $Q = f(y^{8/3})$.

**5.80** 0,535 m.

**5.82** $y = 0{,}458\,B$.

**5.84** 2,7 CV/km.

**5.86** 9,6 l/min.

**5.88** Aprox. $1{,}6 \times 10^6$.

**5.90** 17,6 cm.

**5.94** 3,7 kgm/kg; 2,47 CV.

**5.96** 1.230 CV.

**5.98** 15,6 km.

**5.100** 871 l/min.

**5.102** 4 l/min.

**5.104** 1.300 m³/min.

**5.106** 110 CV/km.

**5.108** 2,62 kg/seg.

**5.110** 63,6 cm.

**5.112** 1.092.000 ptas.

**5.114** 23,3 cm.

**5.116** 1,4 m; 1,176 m.

**5.118** $19{,}66 \times 10^{-6}$ m³/seg.

**5.120** 9,06; 147 m.

**5.122** 717 l/seg.

**5.124** (*a*) 2,27 m; (*b*) = 1,27 m; (*c*) = 26,80 m.

**5.126** 152.

**5.132** 58,7 kg/cm²; 11,25 cm.

## *Capítulo 6*

**6.2** 0,331 kcal/$kg_m$ °K.

**6.4** 19,86.

**6.6** 0,203 kcal/°K.

**6.8** 1.225 kcal/UTM.

**6.10** $\rho_1/\rho_2 = (T_1/T_2)^{1/(n-1)}$.

**6.12** 2,46.

**6.14** 16 por 100.

**6.16** $V = \sqrt{gy}$.

**6.18** 45,5° C; 3,5 kg/cm² (abs).

**6.20** Las mismas.



**6.22** 35,8 $kg_m$/seg; **M** = 0,556; 8,14 kg/cm² (abs); −2° C.

**6.24** 13,2 kg/cm² (abs); 13,1 $kg_m$/m³; 71° C.

**6.26** 0,124 $kg_m$/seg.

**6.28** 7,6 mm.

**6.30** 10,6 cm; 12,7 cm; 15,8 cm.

**6.32** 1,5 $kg_m$/seg.

**6.34** 0,955; 0,0938.

**6.36** **M** = 0,578; 0,9 kg/cm² (abs); 213° C; 255 m/seg.

**6.38** $\mathbf{M}_1 = 1{,}55$; $\mathbf{M}_2 = 0{,}686$; 1,0544 kg/cm² (abs); 148° C.

**6.50** 68 por 100.

**6.52** 0,284 m.

**6.54** 0,222 $kg_m$/seg.

**6.56** 3.134 kcal/$kg_m$.

**6.58** 0,233 UTM/seg.

**6.60** 9,64 kcal/$kg_m$.

**6.62** $q_H = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$.

**6.64** 18,85 m.

**6.66** 5,1$D$; 0,054 kg/cm² (abs).

**6.68** 2 cm.

## *Capítulo 7*

**7.2** (*a*) 0; (*b*) 0; (*c*) 0.

**7.4** $\omega_x = \frac{3}{2}$; $\omega_y = -2$; $\omega_z = -\frac{1}{2}$.

**7.6** $w = -2(x + y)z$.

**7.8** $\phi = -4x - 6y + \frac{7}{2}(x^2 - y^2) + c$.

**7.12** $\psi = \theta + c$.

**7.14** $\phi = 18x + c$.

**7.16** $\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$; $q_\infty$ = velocidad de la corriente libre.

**7.18** $u = -2{,}785$ m/seg, $v = w = 0$; $u = 0{,}459$ m/seg, $v = w = 1{,}021$ m/seg.

**7.20** $\phi = \frac{15}{r} + 15\,r\cos\theta$; $\psi = 15\cos\theta + \frac{15}{2}r^2\,\text{sen}^2\,\theta$.

**7.22** $\phi = 12x + 3{,}64\left[\frac{1}{\sqrt{(x - 1{,}456)^2 - \tilde{\omega}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - 1{,}456)^2 + \tilde{\omega}^2}}\right]$;
$\psi = 6r^2\,\text{sen}^2\,\theta + 3{,}64(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$.

**7.24** $p = (660 - 4.130\,\text{sen}^2\,\theta)$ kg/m².

**7.32** $u = 0$; $v = \frac{2\mu y}{1 + y^2}$; $p = -2\rho\mu^2\left(\frac{y}{1 + y^2}\right)^2$; $F = -\rho\mu^2\pi$.

**7.36** $q(0,1) = \frac{\sqrt{1{,}38}}{\pi}$ m/seg, $q(1,1) = \frac{\sqrt{2{,}11}}{\pi}$ m/seg.

## *Capítulo 8*

**8.2** 0,301 kg/cm².

**8.4** 8,85 m/seg.

**8.6** 20,8 m/seg.

**8.8** 1,323.

**8.10** 1.100 l/seg.

**8.12** 5° C; 261,4 m/seg.

**8.14** 2,46 l/min.

**8.16** 102,4 l/min.

**8.18** $y = 0{,}0543\,x^2$.

**8.20** $Y = H\cos^2\alpha$.

**8.24** $C_d = 0{,}751$; $C_v = 0{,}953$; $C_c = 0{,}788$.

**8.26** 0,269 kgm/kg; 6,6 kgm/seg.

**8.28** 0,223 kgm/kg; 8,48 kgm/seg.

**8.30** 3,6 cm.

**8.32** 29,5 cm.

**8.34** $D = 1{,}405\,y^{1/4}$, unidades: m.

**8.36** $D = 0{,}18\,y^{3/4}$, unidades: m.

**8.38** 114,5 seg.
**8.40** 5,43 $m^3$/seg.
**8.42** 672 kg/$cm^2$.
**8.44** $5{,}08 \times 10^{-3}$ UTM/seg; 174 m/seg.
**8.46** 17,2 cm.
**8.48** 0,0106 UTM/seg.
**8.50** 2.200 l/min.
**8.52** 947 l/seg.
**8.54** 0,536 m.
**8.56** (*a*) 1,33 m; (*b*) 0,91 m.
**8.58** 0,32 m kg.
**8.60** 0,81 ($10^{-2}$) poises.

## *Capítulo 9*

**9.2** $Q_c = \left(\frac{Q}{N}\right) n$; $H_c = \left(\frac{H}{N^2}\right) n^2$; $c$ = corregido, $n$ = const.
**9.4** La sincronización no es exacta.
**9.6** $Q = 0{,}125\, Q_1$; $H = 4H_1$.
**9.8** 70 r.p.m.
**9.10** 2 m; 460 r.p.m.
**9.12** 3 m.
**9.14** (*a*) 0,525 m; (*b*) 1200 r.p.m.; (*c*) 208 CV; (*d*) 1,28 CV.
**9.16** 15°.
**9.18** 18 m/seg; 54 m/seg.
**9.20** 35 m.
**9.22** 93,24 por 100.
**9.24** $H = 16{,}3 - 182Q$.
**9.26** (*a*) 500 r.p.m.; (*b*) 4 m; (*c*) 4,2 kgm; (*d*) 2,90 CV; (*e*) 0,3 kg/$cm^2$.
**9.30** 13,3 m.
**9.32** 17 cm.
**9.36** 37,7 mkg, 96,6 por 100.
**9.38** 3,5 m.

## *Capítulo 10*

**10.2** 165.
**10.4** 13,5 m.
**10.6** 110 l/seg; 0,7 kg/$cm^2$ (abs).
**10.10** 9,8 m.
**10.12** 80 l/seg.
**10.14** 7,5 cm.
**10.16** 6,8 cm.
**10.18** 11,5 m.
**10.20** 125 l/seg.
**10.24** 79 l/seg.
**10.26** 237 l/seg.
**10.28** $Q_1$ = 2,05 l/seg; $Q_2$ = 4,62 l/seg; $Q_{total}$ = 6,67 l/seg.
**10.30** 2.769 m.
**10.32** $Q_{AJ}$ = 35,5 l/seg; $Q_{BJ}$ = 35,0 l/seg; $Q_{JC}$ = 70,5 l/seg.
**10.34** $Q_A$ = 11,8 l/seg; $Q_B$ = 56,6 l/seg.
**10.36** 52 l/seg; 32 m.
**10.38** $Q_{BJ_1}$ = 264; $Q_{J_1A}$ = 466; $Q_{J_2J_1}$ = 202; $Q_{CJ_2}$ = 159; $Q_{DJ_2}$ = 43 l/seg.
**10.40** 58,5, 41,5; 31; 44; 2,5.
**10.42** 61,5, 38,5; 31, 44; 5,5.
**10.44** 0,392.
**10.46** 4,75 l/seg.
**10.48** 5,50 m.

## *Capítulo 11*

**11.2** 0,067 m.
**11.4** 170 $m^2$ por 100 m.
**11.6** $m = \sqrt{3}/3$; 2,13 m.
**11.8** $m = \sqrt{3}/3$; $b$ = 4,04 m; $y$ = 3,50 m.



**11.10** 0,000165.
**11.16** 0,6 m; 1,8 m.
**11.18** 0,59 m.
**11.20** 2,5 m.
**11.22** 0,57 m; 6,3 ($m^3$/seg)/m.
**11.26** 120 m.
**11.34** Elevación de 0,64 m.
**11.36** 0,378 m.

## *Capítulo 12*

**12.2** 1,90 m/seg, 4,95 seg.
**12.4** $z = V_0 t \exp(-mt)$.
**12.6** $z_1 = -4{,}4$ m, $z_2 = -4{,}3$ m.
**12.8** 40,2 seg.
**12.10** 1.010 m/seg.
**12.12** 1.790 seg.
**12.14** 460 m.
**12.18** 10,4 kg/$cm^2$.
**12.28** $c = -7{,}2$ m/seg; $y_1 - y_2 = 2{,}5$ m.
**12.30** 2,6 m; $c$ = 3,5 m/seg.

# Indice


Ablación, 357
Accesorios, pérdidas en, 288
Acoplamiento, fluido, 533-537
  tipo Foettinger, 534-537
Addison, H., 497
Adiabático reversible, flujo, 113
Agua, propiedades físicas del, 710
Alabes, fijos, 160-162
  móviles, 162-165
  serie de, 163-165
Alas de envergadura retraída, 354, 355
Aliviadero de crecida, flujo en, 584
Alta velocidad, vuelos a, 350-358
Altura, de succión positiva neta (N. P. S. H.), 541
  metacéntrica, 70-75
  total, línea de, 548-553
Amplificador fluido, 479-482
Análisis dimensional, 200-222
Analogía, eléctrica, 393
  entre ondas de choque y ondas en canales abiertos, 359-360
Anemómetro, aire, 440, 441
  de hilo caliente, 437-439
Angulo de Mach, 269
Anillo de tubos piezométricos, 428
Anotación, 713-716
Aparatos de medida, 446-472
Arrastre, o resistencia, de deformación, 264
    de forma, 264
    de onda, 220, 354, 355
    efecto de la compresibilidad sobre, 267-269
    sobre un cilindro, 266, 267
    sobre un disco circular, 265
    sobre un perfil, 267
    sobre un proyectil, 270
    sobre una esfera, 264, 265, 270
    sobre una placa plana, 257-262
    superficial, o pelicular, 264
Atmósfera, 44*n*.
Atmósfera, efecto sobre superficies planas, 58
  local, 42, 43
  normal, 43, 44
Avogadro, ley de, 25
Ayudas para la programación de computadores, 717-729

Bakhemeteff, B. A., 248, 616
Banda extensimétrica, 430
Barómetro, anaeroide, 45
  de mercurio, 45
Bergeron, L., 697
Bidimensional, flujo, 408-419
Binder, R. C., 497
Bisección, método de, 722, 723
Blasius, fórmula de, 279
Blasius, H., 279
Bomba volante, 156
Bombas, centrífugas, 523-527
  curva teórica altura-caudal, 526
  curvas características de, 528
  de flujo, axial, 523-524
    mixto, 523, 524
    radial, 523-527
  gráfico para elección de, 526
  teoría de, 506-511
Borda, boquilla de, 452
Boyle, ley de, 25
Brater, E. F., 497, 608*n*.
Bridgman, P. W., 228
Buckinham, E., 204
Buque, de rotores Flettner, 417
  resistencia de, 220, 221

Calentamiento aerodinámico, 356-358
Calor específico, 313-315, 710
Cámaras de equilibrio, de orificio, 633
  diferencial, 633, 634
  sencilla, 633
Cambel, A. B., 329, 347, 371
Camino, o distancia libre media, 22

Cantidad de movimiento, 141-171
en régimen no permanente, 143, 157, 169
factor de corrección, 144
momento de, 169-171, 504-511
Capa límite, 113, 252-266
definición de, 252, 253
ecuación de la cantidad de movimiento de, 254-256
en placas lisas, 252-262
en placas rugosas, 262
laminar, 256-258
números de Reynolds críticos, 258
turbulenta, 258-266
Capilaridad, 29
Caudalímetro de codo, 463, 464
Caudalímetros, 448-472
electromagnéticos, 472
Cavitación, 537-541
Centipoise, 20
Centrífugo, compresor, 530-533
Centro de presión, 54-56, 57
Centroides, 702-704
Cilindro circular, 415
coeficientes de arrastre, o resistencia, 266, 267
flujo alrededor de, 415-419
Circulación, 411, 416-418, 528
Clasificación, de perfiles superficiales, 602-605
del flujo en canales abiertos, 580, 581
Codos, fuerzas sobre, 146, 147
Coeficiente, de contracción, 449
de presión, 210, 214, 215
de rozamiento, o de fricción, 271-285, 337-342, 347-350
de velocidad, 513
Coeficientes de rugosidad de Manning, 273
Cojinete, cilíndrico, 290
plano, 290
Colebrook, 275-278
Componentes escalares de los vectores, 376-378
Compresibilidad, de los gases, 24-26
de los líquidos, 26
Compresores centrífugos, 530-533
Conceptos de flujo fluido, 109-172
Condiciones, críticas, 326
de contorno, 391-392, 645-652
Conductos, no circulares, 569, 570
Conservación de la energía, 132, 133, 232-235
Constante de los gases, 24-26
universal, 25
Continuo, el, 22
Control, de flujo, 394-418
de inundaciones, 675-686
de olas, 632-634
de presión, 482-487
Convertidor de par, 533-537
fluido, 533-537
Coordenadas naturales, 381-382
Cross, Hardy, 567
Cuencos protectores, 587, 588
Cuerpo, de Rankine, 402
fluidodinámico, 263
Curva, de caudal-altura, 473
$F + M$, 585, 586
Curvas, de Fanno, 333-336
de Rayleigh, 333-336, 343

Charles, ley de, 24
Chézy, fórmula de, 272
Chick, A. C., 228
Choque, ondas de, 329-336, 505
Chorros, acción fluida de, 150-165
Chow, V. T., 616
Church, A. H., 546

Daily, U. W., 513*n*., 546
Darcy-Weisbach, fórmula de, 272, 278, 282-290, 337-342, 347-350
Daugherty, R. L., 29
Defecto de velocidad, ley del, 250
Densidad, 22
Depósitos, flujo no permanente en, 453, 454
oscilaciones entre, 629, 630
Derivadas parciales, 705-709
Desigualdad de Clausius, 136
Desprendimiento, 350-353
Diagrama, de Moody, 281-282
de Stanton, 279
polar vectorial, 507
reológico, 16
Diagramas vectoriales, 507
Diferenciales totales, 705-709
Difusión, 251-252



Dimensiones, 203-204
Disco, par sobre, 473-479
resistencia sobre, 265
Distribución, de fangos, 251, 252
de velocidades, 138, 246-252, 581
Divergencia, 124, 374, 378
Doblete, bidimensional, 412-414
tridimensional, 395, 396
Dryden, H. L., 265, 497

Ecuaciones, de Bernoulli, 127-132, 385-387
modificación de las hipótesis, 130, 131
de continuidad, 118-125, 639-641
de estado, 24-26
de Euler, 125-127, 136, 137, 378-382
de Gladstone-Dale, 442
de Hagen-Poiseuille, 235-240, 281, 477
de la cantidad de movimiento, 141-172
de la energía, 132-136
de Laplace, 384
de Navier-Stokes, 241
del movimiento (*véase* de Euler, *más arriba*)
Edelman, G. M., 371
Efecto Magnus, 417
Efectos viscosos, 229-294
Eisenberg, P., 546
Elasticidad, módulo volumétrico de, 26, 321, 640
Eléctrica, analogía, 393
Elrod, H. G., Ur., 472*n*.
Empuje, 66-67
sobre un cojinete, 293
Energía, cinética, 128
conservación de, 132, 133
conversión de, 232-235
del flujo, 128
de presión, 128
ecuación de la, 132-136
específica, 589-592
factor de corrección de, 138-140, 240
interna, 132, 133, 313-315
potencial, 128
utilizable, 129
Ensanchamiento, brusco, 165, 166
Ensayos, en canal hidrodinámico, 217
en túnel aerodinámico, 217
Entropía, 136, 315-319
Envejecimiento de tuberías, 570, 571
Equilibrio relativo, 76-84
aceleración uniforme, 81-84
fuerza de presión en, 84
Equipotencial, línea, 392, 393
Esfera, flujo uniforme alrededor de, 407-408
traslación de, 405-406
Específica, energía, 589-592
Estabilidad, 69-75
al giro, 70-75
Establecimiento, o iniciación, del flujo, 238, 239, 631-632
Estado, ecuación de, 24-26
Estampido sónico, 353, 354
Estática de los fluidos, 37-84
Estatorreactor, 156
Estela, 262-266
Estudios sobre modelos, 217-222
Estructuras hidráulicas, 218-220
Euler, ecuación del movimiento, 125-127, 136, 137, 378-382

Factores de compresibilidad, 457
Fisher Governor Co., 486
Flettner, barco con rotores, 417
Fluido, definición de, 14
deformación de, 15-17
newtoniano, 17
no newtoniano, 17
Flujo, adiabático, 113, 336-342
adiabático reversible (*véase* isoentrópico *más adelante*)
a lo largo de placas planas, 252, 262
alrededor de un cilindro circular, 415-419
axilsimétrico, 389-408
bidimensional, 116, 408-419
clasificación de, 580, 581
compresible, 313-360
de la velocidad, 436-440
en tuberías, 342-350
medidas en, 436-440, 459-463
con circulación, 416-417
continuo, 22, 313-360
convergente-divergente, 322-329
de transición, 258, 607, 608
de un fluido ideal, 372-419

Flujo, desprendido, 22
en canales abiertos, 271-275, 579-610
clasificación de, 580, 581
gradualmente no uniforme, 592-605
permanente uniforme, 272-275
en conductos cerrados, 205-212, 235-240, 548-571
en la capa límite, 113, 252-266
en secciones no circulares, 569, 570
en tuberías, 217, 235-240, 275-290, 548-571
en tubos circulares, 235-240
en un aliviadero de crecida, 584
entre anillos circulares, 235-240
entre placas paralelas, 229-235
establecimiento, o iniciación, 238, 239, 631-632
gradualmente no uniforme, 592-605
métodos de integración, 595-598
métodos normal tramo a tramo, 593
hipersónico, 353
ideal, 372-419
irrotacional, 372-419
isoentrópico, 113, 322-329
a través de toberas, 322-329, 457-463
isotérmico, 347-350
laminar, 112, 229-244
a través de anillos circulares, 235-240
a través de tuberías, 205, 206, 235-240
entre placas paralelas, 229-235
pérdidas en, 232-235
medidas de, 431-473
óptimas, 441-445
molecular libre, 22
no permanente, en canales abiertos, 664-683
en conductos cerrados, 115, 617-664
en depósitos, 452, 453, 629-630
no uniforme, 115, 580, 592-605
normal, 272-275
en canales abiertos, 272-275, 580
permanente, 114-118, 580
potencial, 372-419
radial, bombas de, 523-527
rápido, 215, 581
secundario, 271
separación del, 262-266
Flujo, sin rozamiento, 125-130, 322-329, 342-347, 372-419
con transferencia de valor, 342-347
tipos de, 112-114
tranquilo, 215, 580
tridimensional, 116, 394-408
turbulento, 112
unidimensional, 115
uniforme, 115, 397, 398, 402, 414, 580
Fórmula, de Manning, 273
de Moody, 523
Fouse, R. R., 472*n*.
Francis, turbina, 516-523
Franz, A., 437*n*.
Froude, número de, 210, 215, 586-589
Fuerza, cortante, o tangencial, 14, 15
de empuje, 66-69
de presión estática, 52-65
Fuerzas, sobre codos, 144
sobre superficies curvadas, 60-69
sobre superficies planas, 52-60
sobre una presa de gravedad, 58-60
Fuller, D. D., 294*n*.
Función de corriente de Stokes, 289-392
Funciones de corriente, 387-392

Gas perfecto, 24-26
ley de, 24
relaciones de, 313-319
Gibson, A. H., 287
Giro, en un fluido, 375-376
uniforme, 81-84
Gladstone-Dale, ecuación de, 442
Goldstein, S., 15*n*.., 430*n*., 497
Golpe de ariete, 634-664
al cierre de una válvula, rápido, 635, 636
lento, 636
condiciones de contorno, 645-652
ecuaciones diferenciales de, 637
método algebraico, 657-664
solución característica, 641-657
solución gráfica, 653-657
Gradiente, 373
de alturas piezométricas, 551
de energía, 551
Grados Kelvin, 24
Grane Company, 287
Grupos adimensionales, 201-203



Hagen, G. W., 238
Hagen-Poiseuille, ecuación de, 206, 235-240, 281, 477
Halliwell, A. R., 697
Hardy Cross, método de, 565-569
Hawthorne, W. R., 371
Haystings-Raydist, sonda de, 435
Hélices, empuje de, 211, 212
teoría de la cantidad de movimiento de, 150-155
Henderson, F. M., 686*n*.
Hidrostática, 37-84
Hilo caliente, anemómetro de, 437-439
Hinds, J., 616
Hipersónico, flujo, 353
Holder, D. W., 497
Holt, M., 228
Horton, R. E., 497
Howarth, L., 497
Hunsaker, J. C., 371, 547

ICBM (intercontinental ballistic missile), 357
Ideal, fluido, 17, 113
Indice de cavitación, 539
Inercia, momento de, 702-704
producto de, 704
Interna, energía, 132-133, 314-315
Interpolación parabólica, 721
Ippen, A. T., 607*n*.
Ipsen, D C., 228
Irreversibilidad, 111-112
Irrotacional, flujo, 383-419
Isoentrópico, proceso, 316
Isotérmico, flujo, 347-350

Jennings, B. H., 329, 347, 371
Jennings, F. B., 472*n*.

Kaplan, turbina, 518-523
Keenan, J. H., 340*n*., 371
Keulegan, G. H., 616
Keuthe, A. M., 497
Kindsvater, C. R., 616
King., H. W., 497, 608*n*.

Ladenburg, R. W., 497
Lai, C., 697
Langhaar, H. L., 228, 239
Lansford, W. M., 464*n*.
Laplace, ecuación de, 384
Lee, S. Y., 472*n*.
Lewis, B., 497
Ley, de la viscosidad de Newton, 16, 17
de los gases perfectos, 24-26, 313-319
de Snell, 442
de Stokes, 270-271
Li, V. T., 472*n*.
Liepmann, H. W., 323*n*., 329*n*., 352, 371
Lindsey, W. F., 267
Línea, de altura piezométrica, 140, 278, 548-553
de corriente, 116-118, 389
de presión cero, 50
Longitud equivalente, 286-288, 558, 559
Lubricación hidrostática, 294

Mach-Zehnder, interferómetro de, 445
MAD (Michigan Algorithmic Dacoder), lenguaje de, 717-729
Manantial, bidimensional, 404, 410
tridimensional, 394-405
Manómetro, de capacidad, 431
de capacidad (de condensador), 431
de Chattock, 430
diferencial, 48
eléctrico, 430
inclinado, 51
sencillo, 46-49
tipo resorte, 42, 43
Máquinas hidráulicas, 220, 498-541
Mecánica de la lubricación, 290-294
Medida de la velocidad, 431-441
Medidas, de flujo, 431-473
de fuerza, 441
de presión, 427-431
de temperatura, 439-440
de turbulencia, 473
de velocidad, 436-441
de viscosidad, 474-479
del caudal de ríos, 473
en el flujo compresible, 436-441, 459-463
en el flujo fluido, 427-479
óptimas del flujo, 441-445
Medidor, de corriente de precision, 440
de desplazamiento absoluto, o positivo, 445

Medidores, de balanceo, 446
de caudal, 448-472
de caudal en masa, 439, 440
de codo, 463, 464
de corriente, 440
de desplazamiento positivo, 446
de disco, 446
de flujo de turbinas, 464, 465
de gases, 447
de gasto, 448-472
de la profundidad crítica, 608-610
de orificio, 448-454, 460-463
venturímetro, 131, 454-458
Medio ambiente, 110
Metacentro, 71
Método, de la trayectoria, 450
de registro de sombras, 444
del interferómetro, 445
Micromanómetro, 49-51
Michigan Algorithmic Decoler (MAD), 717
Milne-Thompson, L. M., 396*n.*
Modelos hidráulicos, 216-222
Módulo de elasticidad volumétrico, 26, 321, 322, 640
Molino de viento, 151
Momento, de inercia, 702-704
de la cantidad de movimiento, 169-172, 506-511
Moody, L. F., 281, 523*n.*, 547
Movimiento, de Euler, 125-127, 136, 378-382
ecuación del, 125-127, 638-639
Murphy, G., 228

Nabla, 124, 373-378
Neumann, E. P., 340*n.*, 371
Nikuradse, J., 249*n.*, 276, 280
N. P. S. H. (net positive suction head; altura de succión positiva neta), 541
Número, de Mach, 210, 216, 320-322
de Reynolds, 210, 215, 240-244
crítico, 242
en canales abiertos, 579
de Weber, 210, 215
Números adimensionales, 201-203

Olando, V. A., 472*n.*
Olas, u ondas, negativas, 671-675
Olas, u ondas, positivas, 665-671
Onda, de Mach, 268
estacionaria, 167
sonora, 320-322
Ondas, elemental, 359, 360, 671-674
ola, 665-671
Operador vectorial ∇, 373-378
Orificio, en depósitos, 130, 132, 448-451
en tuberías, 460-463
pérdidas en, 451-454
vaciado por, 453
VDI (Verein Deutscher Ingenieure), 459-463
Oscilación de un líquido en un tubo en U, entre recipientes, 629-630
resistencia laminar, 620-625
resistencia turbulenta, 625-630
sin rozamiento, 618, 619
Oswald-Cannon-Fenske, viscosímetro de, 478

Pankhurst, R. C., 497
Par sobre un disco, 473-477
Parámetros, adimensionales, 201-203
de cavitación, 537
Parmakian, J., 697
Pease, R. N., 497
Pérdidas, 111-112, 137
en accesorios, 287
en contracciones bruscas, 285
en ensanchamientos bruscos, 165, 166
en expansión crónica, 287
bruscos, 165, 166, 285, 286
en flujos laminares, 232-235
menores, 285-290
longitud equivalente de, 288-290
Perfiles superficiales, 602-605
Peso específico, 22
relativo, 22
Piezómetro, o manómetro, abierto, 427
Placas paralelas, 229-234
Plástico ideal, 17
Poise, 20
Posey, C. J., 616
Posicionadora, válvula, 484
Potencial de velocidad, 383-384
Prandtl-Glauert, transformación de, 352
Prandtl, hipótesis de, 252, 316
L., 245, 252, 260, 270, 371





Prandtl, ley de la raíz séptima de, 139, 258
longitud de mezcla de, 244-251
tubo de, 434
Presas de gravedad, 58-60
Presión, de estancamiento, 432
de vapor, 27, 28, 710
del agua, 710
dinámica, 432
estática, 22, 37-46, 431, 432
medida de, 427-431
total, 432
Prisma de presiones, 57-58
Proceso, 111
politrópico, 316-319
Procesos de flujo, 251, 252
Producto de inercia, 704
Profundidad, conjugada, 166-169
crítica, 589-592
normal, 580, 602-605
Propiedades, de los fluidos, 14-29, 710-712
de un fluido, 14-29
del agua, 710
Propiedades físicas, de los fluidos, 15-29, 710-712
del agua, 710
Propulsión, a chorro, 152-159
de cohetes, 157-159

Radio hidráulico, 272
Rainville, E. D., 626
Red, de corriente, 392-394
de tuberías, 565-569
Régimen rápido, 215, 581
Regla, de Simpson, 720
del área, 355, 356
Relación de calores específicos, 313, 314, 712
Relaciones, entre el agua de lluvia y su desagüe, 686-692
entre la altura de carga y la energía, 509-511
Rendimiento, de un compresor centrífugo, 530-533
de una bomba centrífuga, 526
global, 509
hidráulico, 509
Resalto hidráulico, 166-169, 585-589, 606
Resistencia, debida a la fricción en tuberías, 275-290, 337-342, 347-350, 548, 549
fluida, 229-294
Respuestas de los problemas, 731-737
Reversibilidad, 111
Reynolds, aparato de, 240-243
Osborne, 241
Rheingans, W. J., 538*n.*
Riclos, métodos de, 442-444
Rightmire, B. G., 371, 547
Roshko, A., 323*n.*, 329*n.*, 352, 371
Rotacional, 375-376
Rotámetro, 464
Rotura de un dique, perfil superficial, 674, 675
Rugosidad relativa, 276-285
Runge-Kutta, método de, 723-729

Satélite, 358
Saybolt, viscosímetro de, 477
Schlichting, H., 262, 357
Sección, contraída, 448
de control, 605-607
recta hidráulica óptima, 581-583
Sedov, L. I., 228
Semejanza, 217-222
dinámica, 200-222
Semicuerpo, 399-401
Separación, 262-266, 505
Serie, tuberías en, 556-559
Shapiro, A. H., 329, 371
Sifón, 140, 141, 554-556
Sistema, abierto, 110
de inyección de gas-oil, 13, 14
Sistema de fuerzas, 702
Sommers, W. P., 443
Sopladores, 523-530
Spannhake, W., 547
Stepanoff, A. J., 547
Stoke, 21
Stokes, G., 270, 405*n.*
Streeter, V. L., 139*n.*, 418*n.*, 697
Sumidero, 357, 394-405, 409
de calor, 357
Superficial, o pelicular, rozamiento, 264
Superficie, de control, 110
de corriente, 389-391
libre equivalente, o imaginaria, 63, 64

Superficies, curvas, fuerzas componentes sobre, 60-69
horizontal, 60-62
vertical, 62-65
Supersónico, flujo, 313-360
Sustentación, 268, 354, 417, 418
Sustentación y arrastre, o resistencia; en los perfiles de ala, 267, 268
Sutton, G. W., 538*n*.

Taylor, H. S., 497
Instrument Co., 441
Teledeltos, papel, 394
Temperatura, medidor de, 436, 437
Tensión, cortantes, o tangencial, 14-17
del agua, 710
distribución de, 235
en flujo turbulento, 271
superficial, 28, 29
Tensiones de tracción en tuberías, 651
Teorema de Π, 204-213
Teoría, de la longitud de mezcla, 244-251
de las hélices por la cantidad de movimiento, 150-155
de los álabes en cascada, 504-506
Termodinámica, primer principio, 132-136
segundo principio, 135, 136
Termopares calentados, 435, 436
Thermo-Systems, Inc., 439
Thixotrópica, sustancia, 17
Tiempo de vaciado, 453, 454
Tobera, de aforo VDI, 459-460
flujo a través de, 322-329
fuerzas sobre, 148
Toberas afonadoras, 459-460
Torricelli, teorema de, 131
Trabajo del flujo, 128
Transferencia de calor, 342-347
Transiciones, 607-610
Transmisor neumático de posición, 437
Trayectoria de una partícula, 116
Trazas, 117
Tridimensional, flujo, 116, 394-408
Tuberías, de rugosidad artificial, 275-280
en paralelo, 559-562
en serie, 556-559
envejecimiento de, 570, 571
flujo compresible en, 336-350
Tuberías, flujo compresible en, equivalentes, 558
resistencia de fricción en, 235-240, 275-290, 336-339, 347-350
(*véase también* Flujo en tuberías)
ramificadas, 562-565
sistema de, 562-565
red de, 565-570
tensiones de tracción en, 65
Tubo, de corriente, 117
de Pitot, 141, 431-435
estático, 431-435
estático, 428
Turbinas, de hélice, 507, 516-523
de impulsión, 511-516
de reacción, 516-523
Francis, 516-523
Kaplan, 520
medidor de, 464, 465
Pelton, 511-516
Turbocompresor, 530-533
Turbomaquinaria, 498-541
Turbomáquinas, teoría de, 506-511
Turborreactor, 156
Turbulencia, 240-244
medidas de, 473
nivel de, 265
Tulin, M. P., 546
Túnel aerodinámico, 327

Ubbelohde, viscosímetro de, 478
Unidades, de fuerza y masa, 17, 203, 204
homólogas, 498-504
Uniforme, flujo, 115, 402, 414, 580
Universal, constante, 246-250

Vaciado de depósitos, 453, 454
Válvula, de control, 483
posicionadora, 484-487
Variación de presión, compresible, 41, 42
incompresible, 39-41
VDI, orificio, 460-463
tobera aforadora, 459-460
Vectorial, producto, 169
Velocidad, del sonido, 320-322, 640, 641
específica, 498-504
potencial de, 383, 384
temporal media, 115
Venturímetro, 132, 454-463



Vertederos, de pared delgada, 465, 466
de pared gruesa, 468, 469
en V, 207, 208, 467, 471
Viscosidad, 18-21, 711
cinemática, 21, 712
de remolino, 246
del agua, 712
de remolino, 246
ley de Newton de, 16-18
medidas de, 474-479
unidades y conversiones, 19, 20
Viscosímetro, de cilindros concéntricos, 473-477
de tubo capilar, 477
Saybolt, 477
Volumen, de control, 110
específico, 22
Von Kármán, Th., 246, 254
Vórtice, 81, 411, 416, 417, 477
forzado, 81
libre, 81, 411-414, 477
Vorticidad, 375, 376
Vuelo, a gran velocidad, 350-358

Weisbach, J., 286
White, C. M., 570*n*.
Wiedemann, G., 238
Wislicenus, G. F., 547
Woodward, S. M., 616

Yih, C. S., 394